CONVERGENCIA LOCAL DE FILTROS EN ESPACIOS LOCALMENTE CONVEXOS

por

FELIX LÓPEZ FERNANDEZ-ASENJO Y JESUS SANZ SERNA

SUMARIO

En este trabajo se generaliza a filtros la noción de convergencia local de sucesiones en espacios localmente convexos. Se prueba que el conjunto de filtros que convergen localmente es una clase de convergencia en el sentido de H. R. Fischer y se realiza un estudio de la topología asociada a dicha clase de convergencia. Dicho estudio da origen a una nueva clase de espacios localmente convexos que es estrictamente mayor que la clase de los espacios metrizables y estrictamente menor que la clase de los espacios bornológicos.

Sea $E(\tau)$ un espacio localmente convexo separado. Por $\Lambda(0)$ denotaremos el conjunto de filtros en E que convergen a cero por τ, y por G al conjunto de las partes de E absolutamente convexas y acotadas. Si $B \varepsilon \mathcal{G}$, se designará por E_B el espacio normado asociado a B. Un filtro $\mathcal{F}$ en E se dice que es τ-acotado si existe un elemento A de $\mathcal{F}$ que es τ-acotado.

DEFINICIÓN 1. Se dice que un filtro $\mathcal{F}$ en E converge localmente a cero, si existen un elemento $B \varepsilon \mathcal{G}$ y una base de filtro $\mathcal{B}$ en E, tales que:

1.º) Para cada elemento $A \varepsilon \mathcal{B}$, $A \subset E_B$
2.º) La base de filtro $\mathcal{B}$ genera a $\mathcal{F}$.
3.º) La base de filtro $\mathcal{B}$ converge a cero en el espacio E_B.

Por $\Lambda_m(0)$ denotaremos el conjunto de los filtros en E que convergen localmente a cero.

Claramente la def. 1) generaliza la noción de sucesión localmente convergente a cero.

PROPOSICIÓN 1. Sea $\mathcal{F}$ un filtro en E; las proposiciones siguientes son equivalentes

α) $\mathcal{F} \varepsilon \Lambda_m (0)$

β) Existe un elemento $B \varepsilon \mathcal{G}$ tal que la base de filtro $\{\lambda B | \lambda \varepsilon R^+\}$ es menos fina que $\mathcal{F}$.

DEMOSTRACIÓN: $\alpha) \to \beta)$. Si $\mathcal{F} \varepsilon \Lambda_m (0)$ existen un acotado $B \varepsilon \mathcal{G}$, y una base de filtro $\mathcal{B}$ en E verificando 1.º) 2.º) 3.º) de la definición 1. Sea $\lambda \varepsilon R^+$, como $\mathcal{B}$ converge a cero en E_B existe $A \varepsilon \mathcal{B}$ con $A \subset \lambda B$.

$\beta) \to \alpha)$ La traza $\mathcal{F}_B$ de $\mathcal{F}$ sobre E_B es una base de filtro en E_B que genera a $\mathcal{F}$ y converge por hipótesis a cero en E_B.

COROLARIO 1. $\Lambda_m (0) \subset \Lambda (0)$. Si $\mathcal{F} \varepsilon \Lambda_m (0)$ entonces $\mathcal{F}$ es τ-acotado.

DEMOSTRACIÓN: Si $\mathcal{F} \varepsilon \Lambda_m (0)$ existe un elemento $B \varepsilon \mathcal{G}$ tal que la base de filtro $\{\lambda B / \lambda \varepsilon R^+\}$ es menos fina que $\mathcal{F}$. Dado entonces V entorno de cero en $E(\tau)$ existe $\lambda \varepsilon R^+$ y $A \varepsilon \mathcal{F}$ con $A \subset \lambda B \subset V$.

COROLARIO 2. El espacio $E(\tau)$ es normable si y solo si $\Lambda (0) = \Lambda_m (0)$.

DEMOSTRACIÓN: Si $E(\tau)$ es normable, existe un elemento $B \varepsilon \mathcal{G}$ que es entorno de cero en $E(\tau)$, y además la base de filtro $\{\lambda B / \lambda \varepsilon R^+\}$ es sistema fundamental de entornos del origen en $E(\tau)$, por tanto si $\mathcal{F} \varepsilon \Lambda$ se tiene que $\mathcal{F} \varepsilon \Lambda_m (0)$.

Recíprocamente: Sea $\mathcal{B}(0)$ la familia de τ-entornos de cero, se tiene que $\mathcal{B}(0)$ converge localmente a cero. Por el corolario 1, $\mathcal{B}(0)$ es un filtro acotado luego $E(\tau)$ es normable.

PROPOSICIÓN 2. $\Lambda_m (0)$ verifica las siguientes propiedades:

a) Si $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2 \varepsilon \Lambda_m (0)$ entonces $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 \varepsilon \Lambda_m (0)$.

b) Si $\mathcal{F} \varepsilon \Lambda_m (0)$ y α es un escalar, $\alpha \mathcal{F} \varepsilon \Lambda_m (0)$.

c) Si $\mathcal{V}$ es el filtro de los entornos de cero en el cuerpo entonces $\mathcal{V}\mathcal{F} \varepsilon \Lambda_m (0)$ para cada $\mathcal{F} \varepsilon \Lambda_m (0)$.

d) Para cada $x \varepsilon E$, $\mathcal{V} x \varepsilon \Lambda_m (0)$.

DEMOSTRACIÓN: *a*) Existen dos elementos B_1, $B_2 \varepsilon \mathcal{G}$ tales que el filtro $\mathcal{F}_i$ es más fino que la base de filtro $\{\lambda B_i / \lambda \varepsilon R^+\}$ $(i = 1, 2)$. Por tanto existe un elemento $A_i \varepsilon \mathcal{F}_i$ con $A_0 \subset \lambda B_i$ $(i = 1, 2)$.

luego $A_1 + A_2 \subset \lambda(B_1 + B_2)$, y como $B_1 + B_2 \in \mathcal{G}$ se tiene $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 \in \Lambda_m(0)$.

b) Existe un elemento $B \in \mathcal{G}$ tal que el filtro $\mathcal{F}$ es mas fino que la base de filtro $\{\lambda B / \lambda \in R^+\}$. Por tanto para cada $\lambda \in R^+$ existe un elemento $A \in \mathcal{F}$ con $A \subset \lambda B$, luego $\alpha A \subset \lambda(\alpha B)$ y $\alpha \mathcal{F} \in \Lambda_m(0)$.

c) Como el filtro $\mathcal{F}$ es más fino que la base de filtro $\{\lambda B / \lambda \in R^+\}$ para algún $B \in \mathcal{G}$, dando $\lambda \in R^+$ existe un elemento $A \in \mathcal{F}$ con $A \subset \lambda B$. Si $H = \{\alpha \in C / |\alpha| < 1\}$ para cada $\alpha \in H$ y cada $x \in A$ se tiene $\alpha x \in \alpha(\lambda B) = \lambda(\alpha B) \subset \lambda B$.

d) Sea $B \in \mathcal{G}$ con $x \in B$ y $\lambda \in R^+$. Si $\alpha \in K$ con $|\alpha| < \lambda$ se tiene que $\alpha x \in \alpha B \subset \lambda B$.

DEFINICIÓN 2. Un filtro $\mathcal{F}$ en E se dice que converge localmente, si existe un $x \in E$ tal que el filtro $\mathcal{F}$-x converge localmente a cero. Denotaremos por Λ_m el conjunto de filtros en E que convergen localmente y para cada $x \in E$ designaremos por $\Lambda_m(x)$ el conjunto $\{\mathcal{F} \in \Lambda_m / \mathcal{F} - x \in \Lambda_m(0)\}$.

PROPOSICIÓN 3. El conjunto Λ_m es una clase de convergencia en E, compatible con la estructura de espacio vectorial.

DEMOSTRACIÓN: Veamos que Λ_m verifica los axiomas que definen una clase de convergencia según H. R. Fischer.

$(EC1)$. Para cada $x \in E$, sea $\mathcal{U}(x)$ el ultrafiltro en E formado por los superconjuntos de $\{x\}$, entonces $\mathcal{U}(x) - \{x\} = \mathcal{U}(0)$ y evidentemente la traza de $\mathcal{U}(0)$ sobre E_B converge a cero en E_B para cada $B \in \mathcal{G}$.

$(EC2)$. Sean $x \in E$, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ dos filtros en E tales que $\mathcal{F}' > \mathcal{F}$ y $\mathcal{F} \in \Lambda_m(x)$. Por la proposición 1, existe $B \in \mathcal{G}$ tal que el filtro $\mathcal{F}$-x es más fino que la base de filtro $\{\lambda B / \lambda \in R^+\}$. Como $\mathcal{F}' - x \geq \mathcal{F}$-$x$ se deduce que $\mathcal{F}' \in \Lambda_m(x)$.

$(EC3)$. Sean $x \in E$, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2 \in \Lambda_m(x)$. Por la proposición 1, existen dos elementos B_1, $B_2 \in \mathcal{G}$ tales que el filtro $\mathcal{F}_i - x$ es más fino que la base de filtro $\{\lambda B_i / \lambda \in R^+\}$, $(i = 1, 2)$. Se tiene entonces que $(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2) - x$ es más fino que la base del filtro $\{\lambda(B_1 + B_2) / \lambda \in R^+\}$ y como $B_1 + B_2 \in \mathcal{G}$ se deduce que $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \in \Lambda_m(x)$.

Por tanto Λ_m es una clase de convergencia sobre E, que por la proposición 2, es compatible con la estructura vectorial.

Fischer asocia a cada clase de convergencia una topología. Estudiaremos seguidamente la topología asociada a la convergencia local.

DEFINICIÓN 3. Denotamos por τ_m la topología sobre E asociada a la clase de convergencia Λ_m. Un subconjunto no vacio A de E es τ_m-abierto si $A \varepsilon \mathcal{F}$ cualquiera que sea $\mathcal{F} \varepsilon \Lambda_m(x)$ con $x \varepsilon A$.

La proposición siguiente caracteriza los conjunto τ_m-abiertos.

PROPOSICIÓN 4. Un subconjunto no vacio A de E es τ_m-abierto ssii para cada $x \varepsilon A$ el conjunto A-x es τ_m-bornívoro. La topología τ_m es invariante por traslación.

DEMOSTRACIÓN: Si A es τ_m-abierto y $x \varepsilon A$ se verifica que $A \varepsilon F$ para todo filtro $\mathcal{F} \varepsilon \Lambda_m(x)$, luego $A - x \varepsilon \mathcal{F}^*$ para todo filtro $\mathcal{F}^* \varepsilon \Lambda_m(0)$. Sea $B \varepsilon \mathcal{G}$, trivialmente la base de filtro $\{\lambda B / \lambda \varepsilon R^+\}$ converge a cero en E_B, dicha base genera un filtro $\mathcal{F}(B)$ en E que converge localmente a cero. Se deduce que $A - x \varepsilon \mathcal{F}(B)$ y por tanto existe $\lambda \varepsilon R^+$ con $\lambda B \subset A - x$.

Recíprocamente: Sea $\mathcal{F} \varepsilon \Lambda_m(0)$, existe $B \varepsilon \mathcal{G}$ tal que $\mathcal{F}$ es más fina que $\{\lambda B / \lambda \varepsilon R^+\}$. Si $x \varepsilon A$ por ser $A - x$, τ-bornívoro existe $\mu \varepsilon R^+$ con $\mu B \subset A - x$, luego $A - x \varepsilon \mathcal{F}$ deduciendose que A es τ_m-abierto.

Comprobemos finalmente que τ_m es invariante por traslación. Sea $M \subset E$, τ_m-abierto; $y \in E$. Si $x \varepsilon M - y$ y $\mathcal{F} \varepsilon \Lambda_m(x)$, $\mathcal{F} + y \varepsilon \Lambda_m(x + y)$ y como $x + y \varepsilon M$ se deduce que $M \varepsilon \mathcal{F} + y$ y por tanto $M - y \varepsilon \mathcal{F}$.

COROLARIO. La topología τ es menos fina que la topología τ_m.

DEMOSTRACIÓN: Si A es un conjunto τ-abierto y $x \varepsilon A$, entonces $A - x$ es τ-entorno de cero y por tanto τ-bornívoro.

DEFINICIÓN 4. Sea F un espacio vectorial real o complejo y τ^* una topología en F separada e invariante por traslación. Se dice que una parte $A \subset F$ es τ^*-acotada si es absorbida por todos los τ^*-entornos de cero.

PROPOSICIÓN 5. Si τ^x es la topología bornológica asociada a $E(\tau)$ se verifica.

a) τ_m es la topología invariante por traslación, sobre E más fina de las que tienen los mismos acotados que $E(\tau)$.

b) τ^x es la topología localmente convexa sobre E más fina de las topologías localmente convexas menos finas que τ_m.

c) Son topologías τ y τ_m coinciden si y solo si τ_m es una topología localmente convexa y $E(\tau)$ es un espacio bornológico.

DEMOSTRACIÓN: *a*) En primer lugar τ_m y τ tienen los mismos acotados.

Si $A \subset E$ es τ-acotado y V es un entorno abierto del origen en τ_m V es τ-bornívoro y absorbe a A. Por tanto A es τ_m-acotado. Si $A \subset E$ es τ_m-acotado con más razón es acotado por la topología τ que es menos fina.

Sea τ^* una topología invariante por traslación y separada en E, Poseyendo los mismos acotados que τ. Si A es un subconjunto de E no vacío y τ^*-abierto, para cada $x \varepsilon A$, $A - x$ es τ^*-entorno de cero y por lo tanto τ-bornívoro deduciendose que A es τ_m-abierto.

b) Se desprende inmediatamente de la definición de τ^x y el apartado anterior.

c) Si $\tau = \tau_m$ como $\tau \leq \tau^x \leq \tau_m$ se deduce que $\tau = \tau^x$ y el espacio $E(\tau)$ es bornológico. Recíprocamente τ_m es localmente convexa $\tau = \tau^x$ y si $E(\tau)$ es bornológico $\tau = \tau_m$.

EJEMPLOS: 1) Si (E, τ) es un espacio metrizable se tiene $\tau = \tau_m$.

Sea A un subconjunto no vacío de E con A, τ_m-cerrado. Sea entonces $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de A que converge hacia un elemento x por la topología τ. Como el espacio $E(\tau)$ es metrizable se tiene que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge localmente hacia x y por tanto $x \varepsilon A$; deduciendose que A es τ-cerrado.

2) Veamos a continuación un ejemplo de espacio $E(\tau)$ no metrizable para el que también se verifica $\tau = \tau_m$.

Sea E un espacio vectorial de dimensión algebraica infinita numerable y τ la topología convexa más fina sobre E.

Se sabe (Borubaki Cap. II ej. 4-16) que τ es la más fina de las topologías sobre E (compatible o no con la estructura vectorial) que inducen sobre cada subespacio de E de dimensión finita la topología canónica. Por tanto si probamos que τ_m induce sobre cada subespacio de dimensión finita E la topología canónica tendremos $\tau_m \leq \tau$ y en definitiva $\tau_m = \tau$.

Sea entonces F un subespacio de dimensión finita de E. La topología $\tau_m(F)$ que τ_m induce en F es más fina que la canónica pues $\tau_m > \tau$ Por otra parte sea V un entorno abierto del origen de F en la topología canónica. Si H es un suplemento topológico de F en E (Bourbaki Cap. II 3 th 1 col 3)

$$V = F \cap (H + V)$$

donde $H + V$ es claramente τ_m-abierto, luego V es entorno del origen en $\tau_m(F)$.

3) Finalmente damos un ejemplo de espacio $E(\tau)$ bornológico en que τ_m no es una topología localmente convexa.

Bourbaki (Cap. II ej. 4-16) considera el ejemplo siguiente:

Sea E_0 un espacio de Banach de dimensión infinita E el espacio vectorial suma directa de E_0 y $R^{(N)}$; E_p el subespacio de E suma directa de E_0 y R^p (identificando al producto de los p primeros factores de $R^{(N)}$. Se dota a E_p de la topología producto de las de sus factores de forma que la topología de E_p es inducida por la de E_{p+1}.

Sea τ la topología límite inductivo de las E_p.

En estas condiciones se puede probar que existe en E un subconjunto $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{U} \cap E_p$ es abierto en E_p para cada p pero $\mathcal{U}$ no es τ-abierto. Si B es un conjunto τ-acotado y x un punto de $\mathcal{U}$ existe p tal que $B \subset E_p$, $x \varepsilon E_p$ y B es acotado en la topología de E_p. Se sigue que $\mathcal{U} \cap E_p$ es entorno de x en E_p y por tanto $(\mathcal{U} \cap E_p)$-x absorbe a B. Con mayor razón $\mathcal{U} - x$ absorbe a B luego $\mathcal{U}$ es τ_m-abierto.

Entonces τ_m es estrictamente más fina que τ. Como τ es bornológico τ_m no puede ser localmente convexa.

De estos ejemplos se deduce que la clase de los espacios localmente convexos para los cuales $\tau = \tau_m$ contiene estrictamente la clase de espacios metrizables y está contenida estrictamente en la clase de los espacios bornológicos.

BIBLIOGRAFÍA

(1) BOURBAKI. N. — *Eléments de Mathématique, Livre V, Espaces vectoriels topologiques*, 2 Vols. Act. Sci. et Ind. Vols. 1189, 1229, 1229 (1953, 1955).

(2) KOTHE, C. — *Topological Vector Spaces*, Springer-Verlang (1969).

(3) KELLER, H. H. — *Differential Calculus in Locally Convex Spaces*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag 417.

(4) FISCHER, H. R. — *Limesraume*. Math. Ann 137 (1959) 269-303 MR 22 225.