ÉLÉMENTS SPECTRALEMENT INJECTIFS ET GÉNÉRATEURS UNIVERSELS DANS UNE ALGÈBRE DE TATE

par

ALAIN ESCASSUT

INTRODUCTION

Soit K un corps ultramétrique complet algébriquement clos.

On se propose d'étudier deux notions voisines qui permettent de faire apparaître une K-algèbre A comme algèbre de fonctions définies dans une partie de K. On appelle *générateur universel* d'une K-algèbre A un élément x tel que pour tout $\lambda \in K$, $(x - \lambda)A$ est maximal et de codimension 1 ou bien égal à A. Plus généralement, un élément $y \in A$ est dit spectralement injectif si pour tout $\lambda \in K$, $x - \lambda$ appartient, au plus, à un idéal maximal de codimension 1 unique. On établira brièvement quelques propriétés liées à ces deux notions dans une algèbre quelconque, puis on étudiera les algèbres de Tate de la forme $K\{t\}$ $[y]$ où y est un générateur universel. En particulier on verra que si y est un générateur universel d'une algèbre de Tate réduite A, entière sur $K\{t\}$, alors $A = K\{t\}$ $[y]$ et A est une algèbre de Krasner-Tate. En caractéristique nulle, on verra que les deux notions étudiées sont équivalentes dans une algèbre de Tate et que les éléments analytiques injectifs sur un domaine ultracirconférencié [7] sont bianalytiques.

§.I. ÉLÉMENTS SPECTRALEMENT INJECTIFS ET GÉNÉRATEURS UNIVERSELS

On considère un corps E algébriquement clos. Soit A une E-algèbre commutative unitaire et soit $x \in A$. On notera $s_A(x)$ l'ensemble des $\lambda \in E$ tels que $x - \lambda$ ne soit pas inversible dans A, on notera $\max(A)$ l'ensemble des idéaux maximaux de codimension 1 de A.

DÉFINITION. — Nous dirons que x est un *élément spectralement injectif* de A si pour tout $\lambda \in s_A(x)$, $x - \lambda$ appartient à un seul idéal maximal de codimension 1.

REMARQUES. — On sait que l'ensemble $\Xi(A)$ des homomorphismes de A sur E est en bijection avec $\max(A)$ par l'application $\varphi \to \operatorname{Ker} \varphi$ et l'on voit donc que x est spectralement injectif si et seulement si l'application $\varphi \to \varphi(x)$ est une bijection de $\Xi(A)$ sur $s_A(x)$.

D'autre part, si l'intersection des éléments de max(A) est nulle, alors la transformation de Gelfand $\mathcal{G}_A$ qui, à tout élément $f \in A$ associe la fonction $\hat{f}$ définie sur $\max(A)$ par $\hat{f}(\mathcal{M}) = \varphi_{\mathcal{M}}(f)$ (où $\varphi_{\mathcal{M}}$ est l'homomorphisme de A sur E tel que $\operatorname{Ker}(\varphi) = \mathcal{M}$) est une injection qui permet finalement d'identifier A avec une sous-E-algèbre de E^D en associant à un élément $f \in A$ la fonction $\tilde{f}$ définie sur D par $\tilde{f}(\lambda) = \varphi_\lambda(f)$ où φ_λ est l'unique homomorphisme de A sur E dont le noyau est l'unique idéal maximal de codimensión 1 de A qui contient $x - \lambda$. On pourra donc considérer une algèbre possédant un élément spectralement injectif x comme algèbre de fonction sur le spectre D de x. Inversement, il est clair qu'une algèbre de fonctions sur une partie D de E, à valeur dans E (même si elle est complète), n'admet pas forcément l'application identique comme élément spectralement injectif; par exemple, soit K un corps ultramétrique complet, algebriquement dos et soit $D = \{\lambda \in K, |\lambda| = 1\}$ et x l'application identique sur D. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe des fonctions continues sur D, f_n telles que $f_n^n = x$. Alors l'algèbre de Banach A complétée de $K[x, \frac{1}{x}, f_2, \ldots, f_n, \ldots]$ pour la norme de la convergence uniforme sur D est une algèbre de fonctions continues sur D qui n'admet pas d'élément spectralement injectif.

On commencera par étudier quelques propriétés d'intégrité et d'intégralité pour les algèbres possédant un élément spectralement injectif.

LEMME I.1. — *Soit E un corps algébriquement clos de caractéristique p et soit B une E-algèbre dont tout idéal maximal est de codimension* 1. *On suppose que B possède un élément spectralement injectif x. Soit A une sous-E-algèbre de B contenant x et telle que B soit une extension entiere de A. Alors x est un élément spectralement injectif de A; de plus, l'application $\mathcal{M} \to \mathcal{M} \cap A$ de* $\max(B)$ *sur* $\max(A)$ *est une bi-*

jection. Enfin, supposons que A est intégralement close, que B est intègre et que l'intersection des idéaux maximaux de A est nulle. Alors si $p = 0$, on a $B = A$; si $p \neq 0$, le polynôme minimal $P(X)$ d'un élément $y \in B$ est de la forme $X^{p^r} - f (f \in B)$.

PREUVE. — Il est immédiat de voir que x est un élément spectralement injectif de A et que l'application $\mathcal{M} \to \mathcal{M} \cap A$ est une bijection de $\max(B)$ sur $\max(A)$. Supposons maintenant B intègre et A intégralement close, avec un radical de Jacobson nul. Soit $y \in B - A$, soit $P(X) = X^n + f_{n-1} X^{n-1} + \dots + f_0$ son polynôme minimal sur A et soit φ un homomorphisme de A sur E. Soit $A' = A[y]$; alors x est un élément spectralement injectif de A' et φ admet donc un relèvement unique $\bar{\varphi}$ de A' sur E. Par suite, le polynôme $X^n + \varphi(f_{n-1}) X^{n-1} + \dots$ $\dots + \varphi(f_0)$ a toutes ses racines confondues et il est de la forme $(X - \alpha)^n$ où $\alpha^n = \varphi(f_0)$ d'où $\binom{n}{i} \alpha^i = \varphi(f_i)$ $l \leq i \leq n - l$. Alors si $p = 0$, on a $\alpha = \varphi(f_{n-1}) \dfrac{1}{n}$ et par suite, comme le radical de Jacobson de A est nul, on voit que $f_i = \binom{n}{i} (f_{n-1}/n)^i$, d'où $n = l$ et $B = A$. De même, lorsque $p \neq 0$, on en déduit que P est de la forme $X^{p^r} - f_0$.

On va maintenant établir un résultat d'intégrité pour les algèbres possédant un élément spectralement injectif. On utilisera la notation suivante.

NOTATION. — Soit D une partie de E et soit A une E-algèbre unitaire de fonctions définies sur D à valeur dans E. Pour tout $f \in A$, on notera $Z(f)$ l'ensemble des zéros de f. De plus, si I est un idéal de A, on notera $Z(I) = \bigcap_{f \in I} Z(f)$.

REMARQUE. — Si A contient l'application identique sur D, alors la bijection Φ de D sur $\max(A)$ est définie par $\Phi(a) = \mathfrak{J}(\{a\})$.

PROPOSITION I.2. — *Soit A une E-algèbre commutative unitaire nœthérienne sans idempotent non trivial, dont le radical de Jacobson est nul, dont tout idéal maximal est principal et de codimension* 1, *et qui possède un élément spectralement injectif x. Alors A est principale. Soit B une extension entière de A dont tout idéal maximal est de codimension* 1 *et dont le radical de Jacobson est nul, admettant x pour élément spectralement injectif. Alors B est intègre.*

Preuve. — Montrons d'abord que A est intègre, ce qui implique qu'elle est principale. Soit $D = s_A(x)$ et considérons A comme une sous-E-algèbre de E^D. Nous allons établir que pour tout $f \in \underset{\neq}{A}$, $Z(f)$ est fini.

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des $Z(f), f \in A$. Puisque A est nœthérienne, il est clair que $\mathcal{E}$ n'admet pas de suite strictement décroissante pour l'inclusion. En effet, s'il existait une telle suite D_n strictement décroissante de $\mathcal{E}$ alors la suite des idéaux $\mathcal{J}(D_n)$ des éléments $f \in A$ tels que $Z(f) \supset D_n$ serait une suite strictement croissante puisque, par définition, il existe une suite $f_n \in A$ telle que $Z(f) = D_n$.

Soit $\mathcal{E}'$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{E}$ qui contiennent une infinité de points de D, soit D_0 un élément de $\mathcal{E}'$, minimal dans $\mathcal{E}'$ pour l'inclusion, et soit $f_0 \in A$ tel que $Z(f_0) = D_0$.

Soit $\alpha \in D_0$, et soit y_α le générateur de l'idéal maximal des $g \in A$ tels que $g(\alpha) = 0$. Alors il existe $f_1 \in A$ tel que $f = y_\alpha f_1$; or $y_\alpha(\lambda) \neq 0$ pour tour $\lambda \neq \alpha$ implique $f_1(\lambda) = 0$ pour tout $\underset{\neq \alpha}{\lambda \in D_0}$ de sorte que $Z(f_1) \in \mathcal{E}'$ et comme $Z(f_1) \subset D_0$ par hypothèse, on a $Z(f_1) = D_0$. On en déduit par récurrence une suite f_n de A telle que $Z(f_n) = D_0$ et $f_n = y_\alpha f_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$. Alors comme A est nœthérienne, il existe un rang q tel que $f_q A = f_{q+1} A$ et il existe $h_\alpha \in A$ tel que $f_q[1 - - y_\alpha h_\alpha] = 0$ et $f[1 - y_\alpha h_\alpha] = 0$. On a donc $Z(f[1 - y_\alpha h_\alpha]) = D$, d'où $Z(1 - y_\alpha h_\alpha) \supset D - D_0$, et évidemment $\alpha \notin Z(1 - y_\alpha h_\alpha)$. Soit $D_1 = D - D_0$, et soit $J = \mathcal{J}(D_1)$. A priori, $Z(J) \supset D_1$, mais $\alpha \notin Z(J)$ et le raisonnement ci-dessus est vrai pour tout $a \in D_0$, d'où $Z(J) = D_1$. Notons $\mathrm{I} = \mathcal{J}(D_0)$; puisque $Z(f_0) = D_0$, on a évidemment $Z(I) = D_0$ et on voit que $Z(I + J) = D_1 \cap D_0 = \varnothing$. Or, puisque tout idéal maximal $\mathcal{M}$ de A est de codimension 1, et que x est un élément spectralement injectif, on sait que l'application $a \to \mathcal{J}(\{a\})$ est une bijection de D sur l'ensemble $\max(A)$ des idéaux maximaux de A. On voit donc que $Z(\mathcal{M}) \neq \varnothing$, ce qui prouve que $I + J = A$. Alors on sait que $\dfrac{A}{I \cdot J} \simeq \dfrac{A}{I} \times \dfrac{A}{J}$. Mais $I \cdot J = 0$, donc $\dfrac{A}{I} \times \dfrac{A}{J} \simeq A$. Or A n'admet pas d'idempotent autre que 0 et 1. Donc I ou J $= \{0\}$, et comme D_0 n'est pas vide, on doit avoir $I \neq \{0\}$, donc $J = 0$ et $I = A$, d'où $D_0 = D$ et comme l'intersection des idéaux maximaux de codimension 1 est nulle on voit que $f_0 = 0$. On a donc montré que seul $Z(0)$ est infini.

On en déduit que A est intègre car si $fg = 0$, ona $Z(f) \cup Z(g) = D$ et $Z(f)$ ou $Z(g)$ est infini, donc f ou $g = 0$. Alors A est principale de façon évidente.

B est une sous-E-algèbre de E^D; supposons B *non intègre;* alors il existe $\underset{\neq 0}{y \in B}$ tel que $Z(y)$ soit infini. Soit I l'idéal des polynômes $P(Y) \in A[Y]$ tels que $P(y) = 0$; alors $I \subset YA[Y]$ car pour tout $P(Y) = \sum_{i=0}^{n} a_i Y^i \in I$ on a $\psi(a_0) = 0$ pour tout homomorphisme ψ de B sur E tel que $\psi(y) = 0$ et par suite $Z(a_0)$ est infini, donc $a_0 = 0$. On en déduit que pour tout homomorphisme φ de A sur E, l'unique relèvement $\bar{\varphi}$ de B sur E satisfait $\bar{\varphi}(y) = 0$ et par suite $y = 0$ puisque le radical de Jacobson de B est nul. Donc B est intègre, ce qui achève la demonstration.

Nous désignerons désormais par K un corps ultramétrique complet algébriquement clos.

Rappelons brièvement que si D est un fermé borné infini de K, on appelle *algèbre de Krasner* $H(D)$ [1] l'algèbre de Banach complétée pour la norme $\|.\|_D$ de la convergence uniforme sur D de l'algèbre $K(D)$ des fractions rationnelles sans pôle dans D. (Cette définition admet une généralisation concernant des algèbres non normées dont nous n'aurons pas ici l'utilisation.) On sait, grâce aux résultats de [1], [2], que si D est un ouvert fermé borné infini de K, alors l'application identique x sur D est telle que, pour tout $a \in D$, $(x - a)\, H(D)$ soit un idéal maximal de codimension 1 de $H(D)$. Cette remarque nous incite à considérer en particulier cette propriété en lui attribuant un nom.

DÉFINITION. — Soit E un corps algébriquement clos et soit A une E-algèbre commutative. On appellera *générateur universel* de A un élément $y \in A$ tel que pour tout $\alpha \in K$, ou bien $y - \alpha$ est inversible dans A, ou bien $y - \alpha$ engendre un idéal maximal de codimension 1 de A.

REMARQUE 1. — Par définition, on voit que tout générateur universel de A est un élément spectralement injectif.

REMARQUE 2. — Si y est un générateur universel de A, alors $\lambda y + \mu$ est aussi un générateur universel de A quels que soient λ et $\mu \in K$ $(\lambda \neq 0)$. On voit donc que si A admet un générateur universel y, alors

A possède un générateur universel non inversible: il suffit de considérer $a \in s_A(y)$ et $x = y - a$.

Si D est un ouvert fermé borné de K, on voit donc que l'algèbre de Krasner $H(D)$ admet l'application identique sur D pour générateur universel [2].

Avant d'étudier plus en détail les générateurs universels d'une telle algèbre $H(D)$, remarquons également que si O est un ouvert de $\mathbf{C}$, alors l'algèbre des fonctions holomorphes sur O admet l'application identique sur O comme générateur universel; si $T \in K(X)$ l'algèbre de type fini $K[T, X]$ admet X comme générateur universel. Les résultats classiques d'analyse ultramétrique [2, 3, 4, 5, 6] permettent de caractériser facilement les générateurs universels d'une algèbre de Krasner.

THÉORÈME I.2. *Soit une algèbre de Banach $H(D)$ sans idempotent différent de* 0 *et* 1.

i) *L'application identique sur D est un générateur universel si et seulement si D est ouvert.*

ii) *Si D est ouvert et sans filtre circulaire distingué, un élément de $H(D)$ est spectralement injectif, si et seulement si c'est une fonction injective sur D.*

iii) *Si la caractéristique de K est nulle et si D est ouvert et sans filtre circulaire distingué, alors un élément de $H(D)$ est un générateur universel si et seulement si c'est une fonction injective sur D.*

§. II. — Générateurs universels dans une algèbre de Tate

Rappelons brièvement la définition d'une K-algèbre topologiquement de type fini [12]. On appelle *extension topologiquement pure de K* de degré n l'algèbre $K\{X_1,...,X_n\}$ des séries formelles restreintes à n indéterminées, $f(X_1, ..., X_n) = \sum_{(i_1,...,i_n)} a_{i_1,...,i_n} X_1^{i_1} ... X_n^{i_n}$ munie de la norme d'algèbre de Banach ultramétrique $\| . \|_C$ que l'on nommera *norme canonique* définie par:

$$\| f(X_1, ..., X_n) \|_C = \sup_{(i_1,...,i_n)} |a_{i_1,...,i_n}|.$$

Les idéaux des extensions topologiquement pures sont fermés et l'on appelle *K-algèbre topologiquement de type fini* l'algèbre de Banach quotient d'une extension topologiquement pure par un de ses idéaux [17]. On sait encore, grâce à [17], qu'une K-algèbre topologiquement de type fini A est isomorphe à une extension entière finie d'une extension topologiquement pure E de K. Le degré de E sur K est appelé *le degré* de A sur K.

REMARQUE. — Il est immédiat de voir qu'une K-algèbre topologiquement de type fini possédant un élément spectralement injectif est de degré < 2.

On avait étudié au chapitre I les générateurs universels d'une algèbre de Krasner; on va maintenant étudier ceux d'une algèbre topologiquement de type fini de la forme $K\{t\}[y]$.

Rappelons que l'on nomme *algèbre de Krasner-Tate* une K-algèbre de Banach ultramétrique isomorphe à la fois à une algèbre de Krasner $H(D)$ (où D est infini) et à une algèbre topologiquement de type fini [7]. Alors il résulte des théorèmes V. 3 et V. 4 de [7] qu'une K-algèbre topologiquement de type fini est une algèbre de Krasner-Tate si et seulement si c'est une algèbre réduite de la forme $K\{t\}[x]$ où x est un générateur universel satisfaisant une relation $P(x) - tQ(x) = 0$ où P et Q sont deux polynômes de $K[X]$ premiers entre eux, tels que $deg(P) > deg(Q)$.

Nous verrons qu'en fait l'existence d'un générateur universel dans une K-algèbre topologiquement de type fini réduite est caractéristique d'une algèbre de Krasner-Tate. Nous commencerons par caractériser les générateurs universels y d'une algèbre de Tate de la forme $K\{t\}[y]$. Notons d'abord le lemme II.1. immédiat.

LEMME II.1. — *Soit E un corps algébriquement clos et soit A une E algèbre principale, dont les idéaux maximaux sont de codimension* 1. *Soit une extension entière et intègre de la forme $A[y]$ et soit $X^n + f_{n-1} X^{n-1} + \ldots + f_0$ le polynôme minimal de y sur A. Alors $y\,A[y]$ est un idéal maximal de $A[y]$ si et seulement si f_0 est un élément premier de A.*

On notera $\mathsf{U} = \{\lambda \in K \mid |\lambda| \leqslant 1\}$.

PROPOSITION II.2. — *Soit A une K-algèbre topologiquement de type fini intègre de la forme $K\{t\}[y]$ où $K\{t\}$ est une extension topologiquement pure de degré* 1 *de K dont la norme canonique est notée $\|\cdot\|$ et où y est un élément entier sur $K\{t\}$. Soit $F(t, X) = \sum_{i=0}^{n} f_i(t)\, X^i \in K\{t\}[X]$*

($f_n = 1$) *le polynôme minimal de* y *sur* $K\{t\}$. *Soit* $f_i(t) = a_i + b_i t + t^2 \varepsilon_i(t)$ *où* $\varepsilon_i(t) \in K\{t\}$ $(0 \leq i \geq n-1)$. *Soit* $P(X) = \sum_{i=0} a_i X^i$, *et soit* $Q(X) = -\sum_{i=0}^{n-1} b_i X^i$. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes*:

i) y *est un générateur universel:*

ii) $\sum_{i=0}^{n} \lambda^i f_i$ *est un élément premier ou inversible de* $K\{t\}$ *quel que soit* $\lambda \in K$;

iii) *max* $(|P(\lambda)|, |Q(\lambda)|) > \|\sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i \varepsilon_i(t)\|$ *quel que soit* $\lambda \in K$;

iv) *quel que soit* $\lambda \in s_A(y)$ *on a* $|Q(\lambda)| > \|\sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i \varepsilon_i(t)\|$ *et* $|Q(\lambda)| \geq |P(\lambda)|$.

Enfin supposons les conditions i) ii) iii) iv) *réalisées ainsi que* $\|F\| = 1$. *Soit* Ω *l'en semble des* $(\mu, \lambda) \in U \times U$ *tels que* $F(\mu, \lambda) = 0$ *et* Ω' *l'ensemble des* (μ, λ) *tels que* $P(\lambda) - \mu Q(\lambda) = 0$ *et soit* π l'*application* $(\mu, \lambda) \to \lambda$. *Alors on a* $\pi(\Omega') = \pi(\Omega) = s_A(y) = \{\lambda \in K \mid |P(\lambda)| \leq |Q(\lambda)|\}$.

Preuve. — Pour tout $\lambda \in K$, soit $F_\lambda(X) = X^n + f_{n-1,\lambda}(t) X^{n-1} + \ldots + f_{0,\lambda}(t) \in K\{t\}[X]$ le polynôme minimal de $y - \lambda$ sur $K\{t\}$. Il est immédiat de voir que $f_{0,\lambda}(t) = F(t, \lambda) = \sum_{i=0}^{n} \lambda^i f_i(t)$. L'équivalence entre les assertions i) et ii) est donc immédiate d'après le lemme II.1., puisque $K\{t\}$ est principale. Alors on montre, pour achever la démonstration de la proposition II.2., que les assertions iii) et iv) sont équivalentes à l'assertion ii). En effet, d'après les résultats bien connus [7] concernant l'algèbre de Krasner $H(U)$ isomorphe à $K\{t\}$, on sait que l'élément $F(t, \lambda) = P(\lambda) - tQ(\lambda) + t^2 \varepsilon(t, \lambda)$ (où $\varepsilon(t, \lambda) = \sum_{i=0}^{n} \lambda^i \varepsilon_i(t)$) est inversible dans $K\{t\}$ si et seulement si l'élément analytique sur U ($x \to F(x, \lambda)$ ne s'annule pas, c'est-à-dire si $|P(\lambda)| > max(|Q(\lambda)|, \|\varepsilon(t, \lambda)\|)$. De même, $F(t, \lambda)$ est premier dans $K\{t\}$ si et seulement si le nombre de ses zéros dans U (comptés avec leur ordre de multiplicité) est égal à 1, c'est-à-dire si on a $|Q(\lambda)| \geq |P(\lambda)|$ et $|Q(\lambda)| < \|\varepsilon(t, \lambda)\|$. On voit donc que l'assertion iii) peut encore s'exprimer de la façon suivante: pour tout $\lambda \in s_A(y)$ on a $|Q(\lambda)| \geq |P(\lambda)|$ et $|Q(\lambda)| > \|\varepsilon(t, \lambda)\|$, ce qui prouve l'équivalence des assertions iii) et iv).

Enfin supposons ces conditions réalisées ainsi que $||F|| = 1$. Il est clair que $\lambda \in s_A(y)$ si et seulement s'il existe un homomorphisme φ de A sur K tel que $\varphi(y) = \lambda$, c'est-à-dire s'il existe $\mu \in U$ tel que $F(\mu, \lambda) = 0$ de sorte que $s_A(y) = \pi(\Omega)$. D'autre part il est immédiat de voir que $\pi(\Omega') = \{\lambda | |P(\lambda)| \leq |Q(\lambda)|\}$. Par suite, d'après iv), on a $\pi(\Omega) \subset \pi(\Omega')$. Réciproquement, soit (μ, λ) tel que $|P(\lambda)| < |Q(\lambda)|$: alors on a $|P(\lambda)| > ||\sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i \varepsilon_i(t)||$ et par suite $F(t, \lambda)$ est inversible, donc $\lambda \notin \pi(\Omega)$. On voit donc que $\pi(\Omega) = \pi(\Omega')$.

Le théorème II.3. apporte une réponse affirmative, dans le cas très particulier d'un générateur universel, au problème fondamental suivant. Soit $F(T, X)$ un polynôme unitaire de $K\{T\}[X]$. Quel polynôme $G(T, X) \in K[T, X]$ satisfait

$$\frac{K\{T, X\}}{F(T, X)\, K\{T, X\}} \simeq \frac{K\{T, X\}}{G(T, X)\, K\{T, X\}} \ ?$$

THÉORÈME II.3. — *Soit A une K-algèbre topologiquement de type fini intègre de la forme $K\{t\}[y]$ où $K\{t\}$ est une extension topologiquement pure de K et où y est un générateur universel de A. Supposons en outre que le polynôme minimal $F(X)$ de y sur $K\{t\}$ satisfait la relation $||F|| = 1$ pour la norme canonique $||\cdot||$ de l'anneau de polynôme $K\{t\}[X]$.*

Soit $F(X) = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + b_i t + t^2 \varepsilon_i(t)) X^i$*; soit* $P(X) = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$ *et soit* $Q(X) = -\sum_{i=0}^{n-1} b_i X^i$ *et soit* $D = s_A(y)$. *Alors on a*

$$A \simeq \frac{(P(X) - T\, Q(X))\, K\{T, X\}}{K\{T, X\}} \simeq H(D)$$

PREUVE. — Rappelons que puisque A est réduite on peut considérer que la norme de A est sa norme spectrale $||\cdot||_s$ ([11], III, th. 2).

On voit, grâce à la relation iv) de la proposition II.2. que le polynôme Q n'admet aucune racine dans D et la fraction $\frac{P}{Q}$ appartient donc à $K(D)$. Alors $Q(y)$ n'appartient à aucun idéal maximal de A car si un homomorphisme χ de A sur K était tel que $\chi(Q(y)) = 0$, on aurait $Q(\chi(y)) = 0$ et $\chi(y) \in D$. Donc $Q(y)$ est inversible dans A;

soit $\tau = \dfrac{Q(y)}{P(y)} \in A$. On sait que la norme canonique de l'extension topologiquement pure $K\{t\}$ est induite par $\|\cdot\|_s$. Pour tout $\alpha \in D$, on a $\dfrac{\sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i \varepsilon_i(t)}{Q(\alpha)} \in K\{t\}$ et grâce aux relations iii) et iv) de la proposition II.2., on a:

$$\text{(I)} \qquad \left\| \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i \varepsilon_i(t)}{Q(\alpha)} \right\|_s < 1 \text{ quel que soit } \alpha \in D.$$

Soit $f_\alpha(T) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n-1} \alpha^i \varepsilon_i(T)}{Q(\alpha)} \in K\{T\}$ où $K\{T\}$ est une extension topologiquement pure de degré 1 de K et soit $f(T) = \dfrac{\sum_{i=0}^{n-1} y^i \varepsilon_i(T)}{Q(y)}$; alors $f(T)$ est de la forme $\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m T^m$ $(\lambda_m \in A)$ et tel que $\sup \|\lambda_m\|_s < 1$ grâce à (I).

Soit B l'adhérence de $K[\tau, y]$ dans A munie de la norme induite par celle de A: alors il est clair que $Q(y)$ est inversible dans B et que chaque coefficient λ_m appartient à B. Soit $B\{T\}$ une extension topologiquement pure de l'algèbre normée $(B, \|\cdot\|_s)$; alors on voit que la norme canonique de f dans $B\{T\}$ est $(\sup_{m \in N} \|\lambda_m\|)$ et on déduit que $t = \tau + f(t)$ appartient à B.
D'autre part comme on a $\|t - \tau\|_s < 1$, il est clair que l'adhérence de $K[\tau]$ dans A est une extension topologiquement pure de K de degré 1 de $K\{\tau\}$. Alors $K\{\tau\}[y]$ est fermé dans A, de sorte que $B = K\{\tau\}[y]$ et que $K\{\tau\}[y] \subset B$, donc $A = B$. Alors A est un quotient de l'algèbre de Krasner-Tate $A' = \dfrac{K\{T, X\}}{(P(X) - TQ(X))\, K\{T, X\}}$ qui est elle-même isomorphe à l'algèbre de Krasner $H(\Lambda)$ où $\Lambda = \{\lambda \in K \mid |P(\lambda)| \leq |Q(\lambda)|\}$ ([7]). Mais, d'près la fin de la proposition II.2., on a $D = \Lambda$. Or, comme A est intègre ([7]), D est infraconnexe de sorte que A est un quotient intègre de $H(D)$ et par suite $A = H(D)$ d'après [7].

§. III. Caractérisation des algèbres de Krasner-Tate

Dans toute la suite, on notera p la caractéristique de K.

On va montrer, lorsque $p = 0$, l'équivalence des notions de générateur universel et d'élément spectralement injectif dans une algèbre de Tate, puis on en déduira une caractérisation des algèbres de Krasner-Tate.

PROPOSITION III.1. — *Soit A une K-algèbre topologiquement de type fini réduite et sans idempotent différent de* 0 *et* 1 *de la forme $K\{T\}[x]$ où x est un élément spectralement injectif de A entier sur l'extension topologiquement pure $K\{T\}$. Alors A est intègre.*

Preuve. — On utilise seulement des procédés de géométrie algébrique élémentaire.

En écrivant A sous la forme $\dfrac{K\{T, X\}}{I}$ on établit que I est principal en considérant une famille de générateurs et leurs décompositions en facteurs premiers ([16]) et les domaines d'annulation de ces derniers. Enfin on montre que I est premier en établissant que ces domaines d'annulations sont deux à deux disjoints.

A l'aide de la proposition III.1., on peut maintenant étudier à quelle condition un élément spectralement injectif x n'est pas générateur universel dans le cas particulier d'une algèbre $K\{t\}[x]$.

PROPOSITION III.2. — *Soit A une K-algèbre topologiquement de type fini intègre de la forme $K\{T\}[x]$ où x est un élément spectralement injectif dont le polynôme minimal sur $K\{T\}$ s'écrit $F(T, X) \in K\{T\}[X]$. Alors si x n'est pas un générateur universel de A, on a $p \neq 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial T} =$ $= 0$, et il existe $r \in \mathbf{N}$ tel que $K\{T^{p^r}\}[x]$ soit une algèbre de Krasner-Tate admettant x pour générateur universel.*

Preuve. — Puisque x n'est pas un générateur universel, on sait, grâce à la proposition II.2. qu'il existe $\lambda_0 \in K$ tel que $f_{\lambda_0, 0} = F(T, \lambda_0)$ ne soit ni inversible ni premier dans $K\{T\}$. Alors nous allons en déduire qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta$, $f_{\lambda, 0} = F(T, \lambda)$ ne soit ni premier ni inversible dans $K\{T\}$. En effet, on sait qu'un élément $\sum_{j=0}^{\infty} a_j T^j \in K\{T\}$ n'est ni inversible ni premier dans $K\{T\}$

si et seulement s'il existe $q \geq 2$ tel que $|a_q| \geq |a_j|$ pour tout $j < q$. Ecrivons $f_{\lambda,0} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{\lambda,j} T^j$: il existe donc $q \geq 2$ tel que $|a_{\lambda_0,q}| \geq \geq |a_{\lambda_0,j}|$ pour tout $j < q$. Notons $\|\cdot\|$ la norme canonique de $K\{T\}$ et soit $\delta \in \left]0, \frac{|a_{\lambda_0,q}|}{|\lambda_0| \sup_{0 \leq i \leq n} \|f_i\|}\right[$; alors il est immédiat de voir que pour tout $j \leq 2$ on a $|a_{\lambda,j}| < |a_{\lambda_0,q}| = |a_{\lambda,q}|$ pour tout $\lambda \in K$ tel que $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta$. Donc $f_{\lambda,0}$ n'est ni inversible ni premier pour $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta$. Par suite, l'unique zéro $\alpha(\lambda)$ de $\sum_{i=0}^{n} \lambda^i f_i$ est multiple quel que soit $\lambda \in K$ tel que $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta$ et l'on a donc $\sum_{i=0}^{n} \lambda^i f_i'(\alpha(\lambda)) = 0$. Pour tout $\lambda \in K$ tel que $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta$, soit φ_λ l'unique homomorphisme de A sur K tel que $\varphi_\lambda(x) = \lambda$; on a $\varphi_\lambda(T) = \alpha(\lambda)$ et par conséquent $\varphi_\lambda \sum_{i=0}^{n} x^i f_i') = 0$, ce qui peut encore s'écrire: $\varphi_\lambda\left(\frac{\partial F}{\partial T}(T, x)\right) = 0$ pour tout λ tel que $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta$. Pour tout $f(T,X) \in K\{T, X\}$, notons $\Delta(f)$ l'ensemble des idéaux maximaux qui contiennent f. Alors on voit que $\Delta(F) \cap \Delta\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)$ contient l'ensemble des $(\lambda, \alpha(\lambda))$ tels que $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta$ et par suite, cet ensemble est infini.

Alors il est clair que l'idéal $I = F(T, X)\, K\{T, X\} + \frac{\partial F}{\partial T}(T, X)\, K\{T, X\}$ est inclus dans idéal premier $\mathfrak{p}$ non maximal de $K\{T, X\}$. Mais comme par hypothèse A est intègre, l'edéal $\mathfrak{q} = F(T, X)\, K\{T, X\}$ est premier, ce qui montre que $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} = I$ car $\mathfrak{q} \neq 0$ et on sait que la hauteur de $\mathfrak{p}$ est égale à 1, donc $\frac{\partial F}{\partial T}$ est multiple de F et comme c'est un polynôme en X de degré $\leq n - 1$, on en déduit que $\frac{\partial F}{\partial T} = 0$ en se ramenant au cas où $\|F\| = 1$.

Alors chaque f_i est de la forme $\sum a_{i,p} T^p$, de sorte qu'il existe $g_i \in K\{T\}$ tel que $(g_i)^p = f_i$ et par suite $F(T, x)$ est de la forme $F_1(T_1, x)$ où $T_1 = T^p$ et où $F_1(T_1, x) \in K\{T_1\}[x]$. Alors de même, x est élément spectralement injectif de $K\{T_1\}[x]$ (lemme I. 1) et si x n'est pas générateur universel on a $\frac{\partial F_1}{\partial T_1} = 0$. Comme $F \neq 0$, on voit, en itérant, qu'il existe naturellement une puissance r de p telle que, si $T_r = T^{p^r}$, on ait $F(T, x) = F_r(T_r, x) \in K\{T_r\}[x]$ et $\dfrac{\partial F}{\partial T} \neq 0$, de sorte que x est générateur universel de l'algèbre $K\{T_r\}[x]$ et par suite cette algèbre est une algèbre de Krasner-Tate d'après le théorème II. 3.

NOTATION. — Soit A un anneau intègre de caractéristique $p \neq 0$, soit F son corps de fractions et pour tout entier $r \in \mathbf{N}$ soit F_r l'unique extension de F de degré p^r. Pour tout élément $x \in A$ on notera $\sqrt[p^r]{x}$ l'unique élément $x' \in F_r$ tel que $(x')^{p^r} = x$.

REMARQUE. — Si x est un élément spectralement injectif d'une algèbre A sur un corps algébriquement clos de caractéristique $p \neq 0$, alors x^{p^q} est aussi spectralement injectif. De même, si $\sqrt[p^q]{x} \in A$, $\sqrt[p^q]{x}$ est encore spectralement injectif.

Le théorème de la décomposition Mittag-Lefflerienne pour un élément analytique sur un infraconnexe [9, 15] permet d'obtenir le lemme III. 3. utile pour conclure.

LEMME III.3. — *On suppose $p \neq 0$. Soit D un infraconnexe fermé borné de K. Alors pour toute solution $f \in H(D)$ de l'équation différentielle $Y' = 0$ il existe $g \in H(D)$, unique, tel que $f = g^p$.*

Nous obtenons enfin une première conclusion qui permet d'ailleurs de caractériser les algèbres de Krasner-Tate parmi les algèbres de Tate.

THÉORÈME III.4. — *Soit A une K-algèbre topologiquement de type fini différente de K^n, réduite admettant un générateur universel x; soit $K\{t\}$ une extension topologiquement pure de degré 1 telle que A soit une extension entière finie de $K\{t\}$ et soit $D = s_A(x)$. Alors A est une algèbre de Krasner-Tate égale à $K\{t\}[x]$ et isomorphe à $H(D)$.*

PREUVE. — Il est immédiat de se ramener au cas où A est sans idempotent non trivial, et où par suite A est intègre d'après la proposition I.2. Considérons la sous-algèbre de Krasner-Tate B qui admet x pour application identique et supposons $B \neq A$. Alors on a $p \neq 0$. Soit $y \in B - A$; y est donc de la forme $\sqrt[p^r]{f}$ (lemme I. 1) et comme x est générateur universel de A et (trivialement) de B, $y - y(a)$ est multiple de $x - \alpha$ pour tout $\alpha \in D$, donc $f - f(\alpha)$ est multiple de de $(x - \alpha)^{p^r}$ d'où l'on déduit que $\dfrac{df}{dx} = 0$ et par récurrence, à l'aide du lemme III. 3, que f est une puissance p^r-ième d'un élément de B, donc que $y \in B$ et $A = B$.

Le théorème III.4. peut s'interpréter de façon inattendue en terme de représentation conforme de la façon suivante. Rappelons qu'un élément f analytique et injectif sur une partie D de K est dit *bianalytique* si l'application réciproque f^{-1} de $f(D)$ sur D est un élément analytique sur $f(D)$. Les éléments bianalytiques ont été étudiés par E. Motzkin [12]; le théorème que nous allons énoncer découle également de la démonstration du théorème 4 de [12].

Rappelons qu'un fermé borné de K est dit *ultracirconférencié* si c'est une réunion finie d'ensembles de la forme $d(a, r) \cap (\bigcap \complement d^-(a_i, r_i))$ où r et r_i $(l \leq i \leq n)$ appartiennent au groupe des valeurs de K et où l'on note $d(\alpha, \varrho)$ $(\alpha \in K, \varrho \in \mathbf{R})$, l'ensemble $\{x \in K \mid |x - \alpha| \leq \varrho\}$ et $d^-(\alpha, \varrho) = \{x \in K \mid |x - \alpha| < \varrho\}$.

THÉORÈME III.5. — *On suppose $p = 0$. Alors tout élément analytique injectif sur un ultracironférencié de K est bianalytique.*

PREUVE. — Soit $f \in H(D)$ injectif. Alors f est un générateur universel de $H(D)$ d'après la proposition I.3. Or $H(D)$ est isomorphe à une algèbre de Krasner-Tate [7] et par suite c'est une extension entière finie d'une extension topologiquement pure $K\{t\}$. Or, grâce au théorème III.4., on a $A = K\{t\}[f]$, de sorte que A est aussi isomorphe $H(f(D))$. Alors l'homomorphisme Φ de $H(f(D))$ dans $H(D)$: $h \to h \circ f$ est un isomorphisme et par suite $f^{-1} \in H(f(D))$ ([2]).

Nous allons maintenant étudier la clôture intégrale d'une algèbre de Tate possédant un élément spectralement injectif.

THÉORÈME III.6. — *Soit A une K-algèbre topologiquement de type fini intègre et différente de K, possédant un élément spectralement injectif X. Alors la clôture intégrale A' de A est une algèbre de Krasner-Tate; de plus il existe un entier $r \geq 0$ tel que $A' = A[\sqrt[p^r]{X}]$ et $\sqrt[p^r]{X}$ est un générateur universel de A'.*

PREUVE. — Soit une extension topologiquement pure $K\{t\}$ telle que A soit entier sur $K\{t\}$. Alors on sait qu'il existe un plus petit entier $q \geq 0$ tel que $K\{t^{p^q}\}[x]$ soit une algèbre de Krasner-Tate que nous noterons B. Pour tout $y \in A$, y est de la forme $\sqrt[p^n]{f}$ où $f \in B$, et comme A est finie sur $K\{t\}$ donc sur B, on notera r le plus grand des entiers n tels que $\sqrt[p^n]{f} \in A$, $f \in B$ et $\sqrt[p]{f} \notin B$. Alors il est clair que l'élément

$x' = \sqrt[p^r]{x}$ de l'algèbre $A' = A[x']$ est un générateur universel de A' et par suite A' est une algèbre de Krasner-Tate qui s'écrit $K\{t\}[x]$ (théorème III.4). Donc $A \subset A'$ et comme A' est principale, A' contient la clôture intégrale A_0 de A. Montrons maintenant que $A' \subset A_0$.

Il est clair que le corps de fractions de $K[t^{p^r}, x]$ est $K(x)$ et que t est de degré p^q sur $K[t^{p^r}, x]$. Par suite x' appartient à l'unique extension radicielle de degré p^r du corps de fractions de B et finalement on a donc $K\{t\}[x'] \subset A_0$.

Remarque. — En caractéristique $p \neq 0$, il existe des algèbres de Tate qui possède des éléments spectralement injectifs et ne possèdent aucun générateur universel, comme le prouve la proposition IV. 2.

Si l'on reprend la preuve de la proposition III.6., cela tient à ce que les éléments de A' de degré p^r sur B n'engendrent pas tous la même extension radicielle: $t^{p^r} \in A$ mais $x' \notin A$. Par contre l'extension radicielle engendrée par x' contient toutes les extensions radicielles de degré p^r de B.

§.IV. — Algèbres de Tate intégralement closes

On démontre la proposition IV.1. dont l'analogie est évidente avec un résultat bien connu sur les algèbres de type fini, en suivant une voie parallèle [10].

PROPOSITION IV.1. — *Une algèbre topologiquement de type fini intègre de la forme* $\dfrac{K\{X, Y\}}{F(X, Y)\, K\{X, Y\}}$ *est intégralement close si et seulement si l'ensemble des* $(\lambda, \mu)_\epsilon\, U \times U$ *tels que* $F(\lambda, \mu) = 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial X}(\lambda, \mu) = 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial Y}(\lambda, \mu) = 0$ *est vide.*

On en déduit en caractéristique $p \neq 0$ une famille d'exemples d'algèbre de Tate non intégralement closes possédant cependant un élément spectralement injectif. Par exemple:

PROPOSITION IV.2. — *On suppose* $p \neq 0$. *Soit* $A = \dfrac{K\{T, Y\}}{(Y^2 - T^q)\, K\{T, Y\}}$ *où* $q = p$ *si* $p \neq 2$ *et où* q *est un entier positif impair quelconque si* $p = 2$. *Soit* φ *la surjection canonique de* $K\{T, Y\}$ *sur* A *et soient* $y = \varphi(Y)$, $t = \varphi(T)$. *Alors* A *est une algèbre intègre, non inté-*

gralement close, qui admet pour élément spectralement injectif y si $p \neq 2$ et t si $p = 2$.

Enfin on va montrer, grâce à un exemple simple, qu'une algèbre de Tate intégralement close peut avoir à la fois des idéaux maximaux principaux et des idéaux maximaux non principaux.

PROPOSITION IV.3. — *Soit $m \in K$ tel que $|m| = 1$. L'algèbre $A_m = \dfrac{K\{T, Y\}}{(Y^2 + T^2 Y + mT) K\{T, Y\}}$ est intègre et contient une infinité d'idéaux maximaux principaux mais elle ne possède pas de générateur universel. De plus, quelle que soit la caractéristique p de K, il existe $m \in K$ tel que $|m| = 1$ et tel que A_m soit intégralement close.*

PREUVE. — On montre que A_m est intègre puis on démontre par l'absurde que A_m n'admet pas de générateur universel, à l'aide du lemme suivant:

LEMME. — *Soit une algèbre intègre topologiquement de type fini sur K de la forme $K\{t\}[x]$ où x est un générateur universel de A entier sur $K\{t\}$ dont le polynôme minimal sur $K\{t\}$ est $F(X) = X^n + f_{n-1}(t) X^{n-1} + \dots + f_0(t)$, $f_i(t) \in K\{t\}$, $0 \leq i \leq n - 1$). Supposons que l'on ait $\|f_i(t)\| \leq 1$ quel que soit i $(0 \leq i \leq n - 1)$ pour la norme de $K\{t\}$. Alors chaque coefficient d'ordre ≤ 2 de f_i a une valeur absolue < 1 $(0 \leq i \leq n - 1)$.*

Alors, si $p \neq 3$, A_1 est intégralement close et si $p = 3$, A_2 est intégralement close.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI Nicolas, *Eléments de mathématiques, Algèbre*, chapitre V.

[2] ESCASSUT Alain, *Algèbres d'éléments analytiques en analyse non archimédienne*, Indagationes Mathematicae, Amsterdam, vol. 36, n.º 4, (1974) pp 339-351.

[3] ESCASSUT Alain, *Eléments analytiques et filtres percés sur un infraconnexe*, Annali di matematica pura ed applicata CX pp 335-352, (1977).

[4] ESCASSUT Alain, *T-filtres et ensembles analytiques*, Annales de l'Institut Fourier (Grenoble) t. 25, fasc. 2 (1975) pp 75-110.

[5] ESCASSUT Alain, *Algèbres de Krasner noethériennes et intègres*, Proceedings Kon. Akad. v. Wet. A 79 pp 109-130, (1976).

[6] ESCASSUT Alain, *Spectre maximal d'une algèbre de Krasner*, Colloquium mathematicum (à paraître). XXXIII 2 1978.

[7] ESCASSUT Alain, *Algèbres de Banach ultramétriques et algèbres de Krasner-Tate*, Astérisque *n.º* 10, octobre 1973, pp 1-107.

[8] ESCASSUT Alain, *Propriétés spectrales en analyse non archimédienne*, C.R.A.S. t. 278, (1976) pp 1387-1389.

[9] KRASNER Marc, *Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets. Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres*, Colloques Internationaux du C.N.R.S., n.º 143, Clermont-Ferrand, 1964, Edition du C.N.R.S. (1966).

[10] FULTON William, *Algebraic Curves* W. A. Benjamin Inc. New York, Amsterdam (1969).

[11] GERRITZEN Lothar, *Die norm der gleichmäßigen Konvergenz auf reduzierte affinoiden Algebren*, Journal für die reine und agewandte Mathematik, Band 231 (1968).

[12] MOTZKIN Elhanan, *Un invariant conforme p-adique*, Séminaire de Théorie des Nombres de l'Université de Bordeaux I, année 1968-69, n.º 1, (polycopié).

[13] MOTZKIN Elhanan et ROBBA Philippe, *Prolongement analytique en analyse p-adique*, Séminaire de Théorie des Nombres de l'Université de Bordeaux I, 1968-69, n.º 3 (polycopié).

[14] NAGATA Masayoshi, *Local Rings*, Interscience tracts inpure and applied mathematics, number 13, (1962).

[15] ROBBA Philippe, *Fonctions analytiques sur les corps valués ultramétriques complets*, Astérisque n.° 10, (1973) pp 108-220.

[16] SALMON Pietro, *Serie convergenti su un corpo non archimedeo con applicazione ai fasci analitici*, Annali di Matematica pura ed applicata, serie IV T LXV, (1964).

[17] TATE John, *Rigid analytic spaces*, Inv. Math. t. 12, fasc. 4, (1971) pp 257-289.

Alain ESCASSUT
Laboratoire de Mathématiques
et d'Informatique dépendant de
l'Université de Bordeaux I
associé au C.N.R.S.
351, cours de la Libération
33405 TALENCE