FEUILLETAGES DE BRIOT ET BOUQUET

par

FRANCINE DIENER

1. INTRODUCTION

Nous exposons ici quelques observations de caractère géométrique concernant les équations différentielles de Briot et Bouquet, c'est-à-dire les équations de la forme $F(y, y') = 0$ où F est un polynôme à deux variables complexes. L'étude de ces équations a été faite, comme leur nom l'indique, par Briot et Bouquet [1], puis complétée un peu plus tard par Painlevé [5].

C'est donc un regard neuf sur des équations déjà étudiées que nous proposons ici. La méthode que nous employons est la construction d'un feuilletage analytique complexe associé a chacune de ces équations. Madame Sec [6] a déjà réalisé une telle étude géométrique pour deux types particuliers d'équations: les équations de Riccati et celles des fonctions elliptiques.

De l'examen des propriétés géométriques de ce feuilletage, nous déduisons d'une part une reformulation en termes géométriques du théorème de Briot et Bouquet caractérisant les équations du type considéré dont toutes les solutions sont méromorphes et définies dans $\mathbf{C}$ tout entier; d'autre part un critère géométrique permettant de reconnaître parmi ces équations celles dont les solutions sont périodiques ou doublement périodiques.

2. Un exemple.

Soit l'équation différentielle:

$$y'^2 = C(y - a)^2 (y - b) (y - c)$$

où $a, b, c,$ et C sont des nombres complexes a, b et c étant distincts. Nous nous proposons de lui associer un feuilletage analytique $\mathfrak{F}$.

La situation initiale

Elle est analogue à celle que Madame SEC a décrite dans le cas de l'équation des fonctions elliptiques. Rappelons-la en quelques mots pour fixer les notations.

On considère le compactifié de $\mathbf{C}^2$ en $\hat{T} P_1 (\mathbf{C})$, obtenu en ajoutant un point à l'infini à chaque fibre du fibré tangent à $P_1 (\mathbf{C})$, compactifié que nous noterons simplement K. Les deux premières colonnes du tableau suivant fournissent les cartes et changements de cartes de l'espace $K \times \mathbf{C}$. Sur cet espace on considère le champ de plans $\mathfrak{C}$ défini par les formes différentielles de la troisième colonne du tableau.

Atlas de $K \times \mathbf{C}$	Changements de cartes	Equations de champ de plans $\mathfrak{C}$ sur $K \times \mathbf{C}$	Equations de la sous-variété algébrique $\Gamma \times \mathbf{C}$ de $K \times \mathbf{C}$
$0_1 \times \mathbf{C}$ (p, y, x)		$dy - p\, dx = 0$	$p^2 - C(y-a)^2 (y-b)(y-c) = 0$
$0_2 \times \mathbf{C}$ (P, Y, x)	$Yy = 1$ $pY^2 = -P$	$dY - P\, dx = 0$	$P^2 - C(1-aY)^2 (1-bY)(1-cY) = 0$
$0_3 \times \mathbf{C}$ (π, y, x)	$p\pi = 1$	$\pi\, dy - dx = 0$	$1 - \pi^2 C(y-a)^2 (y-b)(y-c) = 0$
$0_4 \times \mathbf{C}$ (Π, Y, x)	$Yy = 1$ $\Pi p = -y^2$	$\Pi\, dY - dx = 0$	$1 - \Pi^2 C(1-aY)^2 (1-bY)(1-cY) = 0$

On appelle Γ l'adhérence dans K de la courbe algébrique de 0_1 d'équation $F(p, y) = p^2 - C(y-a)^2 (y-b)(y-c) = 0$ dont nous donnons les équations dans la dernière colonne du tableau.

L'étude de l'équation différentielle initiale est ramenée à l'étude du champ de droites $\mathfrak{D}$ induit par $\mathfrak{C}$ sur $\Gamma \times \mathbf{C}$.

L'éclatement

Ce champ de droites $\mathfrak{D}$ ne sera pas défini aux points où $\mathfrak{C}$ est tangent à $\Gamma \times \mathbf{C}$: c'est la première difficulté. La seconde, qui constitue l'originalité de cet exemple, est que, Γ possédant un point singulier de coordonnées $(0, a)$ dans 0_1, ou $(0, 1/a)$ dans 0_2, ce champ de droites ne peut être défini en ce point singulier. L'idée est alors de *remplacer la courbe singuliere Γ par une courbe non sigulière $\tilde{\Gamma}$ que l'on obtient en éclatant l' espace K au point singulier* $(0, a)$ *de* Γ. Cette construction effectuée, on constatera que le champ de plans $\tilde{\mathfrak{C}}$, défini à partir de $\mathfrak{C}$ sur l'espace éclaté $\tilde{K} \times \mathbf{C}$, induit sur $\tilde{\Gamma} \times \mathbf{C}$ un champ de droite $\mathfrak{D}$ (avec singularité) qui permettra de définir un feuilletage analytique $\mathfrak{F}$ sur $\tilde{\Gamma} \times \mathbf{C}$.

Rappelons que pour éclater une variété en un point, on éclate un voisinage de ce point, puis on recolle l'espace obtenu à la variété sur ce voisinage épointé. Nous choisirons ici l'ouvert 0_1 comme voisinage de $(0, a)$ et nous éclaterons 0_1 en $\widetilde{0}_1$. Il faudrait répéter cette opération pour 0_2; nous préférons restreindre 0_2 à $0'_2 = 0_2 \setminus \{(0, 1/a)\}$ de façon que $\Gamma \cap 0'_2$ ne possède plus de point singulier. 0_1, $0'_2$, 0_3 et 0_4 recouvrent encore K et donc Γ.

Voici comment on peut décrire $\widetilde{0}_1$ par des cartes:

On a par définition $\widetilde{0}_1 = \{((p, y), [q, z]) \in 0_1 \times P_1(\mathbf{C}) \mid pz = q(y - a)\}$ où $[q, z]$ désigne les coordonnées homogènes de $P_1(\mathbf{C})$. Si U_1 et U_2 sont les ouverts de cartes usuels de $P_1(\mathbf{C})$, on peut décrire $\widetilde{0}_1$ par les deux cartes suivantes:

$$0_{1,1} = \widetilde{0}_1 \cap (\mathbf{C}^2 \times U_1) \to \mathbf{C}^2 \quad \text{et} \quad 0_{1,2} = \widetilde{0}_1 \cap (\mathbf{C}^2 \times U_2) \to \mathbf{C}^2$$

$$(p, y, [q, z]) \to (P_1 = p, Y_1 = \frac{z}{q}) \quad (p, y, [q, z]) \to (y_1 = y - a, p_1 = \frac{q}{z}).$$

On définit une application $\delta : \widetilde{0}_1 \to 0_1$ par

$$\delta(P_1, Y_1) = (p, y) \text{ avec } p = P_1 \; y = P_1 \; Y_1 + a \text{ dans } 0_{1,1}$$

$$\delta(p_1, y_1) = (p, y) \text{ avec } p = p_1 \, y_1 \quad y = y_1 + a \text{ dans } 0_{1,2}.$$

Cette application δ est un isomorphisme de $\widetilde{0}_1 \setminus \overset{-1}{\delta}(0, a)$ sur, $0_1 \setminus \{(0, a)\}$.

Examinons à présent ce que devient la courbe Γ dans $\widetilde{0}_1$: l'image, réciproque de $\Gamma \cap 0_1$ dans $\widetilde{0}_1$ a pour équations dans les deux cartes de $\widetilde{0}_1$:

$$F_1(p_1 y_1, y_1 + a) = y_1^2(p_1^2 - C(y_1 + a - b)(y_1 + a - c)) = 0 \text{ dans } 0_{1,2}$$

$$F_1(P_1, P_1 Y_1 + a) = P_1^2(1 - C Y_1^2(P_1 Y_1 + a - b)(P_1 Y_1 + a - c)) = \\ = 0 \text{ dans } 0_{1,1}.$$

C'est la réunion de deux courbes algébriques: la première, d'équations $y_1^2 = 0$ et $P_1^2 = 0$, est la sous-variété $\{0\} \times P_1(\mathbf{C})$ de $\widetilde{0}_1$. La seconde, d'équations $p_1^2 - C(y_1 + a - b)(y_1 + a - c) = 0$ et $1 - C Y_1^2(P_1 Y_1 + a - b)(P_1 Y_1 + a - c) = 0$, est une courbe algébrique de $\widetilde{0}_1$ isomorphe par δ à $\Gamma \cap 0_1$ sauf en les deux points de coordonnées (p_1, y_1) tels que $y_1 = 0$ et $p_1^2 = C(a-b)(a-c)$ de $\delta^{-1}(0, a)$. On vérifie aisément qu'elle n'est pas singulière en ces deux points. Connaissant l'expression de δ dans les cartes, il est facile de définir le champ de plans $\widetilde{\mathfrak{E}}$ induit de $\mathfrak{E}$ par δ sur $\widetilde{0}_1 \times \mathbf{C}$. C'est le champ défini par les deux formes différentielles:

$$P_1\, dY_1 + Y_1\, dP_1 - P_1\, dx \text{ sur } 0_{1,1} \times \mathbf{C} \text{ et}$$
$$dy_1 - p_1\, y_1\, dx \text{ sur } 0_{1,2} \times \mathbf{C}.$$

La situation finale

On peut résumer la nouvelle situation par le tableau suivant,

	Atlas de $\widetilde{K} \times \mathbf{C}$	«Changements de cartes»	Equations du champ de plans $\widetilde{\mathfrak{E}}$ sur $\widetilde{K} \times \mathbf{C}$	Equations de la sous-variété non singulière $\widetilde{\Gamma} \times \mathbf{C}$ de $\widetilde{K} \times \mathbf{C}$
éclaté $\widetilde{0}_1 \times \mathbf{C}$ de $0_1 \times \mathbf{C}$ aux points $(0,a,x)$	$0_{1,1} \times \mathbf{C}\,(P_1, Y_1, x)$	$p = P_1 \quad y = P_1 Y_1 + a$	$P_1\, dY_1 + Y_1\, dP_1 - P_1\, dx = 0$	$1 - CY_1^2 (P_1 Y_1 + a - b)(P_1 Y_1 + a - c) = 0$
	$0_{1,2} \times \mathbf{C}\,(p_1, y_1, x)$	$p = p_1 y_1 \quad y = y_1 + a$	$dy_1 - p_1 y_1\, dx = 0$	$p_1^2 - C(y_1 + a - b)(y_1 + a - c) = 0$
	$0'_2 \times \mathbf{C}\,(P, Y, x)$	$Yy = 1 \quad pY^2 = -P$	$dY - P\,dx = 0$	$P^2 - C(1 - aY)^2 (1 - bY)(1 - cY) = 0$
	$0_3 \times \mathbf{C}\,(\pi, y, x)$	$p\pi = 1$	$\pi\, dy - dx = 0$	$1 - \pi^2 C(y - a)^2 (y - b)(y - c) = 0$
	$0_4 \times \mathbf{C}\,(\Pi, Y, x)$	$Yy = 1 \quad \Pi p = -y^2$	$\Pi\, dY - dx = 0$	$1 - \Pi^2 C(1 - aY)^2 (1 - bY)(1 - cY) = 0$

L'étude de l'équation différentielle est finalement ramenée à l'étude du champ de droites induit par $\widetilde{\mathfrak{E}}$ sur $\widetilde{\Gamma} \times \mathbf{C}$.

On remarquera, pour simplifier, que $\widetilde{\Gamma} \times \mathbf{C}$ est contenu dans la réunion des ouverts de cartes $0_{1,2} \times \mathbf{C}$ et $0'_2 \times \mathbf{C}$. Le champ de droites induit par $\widetilde{\mathfrak{E}}$ sur $\widetilde{\Gamma} \times \mathbf{C}$ sera défini dans ces cartes par les formes différentielles suivantes:

$$(dy_1 - p_1\, y_1\, dx) \wedge d(p_1^2 - C(y_1 + a - b)(y_1 + a - c)) =$$
$$= (dy_1 - p_1\, y_1\, dx) \wedge (2p_1\, dp_1 - C[(y_1 + a - c) + (y_1 + a - b)]\, dy \text{ et}$$

$$(dY - Pdx) \wedge d(P^2 - C(1 - aY)^2 (1 - bY)(1 - cY)) =$$
$$= (dY - P\,dx) \wedge (2P\,dP + C[2a(1 - bY)(1 - cY)(1 - aY) +$$
$$+ b(1 - aY)^2 (1 - cY) + c(1 - aY)^2 (1 - bY)]dY).$$

Soit, en adoptant une écriture simplifiée qui regroupe les deux derniers termes

$$2p_1\, dy_1 \wedge dp_1 - p_1\, y_1\, dx \wedge d\widetilde{F}_1 \qquad \text{dans} \quad 0_{1,2} \times \mathbf{C}$$

et
$$2P\, dY \wedge dP - P\, dx \wedge d\widetilde{F}_2 \qquad \text{dans} \quad 0'_2 \times \mathbf{C}$$

où $\widetilde{F}_1$ et $\widetilde{F}_2$ sont les équations de $\widetilde{\Gamma}$ dans $0_{1,2}$ et $0'_2$ respectivement.

En les points de $\widetilde{\Gamma} \times \mathbf{C}$ tels que $p_1 = 0$ ou $P = 0$, ces formes possèdent une singularité.

On considère alors les formes proportionnelles

$$\begin{cases} 2\, dy_1 \wedge dp_1 - y_1\, dx \wedge d\widetilde{F}_1 & \text{dans } 0_{1,2} \times \mathbf{C} \\ 2\, dY \wedge dP - dx \wedge d\widetilde{F}_2 & \text{dans } 0'_2 \times \mathbf{C} \end{cases}$$

qui sont sans singularité. Le champ de droites qu'elles définissent coïncide avec le précédent en tout point où ce dernier était défini. Il prolonge donc le champ précédent en un champ de droites sans singularité. On obtient ainsi le feuilletage analytique $\mathfrak{F}$ sur $\widetilde{\Gamma} \times \mathbf{C}$ que l'on cherchait, les formes différentielles précédentes étant clairement complètement intégrables en raison de la dimension de $\widetilde{\Gamma} \times \mathbf{C}$.

REMARQUE

Considérons la projection q de $\widetilde{\Gamma} \times \mathbf{C}$ sur $P_1(\mathbf{C}) \times \mathbf{C}$ définie dans les deux cartes $0_{1,2} \times \mathbf{C}$ et $0'_2 \times \mathbf{C}$ par $q(p_1, y_1, x) = (y, x)$ où $y = y_1 + a$ et $q(P, Y, x) = (Y, x)$.
L'image par q de chaque feuille de $\mathfrak{F}$ est, par construction, le graphe d'une solution de l'équation différentielle. Réciproquement à toute solution de l'équation est associée une feuille de $\mathfrak{F}$, à l'exception des trois solutions constantes que nous allons examiner de plus près:

Deux solutions constantes $y = b$ et $y = c$, correspondant à deux points, $(0, b)$ et $(0, c)$, non singuliers de Γ, qui étaient des intégrales du champ de droites initial, ont été éliminées lors de la simplification de la forme différentielle par P. La dernière, $y = a$, qui correspondait au point singulier $(0, a)$ de Γ s'est dédoublée dans l'éclatement de ce point: le feuilletage $\mathfrak{F}$ possède en effet deux «feuilles constantes» passant par les deux points de $\widetilde{\Gamma}$ tels que $y_1 = 0$ et $p_1^2 = (a - b)\,(a - c)$. Nous verrons au paragraphe 3 les renseignements que l'on peut déduire de l'existence de ces deux «feuilles constantes».

3. Le cas général

Montrons a présent que la construction précédente peut être réalisée pour toute équation de Briot et Bouquet.

La variété

Soit $F(y, y') = 0$ une équation de Briot et Bouquet c'est-à-dire telle que F soit un polynôme que l'on supposera constant ni en y', ni en y, et sans facteur multiple. Soit K le compactifié de $\mathbf{C}^2$ défini au paragraphe précédent et Γ l'adhérence dans K de la courbe algébrique d'équation $F(p, y) = 0$. La courbe Γ possède généralement des singularités qui, sous nos hypothèses sur F, forment un ensemble fini noté Σ. Son complémentaire $\Gamma \backslash \Sigma$ dans Γ est une sous-variété analytique de dimension un de K. On sait qu'il existe une variété analytique $\tilde{\Gamma}$, et une application δ: $\tilde{\Gamma} \to \Gamma$ qui soit un isomorphisme analytique de $\tilde{\Gamma} \backslash \tilde{\Sigma}$ dans $\Gamma \backslash \Sigma$, où $\tilde{\Sigma} = \delta^{-1}(\Sigma)$ est également un ensemble fini. (*)

Soulignons que la fibre $\tilde{\Gamma}$ de $\tilde{\Gamma} \times \mathbf{C}$ est, de part sa construction, une variété analytique compacte de dimension 1, qui est de plus connexe si $F(p, y)$ est irréductible. Dans ce cas $\tilde{\Gamma}$ est homéomorphe à un tore à g trous dont on peut calculer le genre grâce à la formule de Hurwitz. [3]

Le feuilletage

Sur $K \times \mathbf{C}$, on considère le champ de plans $\mathfrak{C}$ défini au paragraphe précédent. Soit $\Delta = \delta \times id$ l'application induite par δ sur $\tilde{\Gamma} \times \mathbf{C}$ où id désigne l'identité de $\mathbf{C}$; soit $J = j \times id$, j étant l'injection canonique de Γ dans K. Notons enfin $(J \circ \Delta)^*$ l'application induite par $J \circ \Delta$ du fibré cotangent à $K \times \mathbf{C}$ dans le fibré cotangent à $\tilde{\Gamma} \times \mathbf{C}$.

(*) Remarquons qu'il existe trois façons différentes de construire cette variété $\tilde{\Gamma}$: la première est la méthode algébrique qui fournit la normalisée de Γ, la seconde consiste à construire géométriquement la surface de Riemann associée à une courbe algébrique Γ, la troisième utilise, pour désingulariser la courbe Γ, un nombre fini d'éclatements de la variété K en chacun de ses points singuliers. Ces trois méthodes fournissent la même variété $\tilde{\Gamma}$. Nous avons adopté cette dernière construction parce qu'elle fournit aussitôt une description de $\tilde{\Gamma}$ par des cartes.

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\Gamma} \times \mathbf{C} \arrow[d, "\Delta = \delta \times id"'] \arrow[dr, "J \circ \Delta"] & \\
\Gamma \times \mathbf{C} \arrow[r, "J = j \times id"'] & K \times \mathbf{C}
\end{tikzcd}$$

On peut relever, par cette application $(J \circ \Delta)^*$, le champ de plans $\mathfrak{C}$ de $K \times \mathbf{C}$ en un champ de droites sur $\widetilde{\Gamma} \times \mathbf{C}$ qui est éventuellement non défini en certains points de $\widetilde{\Gamma} \times \mathbf{C}$.

Pour montrer l'existence du feuilletage analytique $\mathfrak{F}$ sur $\widetilde{\Gamma} \times \mathbf{C}$, il reste à voir que l'on peut toujours prolonger ce champ de droites en tous les points de $\widetilde{\Gamma} \times \mathbf{C}$.

Pour cela remarquons tout d'abord que ce champ de droites est invariant par toute translation parallèle à la base $\mathbf{C}$ de la fibration. Donc l'ensemble des points de $\widetilde{\Gamma} \times \mathbf{C}$ où il sera nécessaire de le prolonger est une réunion de droite complexe $\{M\} \times \mathbf{C}$, où M est un élément de $\widetilde{\Gamma}$.

D'autre part ces points M sont isolés dans $\widetilde{\Gamma}$ car ce sont, soit des points de $\widetilde{\Sigma}$ qui sont en nombre fini sous nos hypothèses sur F, soit des points où le champ de plans $\mathfrak{C}$ initial est tangent à $\Gamma \times \mathbf{C}$, qui sont également isolés car F a été supposé sans facteur multiple. On est donc ramené à un problème local.

Au voisinage de chacune de ces droites, on peut décrire $\widetilde{\Gamma} \times \mathbf{C}$ par deux coordonnées, l'une étant une coordonnée locale sur $\widetilde{\Gamma}$, l'autre étant simplement la coordonnée de la base $\mathbf{C}$. La forme différentielle définissant le champ de droites considéré dans un tel voisinage, et qui s'annule sur la droite $\{M\} \times \mathbf{C}$, ne dépend que de la première de ces coordonnées: elle est donc proportionnelle à une forme différentielle ne s'annulant pas sur $\{M\} \times \mathbf{C}$ et qui définit le même champ de droites dans ce voisinage excepté sur la droite $\{M\} \times \mathbf{C}$.

En procédant ainsi pour chaque point M, on obtient un champ de droites analytique défini sur toute la variété $\widetilde{\Gamma} \times \mathbf{C}$ par des formes différentielles qui sont complètement intégrables car $\widetilde{\Gamma} \times \mathbf{C}$ est de dimension 2. Ce champ de droites induit le feuilletage analytique cherché sur $\widetilde{\Gamma} \times \mathbf{C}$. Nous appellerons ce dernier «*feuilletage associé*» à l'équation différentielle $F(y', y) = 0$.

Le théorème

En termes de feuilletage, le théorème de Briot et Bouquet caractérisant les équations différentielles du type considéré dont toutes les solutions sont méromorphes et définies dans $\mathbf{C}$ tout entier [1], peut se reformuler comme suit:

THÉORÈME. *Une équation différentielle $F(y', y) = 0$, où F est un polynôme en y' et y, a toutes ses solutions méromorphes et définies dans $\mathbf{C}$ tout entier si et seulement si le feuilletage $\mathfrak{F}$ associé est transverse en tout point à la fibration triviale $\psi : \widetilde{\Gamma} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$.*

Rappelons qu'un feuilletage de $\widetilde{\Gamma} \times \mathbf{C}$ est dit *transverse à la fibration* ψ en un point de $\widetilde{\Gamma} \times \mathbf{C}$ si la feuille et la fibre passant par ce point sont transverses.

DÉMONSTRATION. Pour montrer cela nous utilisons un théorème de C. Ehresmann [2] qui assure qu'un feuilletage défini sur une variété analytique, munie d'une fibration localement triviale de fibre compacte et de base simplement connexe est uniforme pour cette fibration si et seulement s'il est transverse en tout point aux fibres de cette fibration.

Le feuilletage $\mathfrak{F}$ que nous avons construit sur $\widetilde{\Gamma} \times \mathbf{C}$ remplit les conditions de ce théorème pour la fibration ψ; il reste donc à voir, en vertu de ce théorème, que $\mathfrak{F}$ est uniforme si et seulement si toutes les solutions de l'équation initiale sont méromorphes et définies dans $\mathbf{C}$ tout entier. Ceci découle de la construction même du feuilletage associé.

APPLICATION. L'un des corollaires les plus connus de ce théorème de Briot et Bouquet consiste en un tableau [1] comprenant la liste complète des équations du type binôme, c'est à dire dela forme $y'^m - f(y) = 0$, dont toutes les solutions sont méromorphes et définies dans $\mathbf{C}$ tout entier. Du point de vue où nous nous plaçons, ces équations sont caractérisées par un feuilletage associé transverse en tout point à la fibration ψ. Il est possible de retrouver ce tableau d'équations en transformant cette condition géométrique en une condition arithmétique sur les entiers m et les ordres de multiplicité des racines de $f(y)$.

EXEMPLE 1. Considérons tout d'abord l'équation $y'^2 = C(y-a)^2 (y-b)(y-c)$ que nous avons étudiée au premier paragraphe. Elle fait partie du tableau de Briot et Bouquet, c'est-à-dire que toutes ses solutions sont méromorphes et définies dans $\mathbf{C}$ tout entier. Par exemple pour $C = c = 1$, $a = 0$ et $b = -1$, les solutions sont les suivantes: $y(x) = 1/\sin(x + x_0)$, $x_0 \in \mathbf{C}$. Or les formes différentielles définissant le feuilletage sont, comme nous l'avons vu:

$$\begin{cases} 2\, dy_1 \wedge dp_1 - y_1\, dx \wedge d\widetilde{F}_1 & \text{dans } 0_{1,2} \times \mathbf{C} \\ 2\, dY \wedge dP - dx \wedge d\widetilde{F}_2 & \text{dans } 0'_2 \times \mathbf{C}. \end{cases}$$

On constate que le feuilletage ainsi défini est transverse en tout point de $\widetilde{\Gamma} \times \mathbf{C}$ à la fibration ψ.

EXEMPLE 2. Si l'on considère au contraire une équation telle que $y'^3 = C(y-a)^5 (y-b)$ dont les solutions ne sont plus toutes méromorphes et définies dans $\mathbf{C}$ tout entier — par exemple pour $C = 1$ $a = 0$ et $b = \frac{3}{2}$, on obtient par intégration directe les solutions: $y(x) = 3/2\,(x + x_0)^{-3/2}.\,[(x + x_0)^{3/2} - 1]^{-1}$, $x_0 \in \mathbf{C}$ — le feuilletage associé n'a plus cette propriété. En effet:
la situatión initiale est semblabe à celle du premier exemple, c'est-à-dire que la courbe Γ, adhérence dans K de la courbe d'équation $F(p, y) = p^3 - C(y-a)^5 (y-b) = 0$ possède une singularité au point de coordonnées $(0, a)$ de 0_1 ou $(0, 1/a)$ de 0_2. Il est nécessaire d'effectuer deux éclatements successifs de 0_1 pour obtenir la courbe $\widetilde{\Gamma}$ qui n'est plus singulière.

La situation finale est décrite dans le tableau suivant:

	Atlas de $\widetilde{K} \times \mathbf{C}$	«Changements de cartes»	Equations du champ de plans $\widetilde{\mathfrak{C}}$ sur $\widetilde{K} \times \mathbf{C}$	Equations de la sous-variété non singulière $\widetilde{\Gamma} \times \mathbf{C}$ de $\widetilde{K} \times \mathbf{C}$
éclaté de $0_1 \times \mathbf{C}$	$0_{1,1} \times \mathbf{C}\,(P_1, Y_1, x)$	$p = P_1$ $y = P_1 Y_1 + a$	$P_1 dY_1 + Y_1 dP_1 - P_1 dx = 0$	$1 - CP_1^2 Y_1^5 (P_1 Y_1 + a - b) = 0$
éclaté de $0_1 \times \mathbf{C}$; éclaté de $0_{1,2} \times \mathbf{C}$	$0_{1,2,1} \times \mathbf{C}\,(P_2, Y_2, x)$	$p = P_2 Y_2^2$ $y = Y_2 + a$	$dY_2 - P_2 Y_2^2 dx = 0$	$P_2^3 Y_2 - C(Y_2 + a - b) = 0$
éclaté de $0_1 \times \mathbf{C}$; éclaté de $0_{1,2} \times \mathbf{C}$	$0_{1,2,2} \times \mathbf{C}\,(p_2, y_2, x)$	$p = p_2^2 y_2$ $y = p_2 y_2 + a$	$p_2 dy_2 + y_2 dp_2 - p_2^2 y_2 dx = 0$	$p_2 - Cy_2^2 (p_2 y_2 + a - b) = 0$
éclaté de $0_1 \times \mathbf{C}$; éclaté de $0_{1,2} \times \mathbf{C}$	$0'_2 \times \mathbf{C}\,(P, Y, x)$	$Yy = 1$ $pY^2 = -P^2$	$dY - P\, dx = 0$	$P^3 - C(1 - aY)^5 (1 - bY) = 0$
	$0_3 \times \mathbf{C}\,(\pi, y, x)$	$p\pi = 1$	$\pi dy - dx = 0$	$1 - C\pi^3 (y-a)^5 (y-b) = 0$
	$0_4 \times \mathbf{C}\,(\Pi, Y, x)$	$Yy = 1$ $\Pi p = -y^2$	$\Pi dY - dx = 0$	$1 - C\Pi^3 (1 - aY)^5 (1 - bY) = 0$

On constate que $\widetilde{\Gamma} \times \mathbf{C}$ est contenue dans la réunion des deux cartes $0_{1,2,2} \times \mathbf{C}$ et $0'_2 \times \mathbf{C}$. On calcule les formes différentielles qui définissent $\mathfrak{F}$ dans ces deux cartes et on obtient, après prolongement aux points où elles sont singulières:

$$\begin{cases} 3\, dy_2 \wedge dp_2 - p_2 y_2\, dx \wedge d\widetilde{F}_1 & \text{dans } 0_{1,2,2} \times \mathbf{C} \\ 3\, P\, dY \wedge dP - dx \wedge d\widetilde{F}_2 & \text{dans } 0'_2 \times \mathbf{C}. \end{cases}$$

En les points de $\widetilde{\Gamma} \times \mathbf{C}$ où $P = 0$, le feuilletage $\mathfrak{F}$ ainsi défini n'est pas transverse à la fibration ψ.

4. Périodicité des solutions

L'étude des équations de Briot et Bouquet $F(y', y) = 0$ a été, depuis ses débuts étroitement liée à l'étude des fonctions méromorphes simplement et doublement périodiques. Les solutions de telles équations ont souvent, en effet, des propriétés de périodicité remarquables, comme c'est le cas des fonctions elliptiques par exemple. On peut retrouver ces propriétés des solutions grâce à celles du feuilletage associé.

Nous allons, plus précisément, montrer le théorème suivant:

Théorème. *Soit $\mathfrak{F}$ le feuilletage associé à une équation différentielle $F(y, y') = 0$ où F est un polynôme que l'on supposera irréductible et constant ni en y', ni en y. Supposons de plus que $\mathfrak{F}$ soit transverse en tout point à la fibration ψ. Alors les solutions non constantes de l'équation sont doublement périodiques (respectivement périodiques, respectivement non périodiques) si et seulement si $\mathfrak{F}$ n'a aucune feuille constante (respectivement $\mathfrak{F}$ en a deux, respectivement $\mathfrak{F}$ en a une).*

Nous appelons naturellement feuille constante, une feuille qui est le graphe d'une fonction constante de $\mathbf{C}$ dans $\widetilde{\Gamma}$.

Lemme 1. Le feuilletage $\mathfrak{F}$ est invariant par translation parallèlement à la base $\mathbf{C}$ de la fibration ψ, c'est-à-dire si une feuille de $\mathfrak{F}$ est le graphe d'une fonction $x \to M(x)$ de $\mathbf{C}$ dans $\widetilde{\Gamma}$ le graphe de la fonction $x \to M(x + x_0)$, pour tout $x_0 \in \mathbf{C}$, est encore une feuille de $\mathfrak{F}$.

Soit Φ la projection canonique de $\widetilde{\Gamma} \times \mathbf{C}$ sur $\widetilde{\Gamma}$ et soit A *l'ensemble des points de* $\widetilde{\Gamma}$ *par lesquels il passe une feuille constante*. Cet ensemble est fini car à chaque feuille constante correspond une solution constante de l'équation différentielle. Or celle-ci n'en a qu'un nombre fini sous nos hypothèses sur F.

LEMME 2. Toute feuille non constante de $\mathfrak{F}$ est transverse à Φ.

En effet, on constate que si une feuille de $\mathfrak{F}$ n'est pas transverse à Φ en un point M_0 de $\widetilde{\Gamma} \times \mathbf{C}$, la droite $\{M_0\} \times \mathbf{C}$ est alors intégrale de la forme différentielle définissant $\mathfrak{F}$ et donc, par unicité, elle coïncide avec la feuille considérée.

LEMME 3. La restriction $\Phi|_\gamma$ de Φ à une feuille γ non constante est surjective sur $\widetilde{\Gamma}\backslash A$.

En effet $\Phi|_\gamma : \gamma \to \widetilde{\Gamma}\backslash A$ est une application analytique et non constante donc ouverte $\Phi|_\gamma(\gamma)$ est donc un ouvert de $\widetilde{\Gamma}/A$. D'autre part les images par Φ de deux feuilles, γ_1 graphe de $M_1(x)$ et γ_2 graphe de $M_2(x)$, sont soit disjointes, soit confondues:

Supposons en effet que $\Phi(\gamma_1) \cap \Phi(\gamma_2) \neq \varnothing$, c'est-à-dire qu'il existe x_1 et x_2 dans $\mathbf{C}$ tels que $M_1(x_1) = M_2(x_2)$. Le graphe de la fonction $x \to M_2(x + x_2 - x_1)$ est une feuille de $\mathfrak{F}$, d'après le lemme 1, qui rencontre γ_1 au point $(M_2(x_2), x_1) = (M_1(x_1), x_1)$. Ces deux feuilles sont donc confondues. Par ailleurs, l'image par Φ du graphe de $M_2(x + x_2 - x_1)$ et celle du graphe de $M_2(x)$ sont égales. Les deux feuilles γ_1 et γ_2 ont donc même image par Φ.

Enfin comme A est fini, $\widetilde{\Gamma}\backslash A$ est connexe; or c'est la réunion des ouverts disjoints $\Phi(\gamma)$ où γ est une feuille non constante de $\mathfrak{F}$. Donc, pour toute feuille non constante γ de F, $\Phi(\gamma) = \widetilde{\Gamma}\backslash A$.

LEMME 4. Si la feuille γ, graphe de $M(x)$, est non constante alors toutes les autres feuilles non constantes sont les graphes de $M(x + x_0)$, pour $x_0 \in \mathbf{C}$.

En effet, soit γ_1 une feuille non constante, graphe de $M_1(x)$. D'après le lemme précédent, il existe $x_0 \in \mathbf{C}$ tel que $M_1(x_0) = M(0)$. Les graphes de $M_1(x)$ et de $M(x - x_0)$ sont deux feuilles qui passent par le point $(M_1(x_0), x_0) = (M(0), x_0)$. Elles sont donc confondues.

Démonstration du Théorème

Nous connaissons grâce à ces quatre lemmes, plusieurs propriétés géométriques des feuilles non constantes. Nous allons maintenant identifier, de deux façons différentes, l'espace des feuilles non constantes en utilisant la double transversalité de ces feuilles par rapport à Φ et à ψ.

De la transversalité par rapport à la fibration ψ et du fait que les feuilles sont uniformes, on déduit tout d'abord que la fibre $\tilde{\Gamma}\backslash A$ est homéomorphe à l'espace des feuilles non constantes.

D'autre part une fibre $\{M_0\} \times \mathbf{C}$ de la fibration Φ, $M_0 \in \tilde{\Gamma}\backslash A$, rencontre toutes les feuilles non constantes une fois au moins d'après le lemme 3 et les coupe de façon transverse d'après le lemme 2. Une telle droite complexe n'est cependant pas homéomorphe à l'espace des feuilles non constantes car celles-ci la recoupent éventuellement plusieurs fois. D'après le lemme 4, les intersections des diverses feuilles de $\mathfrak{F}$ avec cette droite $\{M_0\} \times \mathbf{C}$ se déduisent l'une de l'autre par translation. Appelons Λ l'intersection de $\{M_0\} \times \mathbf{C}$ avec la feuille de $\mathfrak{F}$ passant par $(M_0, 0)$, graphe de la fonction $M(x)$. En vertu des lemmes 1 et 4, Λ s'identifie à l'ensemble des périodes de la fonction $M(x)$. Donc Λ est un sous groupe fermé de $\{M_0\} \times \mathbf{C}$ qui est discret car M est analytique et non constante. L'espace des feuilles non constantes est donc homéomorphe à l'espace quotient de $\mathbf{C}$ par Λ. De plus, à la feuille qui est le graphe de $M(x)$ correspond une solution de l'équation différentielle. Il découle de la façon dont nous avons défini cette correspondance que cette solution a même période que la fonction $M(x)$.

Les solutions non constantes de l'équation différentielle sont doublement périodiques si et seulement si Λ est un réseau à 2 générateurs $\mathbf{R}$-linéairement indépendants, c'est-à-dire si et seulement si l'espace des feuilles non constantes est homéomorphe à un tore; elles sont simplement périodiques si et seulement si Λ a un seul générateur, c'est-à-dire si et seulement si l'espace des feuilles non constantes est homéomorphe à un cylindre; enfin, elles sont non périodiques si et seulement si Λ est réduit à $\{0\}$, c'est-à-dire si et seulement si l'espace des feuilles non constantes est homéomorphe à $\mathbf{C}$.

On exprimera ces conditions en utilisant le nombre de feuilles constantes de la façon suivante:

On a vu que l'espace des feuilles non constantes est homéomorphe à $\widetilde{\Gamma}\backslash A$. Or $\widetilde{\Gamma}$ étant une surface de Riemann, $\widetilde{\Gamma}\backslash A$ est homéomorphe à un tore si et seulement si A est vide; il est homéomorphe à un cylindre si et seulement si A a deux éléments et $\widetilde{\Gamma}$ est alors nécessairement homéomorphe à une sphère; enfin il est homéomorphe à un plan si et seulement si A n'a qu'un seul élément et $\widetilde{\Gamma}$ est, là encore, nécessairement homéomorphe à une sphère.

Remarque 1

De la démonstration précédente, on peut déduire de plus que la surface de Riemann associée à l'équation $F(y, y') = 0$ est, si toutes les solutions de cette équation sont méromorphes et définies dans $\mathbf{C}$ tout entier, soit une sphère, soit un tore (du moins si elle est connexe, ce qui est assuré lorsque F est irréductible). On retrouve donc le théorème de Hermite qui est énoncé ainsi dans [4]:

«Si l'équation $F(y', y) = 0$ ne possède pas de point critique mobile, alors son genre est 0 ou 1».

La réciproque de ce théorème est évidemment fausse comme le montre l'exemple de la fin du chapitre $I : y'^3 = C(y - a)^5 \ (y - b)$ dont la surface de Riemann associée Γ est une sphère et dont les solutions possèdent des points critiques algébriques.

Remarque 2

Nous pouvons aussi déduire de la démonstration précédente que si le feuilletage $\mathfrak{F}$ ne possède aucune feuille constante alors la fibre $\widetilde{\Gamma}$ est un tore. On peut considérer ceci comme un corollaire direct du lemme 2: en effet la forme différentielle définissant le feuilletage $\mathfrak{F}$ induit sur la fibre $\widetilde{\Gamma}$ un champ de droites réelles sans singularité en vertu de la transversalité. Donc nécessairement, $\widetilde{\Gamma}$ est de genre 1.

Remarque 3

Signalons enfin que l'on peut aussi déduire le théorème de Hermite directement de l'existence du feuilletage $\mathfrak{F}$ et du fait que celui-ci est transverse si et seulement si toutes les solutions de l'équation sont méromorphes et définies dans $\mathbf{C}$ tout entier. On sait en effet [7] qu'une surface de Riemann de genre supérieur ou égal à deux possède au plus un nombre fini d'automorphismes analytiques. Lorsque le feuilletage est transverse, les applications de $\widetilde{\Gamma}$ dans $\widetilde{\Gamma}$ qui au point de coordonnée $M(x)$ associent le point de coordonnée $M(x + x_0)$, où M est l'application de $\mathbf{C}$ dans $\widetilde{\Gamma}$ qui paramétrise la feuille de $\mathfrak{F}$ passant par un tel point et où x_0 est un élément de $\mathbf{C}$, forment une infinité d'automorphismes analytiques. Le genre de $\widetilde{\Gamma}$ est donc 0 ou 1.

RÉFÉRENCES

[1] Briot C. et Bouquet J.C. *Mémoire sur l'intégration des équations différentielles au moyen des fonctions elliptiques.* Journal Ecole Polytechnique 21 (1856) p. 199-253.

Briot C. et Bouquet J.C. *Théorie des fonctions elliptiques.* Gauthiers Villars (1875).

[2] Ehresmann C. *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable.* Colloque de Topologie Bruxelles (1950) p. 29-55.

[3] Fulton W. *Algebraic curves.* Benjamin (1969).

[4] Golubev W. N. *Differentiale Gleichungen im Complexen.* Berlin (1958).

[5] Painlevé P. *Oeuvres de P. Painlevé.* Tomes 1 et 2, Edition du C.N.R.S.

[6] Sec A. *Le problème de Briot et Bouquet.* Journées complexes de Metz, exposé (V) (1972).

[7] Springer G. *Introduction to Riemann Surfaces.* Addison Wesley publishing (1957).