# NEUE ERGEBNISSE DER THEORIE DER HYPERGRAPHEN MIT ANWENDUNGEN IN DER INFORMATIONSTHEORIE

von

G. SCHRAGE

## 1. *Grundlagen*

Ein Hypergraph ist ein Tripel $H = (E, K, I)$, wobei $E \cap K = \phi$ und $I \subset E \times K$. Die Elemente von $E$ heißen Eck- oder Knotenpunkte des Hypergraphen, und die Elemente von $K$ werden als Kanten bezeichnet. Gilt für $e \in E$ und $k \in K$ $(e, k) \in I$, so heißen $e$ und $k$ miteinander inzident. Die Anzahl der mit einer Kante $k$ inzidierenden Knotenpunkte bezeichnen wir auch als Ordnung der Kante $k$. Entsprechend heißt die Anzahl der mit einem Knotenpunkt $e$ inzidierenden Kanten Ordnung von $e$. Um uninteressante Fallunterscheidungen zu vermeiden, wollen wir stets annehmen, daß sowohl alle Kanten als auch alle Knotenpunkte mindestens die Ordnung eins haben.

Ein Hypergraph besteht also ebenso wie ein Graph aus Objekten, die als Knotenpunkte und Kanten bezeichnet werden. Der Unterschied besteht darin, daß bei Graphen die Ordnung jeder Kante eins oder zwei ist, während eine solche Einschränkung für die Kanten eines Hypergraphen nicht gilt.

Mit anderen Worten: Ein Graph ist ein Hypergraph, bei dem jede Kante mit einem oder mit zwei Knotenpunkten inzidiert.

Zeichnerisch wird man einen Hypergraphen darstellen, indem man die Knotenpunkte durch Punkte der Zeichenebene repräsentiert und die Kanten durch (topologische) Kreise, die genau die Punkte umschliessen, die den mit der betreffenden Kante inzidierenden Knotenpunkten entsprechen.

*Beispiel:* Sei $H = (E, K, I)$ mit $E = \{e_1, e_2, \dots, e_6\}$,
$K = \{k_1, k_2 \dots, k_5\}$ und $I = \{(e_1, k_1), (e_2, k_2), (e_3, k_1), (e_2, k_2), (e_4, k_2),$
$(e_4, k_3), (e_5, k_3), (e_6, k_3), (e_5, k_4),$
$(e_6, k_4), (e_3, k_5)\}$.

Dieser Hypergraph wird durch die Figur der Abb. 1 dargestellt.

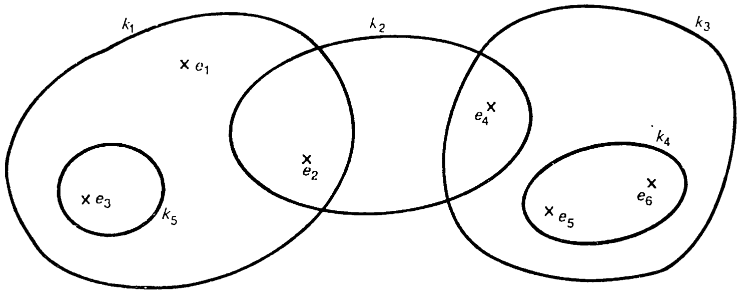


Abb. 1

Wir wollen nun einige in der Graphentheorie geläufige Begriffe verallgemeinern.

Def. 1: Ein Hypergraph $H' = (E', K', I')$ heißt Teilhypergraph von $H = (E, K, I)$, wenn $E' \subset E$, $K' \subset K$ und für $e \in E'$ und für $k \in K'$ gilt $(e, k) \in I'$ genau dann, wenn $(e, k) \in I$.

Def. 2: Sei $H = (E, K, I)$ und $H' = (E', K', I')$ ein Teilhypergraph von $H$, für den gilt, daß $K$ alle Kanten enthält, die in $H$ mit einem Element von $E'$ inzidieren. Dann heißt $H'$ der von $E'$ erzeugte Unterhypergraph von $H$, und wir bezeichnen ihn mit $H(E')$.

Analog definiert man den von einer Kantenmenge $K'$ erzeugten Unterhypergraph $H(K')$.

Def. 3: In $H = (E, K, I)$ heißen zwei Knotenpunkte a und $b$ benachbart, wenn eine Kante $k \in K$ existiert, die mit a und $b$ inzidiert. Zwei Kanten $k_1$ und $k_2$ heißen benachbart wenn ein Knotenpunkt $e \in E$ existiert, der mit $k_1$ und $k_2$ inzidiert.

Def. 4: In $H = (E, K, I)$ heißt eine Folge der Form $(e_1, k_1, e_2, k_2, \dots, k_n, e_{n+1})$- *bzw.* der aus den Knoten $e_1, \dots, e_{n+1}$ und den Kanten $k_1, \dots, k_n$ bestehende Teilhypergraph - Weg der Länge $n$, falls gilt:

1. $k_r$ inzidiert mit $e_r$ und $e_{r+1}$, für $r = 1, 2, \dots, n$,
2. $k_i \neq k_j$ für $i \neq j$,

3. $e_i \neq e_j$ für $i \neq j$ und $\{i, j\} \neq \{1, n+1\}$.
Ist $n > 1$ und gilt $e_{n+1} = e_1$, so heißt der Weg Kreis der Länge $n$.

Def. 5: In $H = (E, K, I)$ heißen zwei Knotenpunkte $a$ und $b$ miteinander verbunden, wenn ein Weg existiert, der mit a beginnt und mit $b$ endet. Wir schreiben hierfür $a\ V\ b$. Falls für beliebige $a, b \in E$ stets gilt $a\ V\ b$, so heißt $H$ zusammenhängend.

Man überzeugt sich leicht, daß die Relation $V$ eine Äquivalenzrelation ist.

Als nächstes wollen wir einige für die Anwendungen der Theorie grundlegende Zahlen definieren.

Def. 6: Eine Färbung der Knotenpunkte von $H = (E, K, I)$ heißt zulässig, wenn jede Kante, deren Ordnung größer als eins ist, mit mindestens zwei verschieden gefärbten Knoten inzidiert. Als chromatische Zahl $\chi(H)$ von $H$ bezeichnen wir die kleinste Zahl von Farben, die erforderlich ist, um die Knotenpunkte von $H$ zulässig zu färben.

*Beispiel:* (Berge)

Betrachten wir die endliche projektive Ebene aus sieben Punkten und sieben Geraden (Abb. 2):

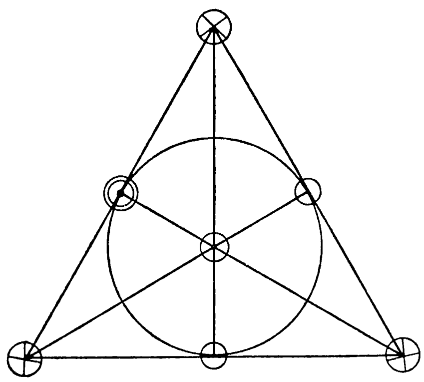

Abb. 2

Die Inzidenzstruktur dieser projektiven Ebene liefert einen Hypergraphen, dessen Knotenpunkte den Punkten der Ebene und dessen Kanten den Geraden der Ebene entsprechen. Anhand der Zeichnung überzeugt man sich leicht, daß die chromatische Zahl dieses Hypergraphen drei ist.

Def. 7: Sei $H = (E, K, I)$.
Eine Teilmenge $S \subset E$ heißt stabil, wenn für zwei verschiedene Knotenpunkte $a, b \in S$ stets gilt, daß $a$ und $b$ nicht benachbart sind. Als Stabilitätszahl $\alpha(H)$ von $H$ bezeichnen wir die Kardinalzahl einer stabilen Menge von maximaler Ordnung, d.h.

$$\alpha(H) = \max \{|S|, S \text{ ist stabil}\}.$$

*Beispiel:* In einer Gruppe von $n$ Staaten seien einige untereinander befreundet. Gesucht wird eine größtmögliche Allianz, d.h. eine größtmögliche Zahl von Staaten, die alle untereinander befreundet sind.

Wir ordnen dem Problem den Hypergraphen $H = (E, K, I)$ zu, bei dem jedem Element von $E$ umkehrbar eindeutig ein Staat zugeordnet wird, und bei dem zwei Knotenpunkte genau dann nicht benachbart sind, wenn die entsprechenden Staaten befreundet sind.

Obigem Problem entspricht dann die Frage nach einer stabilen Menge maximaler Ordnung in $H$.

Def. 8: Sei $H = (E, K, I)$.
Eine Menge $T \subset E$ heißt transversal, wenn für jede Kante $k \in K$ ein Knotenpunkt $e \in T$ existiert, so daß $(e, k) \in I$. Als Transversalitätszahl $\tau(H)$ von $H$ bezeichnen wir die Kardinalzahl einer transversalen Menge von minimaler Ordnung, d.h.

$$\tau(H) = \min \{|T|, T \text{ ist transversal}\}.$$

*Beispiel:* Was ist die kleinste Anzahl von Damen, die solcherart auf einem Schachbrett aufgestellt werden können, daß jedes Feld von einer Dame besetzt ist oder in einem Zug besetzt werden kann? Wo sind die Damen zu postieren?

Wir numerieren die Felder des Schachbrettes von 1 bis 64. Dem Problem ordnen wir den Hypergraphen $H = (E. K, I)$ zu, mit $E = \{e_1, \ldots, e_{64}\}$ und $K = \{k_1, \ldots, k_{64}\}$, wobei $e_i$ genau dann mit $k_j$ inzidiert, wenn das Schachfeld $j$ durch eine Dame vom Feld $i$ aus beherrscht werden kann. Offenbar entspricht jeder Lösung des Schachbrettproblems eine minimale transversale Menge in $H$ und umgekehrt.

Für Algorithmen zur Ermittlung stabiler oder transversaler Mengen sei auf [1] verwiesen.

Zu jedem Hypergraph $H = (E, K, I)$ können wir einen Hypergraph $H^* = (E^*, K^*, I^*)$ angeben mit $E^* = K$, $K^* = E$ und $(k, e) \in \in I^*$ genau dann, wenn $(e, k) \in I$. Die Kanten von $H$ sind also die Knotenpunkte von $H^*$ und umgekehrt, und die Inzidenzbeziehungen zwischen Knoten und Kanten bleiben erhalten. Wir bezeichnen $H^*$ als den zu $H$ dualen Hypergraph.

Aus der Konstruktion des dualen Hypergraphen ergibt sich sofort

Satz 1: Ist $H^*$ der zu $H$ duale Hypergraph, so ist $H$ der duale Hypergraph zu $H^*$. Anders ausgedrückt: $(H^*)^* = H$.

Wir stellen nun die Frage, was aus einer stabilen *bzw.* transversalen Knotenpunktmenge von $H$ wird beim Übergang von $H$ zu $H^*$.

Sei $S \subset E$ eine stabile Menge von $H = (E, K, I)$.

Für zwei verschiedene Knotenpunkte $a, b \in S$ gilt stets, daß sie nicht benachbart sind. In $H^* = (E^*, K^*, I^*)$ sind daher diese Knotenpunkte von $H$ zwei Kanten, die nicht benachbart sind. Der Menge $S$ entspricht also in $H$ ein System von Kanten, von denen keine zwei benachbart sind. Ein solches System von Kanten bezeichnen wir als Anhäufung in $H^*$. Ähnlich überlegt man, daß jeder Anhäufung in $H^*$ eine stabile Menge in $H$ entspricht.

Ist $T \subset E$ eine transversale Menge in $H = (E, K, I)$, so inzidiert jede Kante $k \in K$ mit einem Element von $T$. In $H^*$ ist $T$ daher eine Kantenmenge von der Art, daß jeder Knotenpunkt von $H^*$ mit einer Kante aus der Kantenmenge $T$ inzidiert. Eine solche Kantenmenge heißt Überdeckmenge von $H^*$. Jeder Überdeckmenge von $H^*$ entspricht umgekehrt eine transversale Menge in $H$.

Die hier erläuterten Begriffe sollen noch einmal genau definiert werden.

Def. 9: Sei $H = (E, K, I)$.
Eine Kantenmenge $A \subset K$ heißt Anhäufung in $H$, wenn keine zwei Elemente von $A$ benachbart sind. Die Kardinazahl $\nu(H)$ einer Anhäufung maximaler Ordnung heißt Anhäufungszahl von $H$.

Def. 10: Sei $H = (E, K, I)$.
Eine Kantenmenge $U \subset K$ heißt Überdeckung von $H$, wenn zu jedem $e \in E$ ein $k \in U$ existiert, so daß $(e, k) \in I$.

Die Kardinalzahl $\varrho(H)$ einer Überdeckung minimaler Ordnung heißt Überdeckungszahl von $H$.

Die oben angestellten Überlegungen liefern

Satz 2: a) Die Stabilitätszahl $\alpha(H)$ ist gleich der Anhäufungszahl $\nu(H^*)$ des zu $H$ dualen Hypergraphen.
b) Die Transversalitätszahl $\tau(H)$ ist gleich der Überdeckungszahl $\varrho(H^*)$ des zu $H$ dualen Hypergraphen.

Eine unmittelbare Folgerung aus den Definitionen 7 bis 10 ist

Satz 3: Sei $H$ ein beliebiger Hypergraph.
Dann gilt
$\alpha(H) \leqslant \varrho(H)$ und $\nu(H) \leqslant \tau(H)$.

Ein reizvolles und für mancherlei Anwendungen wichtiges Problem, das noch weitgehend ungelöst ist, ist die Frage, wann in den beiden Ungleichungen von Satz 3 das Gleichheitszeichen gilt. Im olgenden Abschnitt werden wir eine teilweise Lösung dieses Problems geben.

## 2. *Gleichgewichtige Hypergraphen*

Wir wollen uns nun einer Klasse von Hypergraphen zuwenden, die sich als mathematisch besonders interessant erwiesen hat.

Def. 11: Ein Hypergraph $H = (E, K, I)$ heißt gleichgewichtig, wenn jeder Kreis $(e_1, k_1, \ldots, kq, e_{q+1} = e_1)$ von ungerader Länge eine Kante enthält, die mit mindestens drei Knotenpunkten des Kreises inzidiert.

Satz 4: Ist der Hypergraph $H$ gleichgewichtig, so ist auch der duale Hypergraph $H^*$ gleichgewichtig.

*Beweis:* Wir müssen zeigen, daß $H$ genau dann gleichgewichtig ist, wenn jeder Kreis ungerader Länge einen Knotenpunkt enthält, der mit drei Kanten des Kreises inzidiert.

1. Sei $H$ gleichgewichtig und $\mu = (e_1, k_1, \ldots, k_q, e_{q+1} = e_1)$ ein Kreis von ungerader Länge. Dann gibt es eine Kante $k_i$, die außer mit $e_i$ und $e_{q+1}$ noch mit einem dritten Knotenpunkt $e_j$ des Kreises

inzidiert. $e_j$ inzidiert aber auch mit $k_{j-1}$ und $k_j$. Wegen $j \neq i$ und $j \neq i \neq i+1$ gilt:

$k_{j-1} \neq k_i$ und $k_j \neq k_i$.

2. Sei $\mu = (e_1, k_1, \ldots, k_q, e_{q+1} = e_1)$ ein Kreis ungerader Länge, und es gebe einen Knotenpunkt $e_i$, der außer mit $k_{i-1}$ und $k_i$ noch mit einer dritten Kante $k_j$ des Kreises inzidiert.
Wegen $j \neq i-1$ und $j \neq i$ ist auch $e_i = e_j$ und $e_i \neq e_{j+1}$. $k_j$ inzidiert also mit den drei verschiedenen Knotenpunkten $e_i$, $e_j$ und $e_{j+1}$.

Satz 5: Ist der Hypergraph $H$ gleichgewichtig, so gilt für jeden Teilhypergraphen $H'$ von $H$, daß seine chromatische Zahl $\chi(H') \leqslant 2$ ist.

*Beweis:* Wir machen die Gegenannahme, $H_0 = (E_0, K_0, I_0)$ sei ein Teilhypergraph mit minimaler Zahl von Knotenpunkten, so daß $\chi(H_0) > 2$.
$G$ sei der Graph, der aus allen Knotenpunkten von $H_0$ besteht, und aus allen Kanten von $H_0$, die mit genau zwei Knotenpunkten inzidieren. Wir zeigen zunächst, daß $G$ zusammenhängend ist. Dazu nehmen wir an, es gäbe zwei Knotenpunktmengen $X$ und $Y$ derart, daß

$$X, Y \neq \varnothing\,, \quad E = X \cup Y \text{ und } X \cap Y = \varnothing$$

und daß keine Kante von $G$ ein Element von $X$ mit einem Element von $Y$ verbinde.

Die Unterhypergraphen $H_0(X)$ und $H_0(Y)$ können dann mit zwei Farben zulässig gefärbt werden. Diese Färbung ist aber auch für $H_0$ zulässig. Denn jede Kante von $H_0$, deren Ordnung größer oder gleich zwei ist, inzidiert mit mindestens zwei Knotenpunkten aus $X$ oder aus $Y$. Also muß jede Kante von $H_0$, deren Ordnung größer oder gleich zwei ist, mit zwei verschieden gefärbten Knotenpunkten inzidieren, die beide zu $X$ oder beide zu $Y$ gehören. Da dies ein Widerspruch zur Voraussetzung $\chi(H_0) > 2$ ist, muß $G$ zusammenhängend sein. Da $H$ gleichgewichtig ist, ist $G$ ein paarer Graph. $G$ sei mit zwei Farben zulässig gefärbt. Wegen $\chi(H_0) > 2$ muß es dann in $H_0$ eine Kante $k$

geben, deren Ordnung größer als eins ist, und die nur mit gleichartig gefärbten Knotenpunkten inzidiert. Seien $x$ und $y$ zwei dieser Knotenpunkte. Da $G$ zusammenhängend ist, gibt es in $G$ einen Weg der Form $(x = e_1, k_1, e_2 \ldots, k_{2n}, e_{2r+1} = y)$. Wir können annehmen, daß $x$ und y so gewählt sind, daß kein weiterer Knotenpunkt des Weges mit $k$ inzidiert. Dann ist aber $(e_1, k_1, e_2, \ldots, k_{2n}, e_{2n+1}, k, e_1)$ ein Kreis ungerader Länge in $H_0$, von der Art, daß keine seiner Kanten mit drei Knotenpunkten des Kreises inzidiert, im Widerspruch zur Voraussetzung, daß $H$ — und damit $H_0$ — gleichgewichtig ist.

Satz 6: (L. Lovasz) Hat jeder Teilhypergraph von $H$ eine chromatische Zahl, die kleiner oder gleich zwei ist, so gilt $\tau(H) = \nu(H)$.

*Beweis:* Sei $\tau(H) = t$ und $\mathrm{H}_0 = (E_0, K_0, I_0)$ ein Teilhypergraph von $H$ mit minimaler Kantenzahl, so daß gilt $\tau(H_0) = t$.
Wir wollen zeigen, daß keine zwei Kanten von $H_0$ benachbart sind, und daß somit gilt

$$\nu(H) \leqslant \nu(H_0) = \tau(H_0) = \tau(H).$$

*Gegenannahme:* Der Knotenpunkt $e \in E$ möge mit den Kanten $k_1, k_2 \in K_0$ inzidieren. Für den von $K_i = K_0 - k_i$ erzeugten Unterhyporgraphen $H_i = (E_i, K_i, I_i), = 1{,}2$ existiert eine $(t-1)$-elementige transversale Menge $T_i$. Sei

$$Q = T_1 \cap T_2,\ R_i = T_i - Q \text{ und } S = R_1 \cap R_2 \cup \{e\}.$$

Offenbar gilt $e \notin T_i\ i = 1{,}2$ und daher

$$|S| = |R_1| + |R_2| + 1 = 2\,|R_1| + 1.$$

$H_0(S)$ ist mit zwei Farben zulässig färbbar. Also gibt es zwei disjunkte Teilmengen $S_1, S_2 \subset S$, so daß jede Kante von $H_0(S)$, deren Ordnung größer als eins ist, sowohl mit einem Knotenpunkt der Menge $S_1$, als auch mit einem Knotenpunkt der Menge $S_2$ inzidiert. Eine der beiden Mengen sagen wir es sei $S_1$ — hat höchstens $\left[\frac{|S|}{2}\right] = R_1$ Elemente. Nun ist $S_1 \cup Q$ eine Transversale von $H_0$. Ist nämlich eine Kante $k \in K_0$ nicht inzident mit einem Element der Menge $Q$ und gilt $k \neq k_i$, $i = 1,2$, so inzidiert $k$ sowohl mit einem Knotenpunkt der Menge $R_1$ als auch mit einem der Menge $R_2$. Ist $k = k_1$, so inzidiert $k$ mit $e$ und mit einem Knotenpunkt der Menge $R_2$, ist $k = k_2$, so inzidiert $k$ mit $e$ und einem Element von $R_1$. In jedem Fall gilt also, daß $k$ mit zwei Elementen von $S$ inzidiert und also auch mit einem Element der Menge $S_1$. Nun gilt aber $|S_1 \cup Q| \leqslant |R_1| + |Q| = t - 1$, im Widerspruch zur Voraussetzung $\tau(H_0) = t$.

Als direkte Folgerung aus Satz 5 und Satz 6 erhalten wir

Satz 7: (C. Berge, M. Las Vergnas, G. Schrage)
Ist $H$ ein gleichgewichtiger Hypergraph, so ist die Transversalitätszahl $\tau(H)$ gleich der Anhäufungszahl $\nu(H)$.

Aufgrund der Sätze 2 und 4 ist dieser Satz äquivalent dem folgenden

Satz 8: Ist $H$ ein gleichgewichtiger Hypergraph, so ist die Stabilitätszahl $\alpha(H)$ gleich der Überdeckungszahl $\varrho(H)$.

## 3. *Das Produkt von Hypergraphen*

Seien $H_1 = (E_1, K_1, I_1)$ und $H_2 = (E_2, K_2, I_2)$ zwei Hypergraphen. Das Produkt $H_1 \otimes H_2$ von $H_1$ und $H_2$ ist der Hypergraph $H = (E, K, I)$, für den gilt

1. $E = E_1 \times E_2$,
2. $K = K_1 \times K_2$ und
3. $((e_1, e_2), (k_1, k_2)) \in I \iff (e_1, k_1) \in I_1$ und $(e_2, k_2) \in I_2$

Wie wir in Abschnitt 4 noch sehen werden, spielt in der Informationstheorie folgende Aufgabe eine wichtige Rolle: Sei $H$ ein Hypergraph und $H^q$ sein $p$-faches Produkt. Bestimme $\alpha(H^q)$ für $p = 1, 2, ..$

Satz 9: Für beliebige Hypergraphen $H_1$ und $H_2$ gilt

$$\alpha(H_1 \otimes H_2) \geqslant \alpha(H_1)\, \alpha(H_2).$$

*Beweis:* Sei $S_1$ eine stabile Menge in $H_1$ und $S_2$ eine stabile Menge in $H_2$. Dann ist offenbar $S_1 \times S_2$ eine stabile Menge in

$H = H_1 \otimes H_2$ und somit $\alpha(H_1 \otimes H_2) \geqslant |S_1 \times S_2|$. Sind $S_1$ und $S_2$ von maximaler Ordnung, so gilt $S_1 = \alpha(H_1)$ und $S_2 = \alpha(H_2)$ und daher $|S_1 \times S_2| = \alpha(H_1)\,\alpha(H_2)$.

Satz 10: Es gilt stets die Ungleichung
$\alpha(H_1 \otimes H_2) \leqslant \min\{\alpha(H_1)\,\varrho(H_2),\, \varrho(H_1)\,\alpha(H_2)\}$.

*Beweis:* Für jede Kante $k_1 \in K_1$ gilt $\alpha(H_1(k_1) \otimes H_2) = \alpha(H_2)$. Ist nämlich $S_2$ eine stabile Menge in $H_2$ und $e_1 \in E_1$ mit $(e_1, k_1) \in I_1$, so ist $\{e_1\} \times S_2$ eine stabile Menge in $H_1(k_1) \otimes \otimes H_2$, und somit $a(H_1(k_1) \otimes H_2) \geqslant \alpha(H_2)$. Ist umgekehrt $S = \{(e_1^1, e_2^1), (e_1^2, e_2^2) \ldots\}$ eine stabile Menge in $H_1(k_1) \otimes H_2$, so ist $\{e_2^1, e_2^2, \ldots\}$ eine stabile Menge in $H_2$, also $\alpha(H_1(k_1) \otimes \otimes H_2) \leqslant \alpha(H_2)$. Sei $k_1^1, k_1^2, \ldots, k_1^\varrho$ eine minimale Überdeckung von $H_1$. Dann gilt aufgrund der Konstruktion von $H_1 \otimes H_2$: $\alpha(H_1 \otimes H_2) \leqslant \sum \alpha(H_1(k_i) \otimes H_2) = \varrho(H_1)\,\alpha(H_2)$.

Ebenso zeigt man $\alpha(H_1 \otimes H_2) \leqslant \varrho(H_2)\,\alpha(H_1)$.

Als Folgerung aus Satz 9 und 10 ergibt sich

Satz 11: Ist $\alpha(H_1) = \varrho(H_1)$, und ist $H_2$ ein beliebiger Hypergraph, so gilt $\alpha(H_1 \times H^1) = \alpha(H_1)\,\alpha(H_2)$.

Dieser Satz wurde (in anderer Formulierung) bereits von Shannon [7] angegeben.

## 4. *Anwendungen in der Informationstheorie*

Betrachten wir ein Nachrichtenübertragungssystem, das wir schematisch darstellen können durch einen Sender, einen Übertragungskanal und einen Empfänger.

$$\boxed{\text{Sender}} \longrightarrow \boxed{\text{Übertragungskanal}} \longrightarrow \boxed{\text{Empfänger}}$$

Der Sender verfügt über einen gewissen Zeichenvorrat $Z$, das sogenante Eingangsalphabet, in das die Nachrichten kodiert werden müssen, und ebenso verfügt der Empfänger über einen Zeichenvorrat $Z'$, das sogenannte Ausgangsalphabet. Wenn der Übertragungskanal ohne Störungen arbeitet, so entspricht jedem Zeichen $z \in Z$, welches vom Sender ausgeht, in eineindeutiger Weise ein Zeichen $z' \in Z'$ des Empfängers, und die Nachricht kann fehlerfrei dekodiert werden. Üblicherweise wird der Übertragungskanal aber gewissen

Störungen (dem sogenannten Rauschen) unterliegen. Das hat zur Folge, daß beim Senden eines Zeichens $z \in Z$ in verschiedenen Fällen verschiedene Zeichen beim Empfänger auftreten. Wir können, da die Störungen zufällig erfolgen, nur noch die Wahrscheinlichkeit $w_z(z')$ angeben dafür, daß beim Empfänger das Zeichen $z'$ auftritt, falls das Zeichen $z$ gesendet wurde. Hängt diese Wahrscheinlichkeit nur vom gesendeten Zeichen $z$ ab, so spricht man von einem Kanal ohne Gedächtnis. Ein solcher Kanal wird mathematisch beschrieben durch Angabe des Eingangsalphabets $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_p\}$, des Ausgangsalphabets $Z' = \{z'_1, z'_2, \ldots, z'_q\}$ und der Übergangsmatrix $W = (w_{jk})_{p \times q}$ mit $w_{jk} = w_{z_j}(z'_k)$. Dabei muß gelten $\sum_{k=1}^{b} w_{jk} = 1$. Zu jedem $z \in Z$ betrachten wir die Menge $A_z = \{z', z' \in Z' \text{ und } w_z(z') > 0\}$

Zwei Zeichen heißen unterscheidbar, wenn die diesen Zeichen $z_1, z_2 \in Z$ zugeordneten Mengen des Ausgangsalphabets $A_{z_1}$ und $A_{z_2}$ disjunkt sind. Um eine fehlerfreie Nachrichtenübermittlung zu gewährleisten, ist es erforderlich, bei der Kodierung der Nachricht in das Eingangsalphabet nur solche Zeichen zu benutzen, die paarweise unterscheidbar sind. Man wird sich deshalb für die Aufgabe interessieren, maximale Mengen paarweise unterscheidbarer Zeichen des Senderalphabets zu bestimmen.

Dem hier beschriebenen Nachrichtenübertragungssystem können wir einen Hypergraphen $H = (E, K, I)$ zuordnen, bei dem die Knotenpunkte umkehrbar eindeutig den Zeichen des Eingangsalphabets entsprechen, und bei dem zwei Knotenpunkte genau dann nicht benachbart sind, wenn die entsprechenden Zeichen unterscheidbar sind. Obige Aufgabe ist dann äquivalent zu der Aufgabe, in $H$ eine maximale stabile Menge zu bestimmen. (Um die Eindeutigkeit von $H$ zu sichern, könnte man noch verlangen, daß die Ordnung von $K$ möglichst klein ist. Für unsere Zwecke ist dies jedoch nicht nötig.)

Es ist häufig erforderlich, an Stelle der Übertragung einzelner Zeichen die Übertragung von Blöcken von $m$ aufeinanderfolgenden Zeichen zu betrachten. Eine solche Übertragung durch Blöcke entspricht der einfachen Übertragung in einem wie folgt erweiterten System, das wir als $m$-Kanal bezeichnen wollen: An Stelle der $p$ verschiedenen Eingangsbuchstaben treten die $p^m$ verschiedenen geordneten Kombinationen von Blöcken bestehend aus $m$ Zeichen, und entsprechend treten an Stelle der $q$ Zeichen des Ausgangsalphabets $q^m$ derartige Blöcke. Sei $u = (z_{i1}, z_{i2}, \ldots z_{im})$ ein Zeichen aus dem Eingangsalphabet des $m$-Kanals und $v = (z'_{j1}, z'_{j2}, \ldots z'_{jm})$ ein solches des Ausgangsalphabets, so gilt für die Übertragungswahrscheinlichkeit $w_u(v) = \prod_{k=1}^{m} w_{z_{ik}}(z'_{jk})$.

Wir wollen nun zeigen: Ist der Hypergraph $H = (E, K, I)$ dem einfachen Kanal in der oben beschriebenen Weise zugeordnet, so ist das $m$-fache Produkt $H^m$ in gleicher Weise dem $m$-Kanal zugeordnet. Dabei soll die eineindeutige Zuordnung zwischen den Blöcken des Eingangsalphabets des $m$-Kanals und den Knotenpunkten von $H^m$ dadurch gegeben sein, daß der Block $u = (z_{i1}, z_{i2}, \ldots z_{im})$ dem Knotenpunkt $e = (e_{i1}, e_{i2}, \ldots e_{im})$ genau dann entspricht, wenn das Zeichen $z_{ik}$ des einfachen Kanals dem Knotenpunkt $e_{ik}$ von $H$ entspricht für $k = 1,2, \ldots m$. Zwei Blöcke $u_1 = (z_1^1, z_1^2, \ldots z_1^m)$ und $u_2 = (z_2^1, z_2^2, \ldots z_2^m)$ sind, wie die Übertragungsmatrix zeigt, nämlich genau dann unterscheidbar, wenn ein Index $k$ existiert, so daß $z_1^k$ und $z_2^k$ im einfachen Kanal unterscheidbar sind. Zwei Knotenpunkte $e_1 = (e_1^1, e_1^2, \ldots e_1^m)$ und $e_2 = (e_2^1, e_2^2, \ldots e_2^m)$ des Hypergraphen $H^m$ sind genau dann nichtbenachbart, wenn ein Index $j$ existiert, so daß $e_1^j$ und $e_2^j$ in $H$ nicht benachbart sind. Die Aufgabe, unterscheidbare Blöcke im Eingangsalphabet des $m$-Kanals zu finden, entspricht also der Aufgabe, eine stabile Menge in $H^m$ zu finden.

Wie in Abschnitt 3 gezeigt wurde, gilt stets $\alpha(H^m) \geqslant [\alpha(H)]^m$. Falls der Kanal nicht total gestört ist, d.h. wenn $\alpha(H) > 1$, so kann man also jede beliebige Zahl von unterscheidbaren Blöcken erhalten, wenn man nur die Blocklänge $m$ genügend groß wählt. Und somit ist es möglich, bei genügend großer Blocklänge jede Nachricht fehlerfrei zu übertragen.

Aus Satz 10 folgt die Ungleichung $\alpha(H^m) \leqslant [\varrho(H)]^m$. C. E. Shannon definierte in [7] als fehlerfreie Durchlaßkaparität eines gedächtnislosen Kanals die Zahl $C = \sup_{m \in \mathbf{N}} \frac{1}{m} \log\ \alpha(H^m)$, und in Anlehnung an C. Berge [1] nennen wir die Zahl $\Theta(H) = \sup_{m \in \mathbf{N}} \sqrt[m]{\alpha(H^m)} = e^C$ die Kapazität des Hypergraphen $H$.

Aus den Ungleichungen $\alpha(H^m) \geqslant [\alpha(H)]^m$ und $\alpha(H^m) \leqslant [\varrho(H)]^m$ und der Definition der Zahl $\Theta(H)$ folgt $\alpha(H) \leqslant \Theta(H) \leqslant \varrho(H)$.

Falls der Kanal so beschaffen ist, daß für den zugehörigen Hypergraphen gilt $\alpha(H) = \varrho(H)$, so erhalten wir

$$\Theta(H) = \alpha(H) \quad \text{und} \quad C = \log\ \alpha(H).$$

Das Problem, die fehlerfreie Durchlaßkapazitat eines Kanals zu bestimmen, ist also in diesem Fall auf das Problem reduziert, die Stabilitatszahl des zugeordneten Hypergraphen zu bestimmen.

## LITERATUR


1. BERGE, C.: *Théorie des graphes et ses applications*, Dunod, Paris 1958.

2. BERGE, C.: *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris 1970.

3. LAS VERGNAS, M.: *Sur un theorem du type König pour hypergraphes*. Int. Conf. on Combinatorial Mathematics. Annals New York Ac. of Sc. 175, 32-40, 1970.

4. KÖNIG, D.: *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Leipzig 1936.

5. LOVASZ, L.: *Normal Hypergraphs and the Perfect Graph Conjecture*, Discrete Mathematics 2, 253-267, 1972.

6. SCHRAGE, G.: *Maximale stabile Punktmengen und minimale Überdeckungen gleichgewichtiger Hypergraphen*, Math. Zeitschrift 124 186-190, 1972.

7. SHANNON, C.E.: *The Zero-error Capacity of a Noisy Channal*, Trans. 1956 Symp. Inform. Theory, 8-12.