ALGUNAS CLASES GENERALES DE FUNCIONES INFINITAMENTE DIFERENCIABLES

por

JUAN CERDÁ Y JULIÁN CUFÍ

§ 0. — INTRODUCCIÓN

Dada una sucesión de términos positivos (M_n), se consideran con frecuencia (ver p. e. [6]) las clases $C\{M_n\}$ de funciones de clase C^∞ sobre la recta que cumplen desigualdades del tipo

$$||f^{(n)}||_R = \sup_{t \in R} |f^{(n)}(t)| \leq A_f B_f{}^n M_n \tag{1}$$

para ciertas constantes positivas A_f y B_f.

Esta definición no es adecuada para dotar de manera natural a la clase de funciones de una topología compatible con la estructura de espacio vectorial.

Pero se consideran también (ver [4]) otras clases de funciones definidas por condiciones del tipo

$$\delta(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{||f^{(n)}||_R}{M_n} < \infty \tag{2}$$

y entonces δ es una norma bien adecuada al espacio de funciones.

Ello nos ha conducido a buscar una condición análoga a esta última para expresar (1). Al observar que (2) significa que $(||f^{(n)}||_R) \in (M_n)\, l^1$, transformado diagonal de l^1 por (M_n) según la terminología de [5], y que (1) significa que se cumple $(||f^{(n)}||_R) \in (M_n)\, h[0]$ cuando $h[0]$ es el espacio perfecto de las sucesiones de coeficientes de las series de potencias de radio de convergencia positivo, cuyo alfa-dual en el sentido de [5] es el espacio $h(\infty)$ de las sucesiones de coeficientes de series de potencias de radio de convergencia ∞ (véase p. e. [2] para lo que se refiere a los espacios de sucesiones $h(r)$ y $h(r])$, se llega fácilmente a la conclusión de que (1) equivale a que, para toda

$$u = (u_n) \in (M_n^{-1})\, h(\infty)$$

se cumpla

$$p_u(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \|f^{(n)}\|_R \cdot |u_n| < \infty \tag{3}$$

y la familia de seminormas p_u define una topología localmente convexa sobre el espacio de funciones que se considera.

Análogamente (2) equivale a (3) si se consideran las sucesiones

$$u \in (M_n^{-1})\, l^{\infty}$$

y en este caso la topología de las seminormas p_u es la misma que la norma δ.

Por lo tanto es natural asociar a cada espacio de sucesiones complejas h una clase de funciones infinitamente diferenciables definida por una condición como la (3) cuando u recorre h, clase de funciones que queda automáticamente provista de una topología localmente convexa.

En este trabajo se construyen espacios de funciones análogos a los que hemos descrito, se estudian las propiedades de convergencia que poseen y que ponen de manifiesto hasta que punto es adecuada la topología con que los hemos dotado, se describen numerosos ejemplos observándose como una clase muy amplia de ellos son espacios semi-Montel, se dan condiciones bajo las que estos espacios son álgebras topológicas con la multiplicación habitual de funciones y, por último, se plantea el problema de la casi-analiticidad que será estudiado en [3].

§ 1. — Notaciones y primeras propiedades

Será A un abierto, intervalo o, en general, un subconjunto de R^n sobre el que estén definidas las derivadas y designaremos

$$E = E(A),$$

espacio de las funciones sobre A que son de clase C^∞. Sobre él se tiene la sucesión de funcionales definidos por

$$\|f^{(p)}\|_A = \|f^{(p)}\| = \sup_{x \in A} \|d^p f(x)\|$$

que, al no ser finitos, no son seminormas.

Para cada sucesión $u = (u_n)$ de números complejos y cada $f \in E$ designamos

$$p_{A,u}(f) = p_u(f) = \sum_{p=0}^{\infty} \|f^{(p)}\| \cdot |u_p|.$$

Si h es un conjunto de sucesiones complejas (o, equivalentemente, el espacio vectorial de sucesiones por él engendrado) con la condición de *no anularse en ninguna coordenada* (para cada índice m existe $u \in h$ con $u_m \neq 0$), en el espacio vectorial

$$E^h(A) = E^h = \{f \in E \;:\; p_u(f) < \infty \text{ para toda } u \in h\}$$

consideraremos la topología localmente convexa separada definida por la familia de seminormas p_u $(u \in h)$.

En virtud de la condición impuesta a h, del que supondremos es espacio vectorial, la envoltura normal $N(h)$ contiene a φ y además es $E^h = E^{N(h)}$ con coincidencia de topologías. Por ello *en lo que sigue supondremos que h es espacio vectorial de sucesiones complejas que es normal y contiene a φ.*

Si para cada $a \in A$ designamos $f^{(p)}(a) = d^p f(a)$, se cumple

PROPOSICIÓN 1. — Si en el α-dual h^x se considera la topología normal respecto del sistema dual $\langle h, h^x \rangle$, son uniformemente continuas las aplicaciones

$$\begin{aligned} v_a \;:\; & E^h \longrightarrow h^x && (a \in A) \\ & f \longrightarrow (\|f^{(m)}(a)\|) && \\ v \;:\; & E^h \longrightarrow h^x && \\ & f \longrightarrow (\|f^{(m)}\|) && \end{aligned}$$

así como, en el caso $n = 1$, las aplicaciones lineales

$$\begin{aligned} & E^h \longrightarrow h^x && (a \in A) \\ & f \longrightarrow (f^{(m)}(a)) && \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. — Si q_u $(u \in h)$ son las seminormas que definen la topología normal, se tiene

$$q_u(v_a(f) - v_a(g)) = \sum_{m=0}^{\infty} \big|\, \|f^{(m)}(a)\| - \|g^{(m)}(a)\| \,\big| \cdot |u_m| \leq$$

$$\leq \sum_{m=0}^{\infty} \|f^{(m)}(a) - g^{(m)}(a)\| \cdot |u_m| = p_u(f - g).$$

PROPOSICIÓN 2. — La topología de $E^h(A)$ es más fina que la de la convergencia uniforme de las funciones y sus derivadas.

DEMOSTRACIÓN. — El enunciado significa que la topología de E^h, definida por las seminormas p_u con $u \in h$ es más fina que la de las seminormas p_u con $u \in \varphi$ y se ha impuesto que h contenga a φ.

PROPOSICIÓN 3. — Si B es subconjunto de A, las restricciones

$$\begin{array}{ccc} E^h(A) & \longrightarrow & E^h(B) \\ f & \longrightarrow & f_B \end{array}$$

son lineales continuas.

DEMOSTRACIÓN. — $p_{u,B}(f_B) \leq p_{u,A}(f)$.

Si se consideran los $G \supset A$, se supone siempre a G abierto de R^n, los $E^h(G)$ forman un sistema inductivo de espacios localmente convexos respecto de las restricciones y será

$$E^{(h)}(A) = E^{(h)} = \varinjlim_{A \subset G} E^h(G)$$

Considerando los $K \subset A$, K siempre compacto en el que está definido $E(K)$ de R^n, los $E^h(K)$ forman sistema proyectivo de *e.l.c.* respecto de las restricciones y será

$$E_h(A) = E_h = \varprojlim_{A \supset K} E^h(K)$$

que está constituido por las funciones $f: A \to C$ tales que $f_K \in E^h(K)$ para todo K que esté contenido en A.

Se comprueban fácilmente:

PROPOSICIÓN 4. — Por restricción se obtienen las dos aplicaciones lineales continuas

$$E^{(h)}(A) \xrightarrow{k} E^h(A) \underset{\text{inyectiva}}{\xrightarrow{j}} E_h(A)$$

PROPOSICIÓN 5. — Las aplicaciones k y j permiten identificar (conjuntísticamente y topológicamente)

$$E^{(h)}(G) \overset{k}{=} E^h(G)$$

$$E_h\ (K) \overset{j}{=} E^h(K).$$

Para demostrar las proposiciones anteriores basta utilizar las propiedades universales de los espacios $E^{(h)}$ y E_h.

§ 2. — PROPIEDADES DE CONVERGENCIA

El superíndice $^{(m)}$ lo usaremos para indicar «imagen por la aplicación $d^m : f \to f^{(m)}$».

TEOREMA 1.a. — Sea F filtro (o red) de $E^h(A)$ y $f \in E(A)$ tales que:

(a) $F^{(m)} \to f^{(m)}$ puntualmente para todo $m = 0, 1, 2, \ldots$

(b) F es de Cauchy en $E^h(A)$.

Entonces se cumple $f \in E^h(A)$ y $F \to f$ en $E^h(A)$.

DEMOSTRACIÓN. — Sean (g_i) cualquier red asociada a F ($F = (g_i)$ si F es red), $\varepsilon > 0$ y $u \in h$.

Según (b) existe i_0 tal que, si $i, j \geq i_0$,

$$\sum_{k \geq 0} ||g_i^{(k)} - g_j^{(k)}|| \cdot |u_k| \leq \varepsilon,$$

si $i, j \geq i_0$ para todo $m \in N$ se tiene

$$\sum_{k=0}^{m} ||g_i^{(k)} - g_j^{(k)}|| \cdot |u_k| \leq \varepsilon \tag{1}$$

y por lo tanto, si existen los límites, se cumplirá

$$\sum_{k=0}^{m} \lim_{j} \|g_i^{(k)} - g_j^{(k)}\| \cdot |u_k| \leq \varepsilon \tag{2}$$

siempre que sea $i \geq i_0$ y para todo $m \in N$.

Pero, fijando $k \in N$ y tomando $u \in h$ tal que $u_k = 1$, utilizando la hipótesis (a) resulta

$$\|g_i^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)\| = \lim_{j} \|g_i^{(k)}(x) - g_j^{(k)}(x)\| \cdot |u_k| \leq \varepsilon$$

para todo $i \geq i_0$, es virtud de (1). Es decir

$$\|g_i^{(k)} - f^{(k)}\| \leq \varepsilon \quad \text{para todo} \quad i \geq i_0$$

de modo que

$$\big| \|g_i^{(k)} - g_j^{(k)}\| - \|g_i^{(k)} - f^{(k)}\| \big| \leq \|g_j^{(k)} - f^{(k)}\| \xrightarrow[j]{} 0$$

con lo que se cumple (2) y

$$\sum_{k=0}^{m} \|g_i^{(k)} - f^{(k)}\| \cdot |u_k| \leq \varepsilon \quad \text{si} \quad i \geq i_0$$

para todo $m \in N$. Haciendo ahora $m \to \infty$ se obtiene

$$p_u(g_i - f) \leq \varepsilon \quad \text{para todo} \quad i \geq i_0$$

lo que demuestra que $f \in E^h(A)$ y que $g_i \to f$.

TEOREMA 1. b. — Sean F filtro (o red) de $E_h(A)$ y $f \in E(A)$ tales que:

(a) $F^{(m)} \to f^{(m)}$ puntualmente en A para todo $m \in N$

(b) F es de Cauchy en $E_h(A)$.

Entonces se cumple $f \in E_h(A)$ y $F \to f$ en $E_h(A)$.

DEMOSTRACIÓN. — De la definición de $E_h(A)$ como límite proyectivo resulta fácil limitarse al caso $A = K$ compacto, caso en que $E_h = E^h$, y se puede aplicar el teorema 1. a.

De los teoremas anteriores resulta en muchos casos la completitud de los espacios de funciones que estamos considerando. Así el espacio $E^{\varphi}(A)$, constituido por las funciones $f \in E(A)$ tales que $||f^{(m)}|| < \infty$ para todo $m \in N$, es metrizable y su topología es la de la convergencia uniforme de las funciones y sus derivadas y se cumple:

COROLARIO. — Si $E^{\varphi}(A)$ es completo, también lo es todo $E^{h}(A)$

DEMOSTRACIÓN. — Es $E^{h}(A) \subset E^{\varphi}(A)$ con inclusión continua y se puede aplicar el teorema 1. a.

Análogamente, si para una familia exhaustiva (K_i) de compactos de A es completo cada $E(K_i) = E^{\varphi}(K_i)$, también lo será todo $E_h(A)$ como límite proyectivo de los $E^{h}(K_i)$ que son completos según el corolario anterior.

Si G es abierto, $E^{h}(G)$ y $E_h(G)$ son siempre completos.

TEOREMA 2. a. — Si F es filtro compacto de $E^{h}(A)$ (o sea, existe $M \in F$ compacto de $E^{h}(A)$) y si $\lim F = f \in E(A)$ para la topología de la convergencia puntual, entonces es $f \in E^{h}(A)$ y además $\lim F = f$ en $E^{h}(A)$.

DEMOSTRACIÓN. — Sobre M coinciden la topología inducida por $E^{h}(A)$, que es compacta, y la de la convergencia puntual, que es separada y menos fina. Se tiene $\lim F_M = f \in M$ en $E(A)$ puntualmente y en $E^{h}(A)$, luego $\lim F = f$ en $E^{h}(A)$.

Con la misma demostración se obtiene:

TEOREMA 2. b. — Si F es filtro compacto de $E_h(A)$ y además $\lim F = f$ en $E(A)$ puntualmente, entonces es $f \in E_h(A)$ y $\lim F = f$ en $E_h(A)$.

Diremos que h cumple (C) si:

(C) Para cada $u \in h$ existen $v \in h$ y $\varepsilon_n \to 0$ con $|u_n| = \varepsilon_n |v_n|$ (esencialmente $u_n/v_n \to 0$).

TEOREMA 3. a. — Si h cumple (C), $f \in E(A)$ y F es filtro (o red) de $E^{h}(A)$ que cumple:

(a) F acotado en $E^{h}(A)$

(*b*) $F^{(m)} \to f^{(m)}$ uniformemente para todo $m \in N$,
entonces $f \in E^h(A)$ y $F \to f$ en $E^h(A)$.

Demostración. — Sea $M \in F$ acotado en $E^h(A)$ y sea (g_i) red de M asociada a F, que cumplirá

$$g_i^{(m)} \to f^{(m)} \quad \text{uniformemente para todo } m \in N.$$

Fijemos $u \in h$, de modo que existe $L > 0$ tal que

$$p^n(g) < L \quad \text{para todo } g \in M$$

y de $||g_i^{(m)}|| \to ||f^{(m)}||$ resulta fácilmente $p_u(f) \leq L$ con lo que $f \in E^h(A)$.

Dado $\varepsilon > 0$ tomemos $v \in h$ como en (C), de manera que

$$\varepsilon_n < \varepsilon / 2\, L_v \quad \text{si} \quad n \geq n_0$$

en donde $L_v > 0$ cumple

$$\Sigma\, ||g^{(m)} - f^{(m)}|| \cdot |v_m| \leq L_v \tag{1}$$

para todo $g \in M$ (es $-f + M$ acotado).

De la hipótesis (*b*) se tiene la existencia de $M' \in F$ contenido en M tal que

$$||g^{(m)} - f^{(m)}|| < \varepsilon/2\, |u_m|\, n_0 \quad \text{si} \quad m < n_0 \quad \text{y si} \quad u_m \neq 0$$

con lo que tenemos

$$\sum_{m=0}^{n_0-1} ||g^{(m)} - f^{(m)}|| \cdot |u_m| < \varepsilon/2 \quad \text{si} \quad g \in M \tag{2}$$

y de (1) y (2) resulta

$$p_u(g - f) < \varepsilon \quad \text{para toda} \quad g \in M' \in F,$$

o sea $F \to f$ en $E^h(A)$.

Teorema 3. b. — Si h cumple la propiedad (C) y si se tienen una función $f \in E(A)$ y un filtro (o una red) F de $E_h(A)$ que cumplen:

(a) F es acotado en $E_h(A)$

(b) $F^{(m)} \to f^{(m)}$ uniformemente sobre cada compacto de A, entonces $f \in E_h(A)$ y $F \to f$ en $E_h(A)$.

DEMOSTRACIÓN. — Análoga a la anterior razonando sobre cada compacto K de A en lugar de hacerlo sobre A (sustituir p_u por $p_{K,u}$, «convergencia uniforme» por «convergencia uniforme sobre cada $K \subset A$», etc.).

COROLARIO. — Si $E^{\varphi}(A)$ (resp. $E_{\varphi}(A)$) es semi-Montel y si h cumple (C), también es semi-Montel $E^h(A)$ (resp. $E_h(A)$).

DEMOSTRACIÓN. — Es $E^h \subset E^{\varphi}$ (resp. $E_h \subset E_{\varphi}$) y la convergencia en E^{φ} (resp. en E_{φ}) es la uniforme (resp. uniforme sobre cada compacto) de funciones y derivadas y las inclusiones son continuas. Para comprobar la propiedad de Montel se pueden considerar ultrafiltros y aplicar el teorema 3.

En vista de los resultados anteriores interesará tener ejemplos y condiciones bajo las que h cumpla la propiedad (C).

PROPOSICIÓN 6. — Si h cumple (C) y (M_n) es una sucesión numérica con todos los términos no nulos, el transformado diagonal

$$(M_n)\, h = \{(M_n u_n) : u \in h\}$$

también cumple (C).

DEMOSTRACIÓN. — Dado $(M_n u_n) \in h$, $|u_n| = \varepsilon_n |v_n|$ con $v \in h$ implica

$$|M_n u_n| = |M_n|\, |u_n| = \varepsilon_n |M_n|\, |v_n| = \varepsilon_n |M_n v_n|$$

con $(M_n v_n) \in (M_n)\, h$.

Para estudiar los ejemplos será útil:

LEMA. — Sea $\Sigma\, a_n$ serie convergente de términos ≥ 0 de suma S. Para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión $0 < \delta_n \to \infty$ monótona tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n a_n < S + \varepsilon$$

DEMOSTRACIÓN. — Sea $0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ sucesión de N tal que los restos que definen cumplan

$$\sum_{n > n_k} a_n < \varepsilon/(k+1)\,2^k$$

y tomemos

$$\delta_n = k \quad \text{si} \quad n_k < n \leq n_{k+1}$$
$$\delta_n = 1 \quad \text{si} \quad n \leq n_1$$

con lo que $0 < \delta_n \to \infty$ creciendo y además

$$\sum \delta_n a_n = a_0 + \ldots + a_{n_1} + 2 \sum_{n_1 < n \leq n_2} a_n + \ldots + (k+1) \sum_{n_k < n \leq n_{k+1}} a_n +$$
$$+ \ldots < S + \varepsilon/2 + \ldots + \varepsilon/2^k + \ldots = S + \varepsilon.$$

PROPOSICIÓN 7. — No cumplen la propiedad (C) los espacios

$$1^\infty, \ c$$

Cumplen la propiedad (C) los espacios de sucesiones $c_0, \varphi, \omega, 1^p$ con $0 < p < \infty$, $h[r]$ con $0 \leq r < \infty$, $h(r)$ con $0 < r \leq \infty$

Lo mismo sucederá con los transformados diagonales.

DEMOSTRACIÓN. — En los casos 1^∞ y c basta considerar $u = (1, 1, \ldots, 1, \ldots)$ y si v cumple $1 = \varepsilon_n |v_n|$ con $\varepsilon_n \to 0$, v no está acotada.

La propiedad (C) significa que para cada u existe $0 < \delta_n \to \infty$ tal que $v = (\delta_n u_n)$ es de h. Esta propiedad se cumple para φ y para ω tomando $0 < \delta_n \to \infty$ arbitraria. Es fácil también comprobarla para c_0. Para $h[r]$ y para $h(r)$ sirve siempre $\delta_n = n$ (si $n > 0$) puesto que

$$\limsup |u|^{1/n} = \limsup (n\,|u_n|)^{1/n}.$$

Para el caso 1^p, si $\Sigma\,|u_n|^p < \infty$ se consigue la sucesión (δ_n) tal que $\Sigma\ \delta_n^p\,|u_n|^p < \infty$ aplicando el lema.

§ 3. — EJEMPLOS

1) $E_\varphi(G)$ está constituido por todas las $f: G \to C$ que son de clase C^∞ sobre cada compacto K de G (restricción a K de $g_K: R^n \to C$

de clase C^∞). Su topología es la de la convergencia uniforme de las funciones y sus derivadas sobre cada compacto.

2) $E^\varphi(A) = E^\infty(A)$ es el espacio de las funciones $f \in E(A)$ acotadas ellas ellas y sus derivadas sobre A, con la topología de la convergencia uniforme de las funciones y sus derivadas.

Se cumplirá

$$E^{(\varphi)}(A) = \varinjlim_{A \subset G} E^\infty(G)$$

que, si A es compacto, coincide con

$$\varinjlim_{A \subset G \text{ acotado}} E(G)$$

3) Si $h = (1/M_n)\, h(\infty)$ se cumple (suponemos $M_n > 0$)

$$\begin{aligned} E^h(A) &= \{f \in E(A) : \Sigma \frac{\|f^{(m)}\|}{M_n} |u_n| < \infty \quad \text{si} \quad u \in h(\infty)\} = \\ &= \{f \in E(A) : (\|f^{(m)}\|) \in (M_n)\, h[0]\} = \\ &= \{f \in E(A) : \|f^{(m)}\| \leq M_m \cdot a_f \cdot b_f^m,\ a_f > 0,\ b_f > 0\} \end{aligned}$$

que, con notación análoga a la habitual, designaremos

$$C^A\{M_n\}$$

(ver, p. e., Mandelbrojt).

4) Análogamente

$$E_{(1/M_n)\, h(\infty)}(G) = C_G\{M_n\}$$

y está constituido por las funciones $f: G \to C$ de clase C^∞ sobre cada compacto K de G para las que se cumple

$$\|f^{(m)}\|_K \leq M_m \cdot a_{f\,K} \cdot b_{f,K}^m \quad \text{para todo } m \geq 0.$$

En la condición anterior se puede suponer $a_{f,K} = 1$ si se impone tan solo para los $m > 0$.

5) Si $0 < p \leq \infty$ se puede designar por $D^A\{M_n\}^p$ al espacio $E^h(A)$ con

$$h = (1/M_n)\, l^p$$

y está constituido por las $f \in E(A)$ que cumplen

$$\Sigma \frac{||f^{(m)}||}{M_n} |u_n| < \infty \quad \text{siempre que} \quad u \in l^p$$

En el *caso* $p = \infty$ escribiremos, simplemente, $D^A\{M_k\}$ (en correspondencia con los $D(A; \{M_k\})$ de Dales-Davies) y lo componen las $f \in E(A)$ tales que

$$\Sigma \frac{||f^{(m)}||}{M_m} < \infty.$$

Se trata de un espacio normable.

En el *caso* $1 < p < \infty$ está constituido por las $f \in E(A)$ que cumplen

$$\Sigma\, ||f^{(m)}||^q / M_m^q < \infty,$$

si $1/p + 1/q = 1$.

En el caso $0 < p \leq 1$ se trata del conjunto de las $f \in E(A)$ que satisfacen

$$||f^{(m)}|| \leq M_m \cdot b_f \quad \text{para todo } m \in N.$$

$D_A\{M_n\}^1$ es normable por medio de la norma

$$f \to \sup\, ||f^{(m)}||/M_m.$$

6) Análogamente se tienen

$$D^A\{M\}^p = E_{(M_n)\,1^p}(A)$$

($D^A\{M_n\}$ en el caso $p = \infty$), de las $f: A \to C$ que sobre cada compacto K de A son de $D^K\{M_n\}^p$.

7) $E^\omega(A) =$ está formado por las $f \in E(A)$ que cumplen

$$f^{(m)} = 0 \quad \text{para todo} \quad m > m_0(f)$$

Así, si es p. e. $A = I$ intervalo, se trata de las funciones polinómicas sobre I.

Obsérvese que respecto de su topología, que desde luego es más fina que la de la convergencia uniforme de las funciones y sus derivadas, una sucesión tiende a cero

$$(f_k) \to 0$$

si y solo si, además de la convergencia uniforme mencionada, existe un n_0 para el que $f_k^{(m)} = 0$ si $m \geq n_0$, para todo k.

En efecto, desde luego estas condiciones implican la convergencia a cero. Veamos el recíproco. Si no fuese cierto se podrían determinar

$$\begin{array}{lll} k_1 > 1 & \text{tal que} & u_{m_1}^{-1} = \|f_{k_1}^{(m_1)}\| \neq 0, \ 1 < m_1 \\ k_2 > k_1 & \text{con} & u_{m_2}^{-1} = \|f_{k_2}^{(m_2)}\| \neq 0, \ m_1 < m_2 \\ \ldots & & \end{array}$$

y completando con ceros los términos de la sucesión $u = (u_m)$ de términos ≥ 0 para la que los u_{m_i} se han construido por recurrencia, la sucesión parcial (f_{k_i}) no podría tener límite cero porque

$$p_u(f_{k_i}) \geq \|f_{k_i}^{(m_i)}\| u_{m_i} = 1 \quad \text{para todo} \quad i.$$

Como consecuencia se obtiene que un subconjunto M de $E^{\omega}(A)$ está acotado si y solo si $M^{(m)}$ son conjuntos uniformemente acotados de funciones y además existe un n_0 tal que

$$M^{(m)} = 0 \quad \text{para todo} \quad m \geq n_0.$$

8) Se tendrá una descripción análoga de $E_{\omega}(A)$. Sus elementos son las funciones $f : A \to C$ tales que $f_K \in E^{\omega}(K)$ para todo compacto K de A. Si A es abierto, son las funciones polinómicas.

§ 4. — Algebras de funciones diferenciables

Para h es equivalente que se cumpla que para todo $u \in h$ existan $v, w \in h$ tales que

$$|u_n| \leq |v_k| \cdot |w_{n-k}| / \binom{n}{k} \quad \text{si} \quad 0 \leq k \leq n$$

a la condición de que para cada $u \in h$ exista $v \in h$ tal que

$$\text{(A)} \qquad |u_n| \leq |v_k| \cdot |v_{n-k}| / \binom{n}{k} \quad \text{si} \quad 0 \leq k \leq n$$

debido a que h es un espacio normal de sucesiones.

Proposición 8. — Siempre que h cumpla que para todo u existe v que satisface (A), las clases $E^h(A)$ y $E_h(A)$ de funciones son álgebras sobre C cuyo producto cumple

$$p_u(f \cdot g) \leq p_v(f)\, p_v(g)$$

de modo que son álgebras topológicas.

Demostración. — Será

$$p_u(f \cdot g) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \|f^{(n)}\| \cdot \|g^{(n-k)}\| \cdot |v_k| \cdot |v_{n-k}| / \binom{n}{k} \leq p_v(f)\, p_v(g.)$$

Proposición 9. — Si para cada $u \in h$ existe $v \in h$ que cumple

$$\text{(A.C.)} \qquad |u_n| \leq |v_n| \leq |v_k| \cdot |v_{n-k}| / \binom{n}{k} \quad \text{si} \quad 0 \leq k \leq n,$$

entonces $E^h(A)$ y $E_h(A)$ son álgebras localmente multiplicativamente convexas.

No se mejora la condición (A.C.) sustituyendo la primera desigualdad por

$$|u_n| \leq a\, |v_n|$$

y manteniendo la segunda a causa de que se podría suponer $a > 1$ y de la normalidad de h.

Proposición 10. — l^∞ no cumple la condición de (A) pero si $M_n > 0$ cumplen

$$\binom{n}{k} \cdot M_k \cdot M_{n-k} \leq M_n \qquad (0 \leq k \leq n)$$

entonces $D^A\{M_n\}$ es álgebra normada y $D_A\{M_n\}$ es álgebra localmente multiplicativamente convexa.

Demostración. — De cumplirse (A) para los elementos de l^∞, para todo $K > 0$ debería existir una sucesión v, $|v_n| \leq M$, tal que

$$K \leq |v_1| \cdot |v_{n-1}|/n \leq M^2/n \to 0$$

en contradicción con $K > 0$.

Para

$$u = (M_0^{-1},\ M_1^{-1}, \ldots, M_n^{-1}, \ldots),$$

$p_{u,A}$ es norma suficiente para $D^A\{M_n\}$ que cumple

$$p_u(f \cdot g) \leq p_u(f)\, p_u(g)$$

mientras que $(p_{u,K})_K$ es sistema suficiente de seminormas para $D_A\{M_n\}$ que cumplen la misma propiedad de convexidad.

Proposición 11. — Para que $C^A\{M_n\}$ y $C_A\{M_n\}$ sean álgebras es suficiente que exista $M > 0$ tal que

$$M_k \cdot M_{n-k}/M_n \leq M^n \qquad (0 \leq k \leq n)$$

y esta condición se cumple si (M_n) es logarítmicamente convexa.

Demostración. — En virtud de la regla de Leibnitz

$$p_u(f \cdot g) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \|f^{(k)}\| \cdot \|g^{(n-k)}\|/M_n \right) |u_n| \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} b_f^k \cdot M_k \cdot b_g^{n-k} \cdot M_{n-k}/M_n \right) |u_n| \cdot a_f \cdot a_g \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} M'^k \cdot M_k \cdot M'^{n-k} \cdot M_{n-k}/M_n \right) |u_n| \cdot a_f \cdot a_g \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} L^n\, |u_n|\, a_f\, a_g < \infty$$

en donde $L = 2M'M$ y a_f, b_f, a_g, b_g son las constantes que se indican en el ejemplo 3 del § 3.

§ 5. — Casi analiticidad en la recta

Se dice que $F \subset E(A)$ es casi-analítica cuando cumple: «Si $f, g \in F$ son tales que $d^p f(x_0) = d^p g(x_0)$ para un $x_0 \in A$ y para todo $p \in N$, necesariamente $f = g$».

Proposición 12. — Sean $I = (a, b)$, h estable frente a todas las transformaciones diagonales del tipo $u \to (k^n) u$ con $k > 0$ y $E^h(I)$ álgebra. Entonces para que $E^h(I)$ sea casianalítica es necesario y suficiente que no posea funciones no nulas con soporte compacto.

Demostración. — Si no es casi-analítica existe $f \in E^h(I)$ nula en $c \in I$ ella y sus derivadas y no nula en un d que podemos suponer mayor que c. Tomando

$$f_1(x) = f(x) \quad \text{si} \quad x \geq c \quad \text{y} \quad f_1(x) = 0 \quad \text{si} \quad x < c$$

se obtiene una función de $E^h(I)$ nula en $x \leq c$ y no nula en d. Gracias a la estabilidad de h frente a las $u \to (k^n) u$, mediante una homotecia de centro un extremo de I se puede suponer $a < c < < (a + b)/2 = d < b$ y la función

$$f_2 : x \to f_1(a + b - x)$$

simétrica de f_1 respecto de $(a + b)/2$ también es de $E^h(I)$ y, al ser ésta un álgebra, se cumple $f_1 f_2 \in E^h(I)$, función no nula y de soporte compacto.

El recíproco es evidente. q. e. d.

La proposición anterior también es válida si $I = R$. Si I es una semirrecta, es necesario y suficiente para que se cumpla la casi-analiticidad que $E^h(I)$ no posea ninguna función no nula con soporte acotado en R.

Corolario. — Si las clases $E^h(I)$, $E^h(R)$ son álgebras y h es estable frente a las $u \to (k^n) u$, la casi-analiticidad de $E^h(I)$ es equivalente a la de $E^h(R)$.

Demostración. — Considerar restricciones a I, o prolongaciones a R por ceros, de funciones con soporte compacto.

En [3] se relacionará la casi-analiticidad de $E^h(R)$ con el problema de Watson y con la existencia de ciertas «funciones de Ostrowski» y se demostrará que, expresados convenientemente, se mantienen los criterios clásicos.

Universidad Autónoma de Barcelona
Bellaterra, junio de 1975

BIBLIOGRAFÍA

[1] CARLEMAN, T. *Les fonctions quasi analytiques*, Gauthier-Villars, París, 1926.

[2] CERDÁ, J., *Dualidad de Köthe y funciones analíticas*, Coll. Math., 22 (1971), 157-190.

[3] CERDÁ, J.-CUFI, J., *Casi analiticidad en algunas clases generales de funciones diferenciables*. Actas R. A. M. E. de Málaga (1976)

[4] DALES, H.G.-DAVIE, A.M., *Quasianalytic Banach Function Algebras*, J. of Funct. An., 13 (1973), 28-50.

[5] KÖTHE, G., *Topological Vector Spaces I*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1969.

[6] MANDELBROJT, S., *Séries Adhérentes, Régularisation des Suites, Applications*, Gauthier-Villars, París 1952.