SOBRE UNA CIERTA CLASE DE ESPACIOS TOPOLOGICOS

por

MANUEL VALDIVIA

En este trabajo introducimos una clase de espacios topológicos, más amplia que la de los espacios K-suslinianos, y estudiamos algunas de sus propiedades.

Los espacios vectoriales que utilizamos están definidos sobre el cuerpo de los números reales o de los números complejos. Todos los espacios topológicos que aparecen en este artículo son de Hausdorff. Un espacio topológico E es un espacio polaco, [2, p. 121] si es separable y admite una métrica d, compatible con su topología, de manera que el espacio métrico (E, d) es completo. Un espacio topológico es susliniano, [9], si es imagen continua de un espacio polaco. Un espacio topológico F es K-susliniano si existe un espacio polaco P y una aplicación φ de P en las partes compactas $K(F)$ de F, de manera que $\bigcup\{\varphi(x) : x \in P\} = F$, y dado un punto cualquiera z de P y un entorno V del conjunto $\varphi(z)$ existe un entorno U de z tal que $\varphi(U) \subset V$, [5].

Si A es un conjunto en un espacio topológico T, $D(A)$ es el conjunto de todos los puntos de T tales que si $x \in D(A)$ y W es un entorno cualquiera de x, entonces $W \cap A$ es un conjunto de segunda categoría en T. Representamos por $O(A)$ el interior de $D(A)$. Se dice que A tiene la propiedad de Baire si existe un abierto B en T de manera que $B \sim A$ y $A \sim B$ son conjuntos de primera categoría. Puesto que $A \sim O(A)$ es un conjunto de primera categoría, [5, p. 85], A tiene la propiedad de Baire si, y sólo si, $O(A) \sim A$ es un conjunto de primera categoría.

Necesitaremos después los dos siguientes resultados, [11]: a) *Sean E y F grupos topológicos tales que E es de segunda categoría y F es K-susliniano. Sea f un homomorfismo algebraico de E en F. Si la gráfica de f es cerrada, entonces f es continua.* [12]: b) *Si E es un espacio topológico regular susliniano existe un conjunto A de primera categoría, de manera que $E \sim A$ es un espacio polaco.*

DEFINICIÓN 1. *Decimos que un espacio topológico E es semisusliniano si existe un espacio polaco P y una aplicación φ de P en las partes cerradas de E, de manera que se cumplen las siguientes condiciones:*

1. $\bigcup\{\varphi(x) : x \in P\} = E$.

2. *Si (x_n) es una sucesión en P que converge a x_0 y $z_n \in \varphi(x_n)$, $n = 1,2,\ldots$, entonces (z_n) tiene un punto adherente perteneciente a $\varphi(x_0)$.*

PROPOSICIÓN 1. *Si E es un espacio topológico K-susliniano, entonces E es semi-susliniano.*

Demostración: Sea P un espacio polaco y sea φ una aplicación de P en las partes compactas de E, que define E como un espacio K-susliniano. Es obvio que sólo hemos de comprobar la condición 2 de la Definición 1. Sea (x_n) una sucesión en P que converge a x_0. Tomamos $z_n \in \varphi(x_n)$, $n = 1,2,\ldots$ Supongamos que (z_n) no tiene ningún punto adherente perteneciente a $\varphi(x_0)$. Entonces, dado $z \in \varphi(x_0)$ existe un entorno abierto $V(z)$ de z y un entero positivo $n(z)$, de manera que

$$z_n \notin V(z), \text{ para } n \geqslant n(z).$$

Puesto que $\varphi(x_0)$ es compacto y $\{V(z) : z \in \varphi(x_0)$ es un recubrimiento abierto de $\varphi(x_0)$, existe en $\varphi(x_0)$ un conjunto finito de puntos

$$\{z_1, z_2, \ldots, z_p\}$$

tal que

$$V = \bigcup\{V(z_q) : q = 1,2, \ldots, p\} \supset \varphi(x_0).$$

Hallamos ahora en P un entorno U de x_0, de manera que

$$\varphi(U) \subset V.$$

También hallamos un entero positivo n_0 mayor que $n(z_q)$, $q = 1,2, \ldots p$, tal que $x_{n_0} \in U$. Entoces

$$\varphi(x_{n_0}) \subset V,$$

Por otra parte $z_{n_0} \notin V$, lo cual es una contradicción. q. e. d.

NOTA 1. Hay espacios semi-suslinianos que no son K-suslinianos Por ejemplo, sea E un espacio numerablemente compacto, no compacto. Tomamos para P un espacio topológico que tenga un sólo punto x, y para φ la aplicación de P en E tal que $\varphi(x) = E$. Obviamente, se cumplen las condiciones 1 y 2 de la Definición 1 y, por lo tanto, E es un espacio semi-susliniano. Por otra parte, si E fuera K-susliniano sería de Lindelöf, [8], y puesto que es numerablemente compacto sería compacto, en contra de la hipótesis.

PROPOSICIÓN 2. *Si E es un espacio topológico semi-susliniano y F es un subespacio cerrado de E, entonces F es semi-susliniano.*

Demostración: Sea P un espacio polaco y φ una aplicación de P en las partes cerradas de E, que cumplan las condiciones 1 y 2 de la Definición 1. Sea Q el subespacio de P tal que $\varphi(x) \cap F \neq \varnothing$, para cada $x \in Q$. Si (y_n) es una sucesión en Q que converge en P a y_0, se tiene que

$$\varphi(y_n) \cap F \neq \phi, \; n = 1,2,...,$$

por lo que existe un

$$v_n \in \varphi(y_n) \cap F, \; n = 1,2,...$$

La sucesión (v_n) tiene un punto adherente v_0 en $\varphi(y_0)$. Puesto que F es cerrado, resulta que $v_0 \in F$, de aquí que

$$\varphi(y_0) \cap F \neq \phi,$$

lo que nos indica que Q es cerrado en P. Por lo tanto Q es un espacio polaco. Consideramos ahora la aplicación ψ de Q en las partes cerradas de F, tal que

$$\psi(x) = \varphi(x) \cap F, \, x \in Q.$$

Es inmediato comprobar ahora que se cumplen para Q, ψ y F las condiciones 1 y 2 de la Definición 1. q. e. d.

Para la Proposición 3, supongamos que tenemos un espacio topológico regular F, un espacio métrico completo separable P y una aplicación φ de P en las partes cerradas de un subespacio E de F, de manera que cumplan las condiciones 1 y 2 de la Definición 1.

Proposicion 3. *Si para cada $x \in P$, $\varphi(x)$ es cerrado en F, entonces E tiene la propiedad de Baire en F.*

Demostración: Sea $\{B_n : n = 1, 2, ...\}$ una familia numerable de bolas cerradas de P, de radios menores que 1, de manera que

$$\bigcup \{B_n : n = 1, 2, ...\} = P.$$

Supuesto construido el espacio métrico separable completo $B_{n_1 n_2 \dots n_p}$, para los números enteros positivos $n_1, n_2, \dots, n_p$, hallamos en $B_{n_1 n_2 \dots n_p}$ una familia numerable de bolas cerradas $\{B_{n_1 n_2 \dots n_p n} : n = 1, 2, \dots\}$, de radios menores que $1/2^p$, que recubren $B_{n_1 n_2 \dots n_p}$.

Puesto que

$$E = \bigcup \{\varphi(B_n) : n = 1, 2, ...\}$$

y

$$\varphi(B_{n_1} n_2 \dots n_p) = \bigcup \{\varphi(B_{n_1} n_2 \dots n_p n) : n = 1, 2, \dots\}$$

se tiene que los conjuntos

$$A = 0(E) \sim \bigcup \{0(\varphi(B_n)) : n = 1, 2, \dots\}$$

y

$$C_{n_1 n_2 \dots n_p} = 0(\varphi(B_{n_1 n_2 \dots n_p})) \sim \bigcup \{0(\varphi(B_{n_1 n_2 \dots n_p})) : n = 1, 2, \dots\}$$

son de primera categoría. Ponemos

$$\mathbf{C}(p) = \bigcup \{C_{n_1 n_2 \dots n_p} : n_1, n_2, \dots, n_p = 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbf{C} = \bigcup \{C(p) : p = 1, 2, \dots\}.$$

Entonces el conjunto

$$B = A \bigcup C$$

es de primera categoría.

Si $z \in 0(E) \sim B$ existe una familia numerable de números enteros positivos $\{m_p : p = 1, 2, \dots\}$ de manera que

$$z \in 0(\varphi(B_{m_1 m_2 \dots m_p})), \ p = 1, 2, \dots$$

Si $x_p \in B_{m_1 m_2 \dots m_p}$, la sucesión (x_p) es, evidentemente, de Cauchy en P y, por lo tanto, converge a un punto $x_0 \in P$. Veamos, ahora, que $z \in \varphi(x_0)$. En efecto, si suponemos que z no está en $\varphi(x_0)$, existe un entorno cerrado U de z en E, tal que $U \cap \varphi(x_0) = \varnothing$. Puesto que

$$U \cap \varphi(B_{m_1 m_2 \dots m_p}) \neq \varnothing,$$

tomamos $z_p \in U \cap \varphi(B_{m_1 m_2 \dots u_p})$ y $v_p \in B_{m_1 m_2 \dots m_p}$, de manera que $z \in \varphi(v_p)$. Puesto que la sucesión (v_p) converge a x_0 en P se tiene que la sucesión (z_p) tiene un punto de adherencia z_0 en $\varphi(x_0)$. El conjunto U es cerrado, luego $z_0 \in U$, de aquí que $\varphi(x_0) \cap U \neq \varnothing$, lo cual es una contradicción. c. q. d.

TEOREMA 1. *Si E es un espacio topológico regular semi-susliniano, existe un conjunto A de primera categoría en E, de manera que si $x \in E \sim$ $\sim A$ se puede obtener en E una familia numerable de entornos de x, $\{U_n : n = 1, 2, \dots\}$, tal que $\bigcap \{U_n : n = 1, 2, \dots\}$ es relativa numerablemente compacto.*

Demostración: Sea P un espacio polaco y φ una aplicación de P en las partes cerradas de E, que definan E como un espacio semi-susliniano. Sea $\{A_n : n = 1, 2, \dots\}$ una base de la topología de P. Si

$$M_n = [0(\varphi(A_n)) \sim \varphi(A_n)] \cup [\varphi(A_n) \sim 0(\varphi(A_n))]$$

ponemos

$$M = \bigcup \{M_n : n = 1, 2, \dots\}.$$

Puesto que A_n es un abierto de P, se tiene que A_n es un espacio polaco, [2 p. 122], por lo que, como es fácil de comprobar, $\varphi(A_n)$ es un espacio semi-susliniano, con la topología inducida por E.

Teniendo en cuenta la Proposición 3, $\varphi(A_n)$ tiene la propiedad de Baire en E y, por lo tanto, M_n es un conjunto de primera categoría, de donde se deduce que M es un conjunto de primera categoría. Podemos poner

$$M = \bigcup \{F_n : n = 1, 2, \dots\},$$

en donde F_n es un conjunto denso en ninguna parte. Si $\overline{F}_n$ es la clausura de F_n en E, entonces

$$A = \bigcup \{\bar{F}_n : n = 1, 2, \ldots\}$$

es un conjunto de primera categoría.

Tomemos ahora un punto x en $E \sim A$. Sea y_0 un punto de P tal que $x \in \varphi(y_0)$. Sea $\{B_n : n = 1, 2, \ldots\}$ la subfamilia formada por todos los elementos de $\{A_n : n = 1, 2, \ldots\}$ tal que

$$y_0 \in B_n, \; n = 1, 2, \ldots$$

Para cada entero positivo n hallamos un entorno W_n de x de manera que $W_n \cap \bar{F}_n^{\bullet} = \varnothing$.
Sea

$$\{U_n : n = 1, 2, \ldots\} = \{0(\varphi(B_n)) : n = 1, 2, \ldots\} \cup \{W_n : n = 1, 2, \ldots\}.$$

Se tiene que

$$0(\varphi(B_n)) \cap (E \sim A) = [([0(\varphi(B_n)) \sim \varphi(B_n)) \cap 0(\varphi(B_n))]$$
$$\cap (E \sim A) = \varphi(B_n) \cap 0(\varphi(B_n)) \cap (E \sim A) = \varphi(B_n) \cap (E \sim A),$$

de aquí que

$$x \in 0(\varphi(B_n)), \; n = 1, 2, \ldots$$

Si z pertenece a $\bigcap \{\varphi(B_n) : n = 1, 2, \ldots\}$ tomamos en B_n un elemento x_n tal que $z \in \varphi(x)$. Puesto que la sucesión (x_n) converge a y_0 se tiene que z pertenece a $\varphi(y_0)$, de aquí que

$$\{\varphi(B_n) : n = 1, 2, \ldots\} = \varphi(y_0)\}$$

que es un conjunto numerablemente compacto.

Finalmente,

$$\bigcap \{U_n : n = 1, 2, \ldots\} \subset [\{0(\varphi(B_n)) : n = 1, 2, \ldots\}] \cap (E \sim A) =$$
$$= [\bigcap\{\varphi(B) : n = 1, 2, \ldots\}] \cap (E \sim A) \subset \bigcap\{\varphi(B_n) : n = 1, 2, \ldots\} \subset \varphi(y_0).$$

c. q. d.

TEOREMA 2. *Si E es un espacio vectorial topológico semi-susliniano de Baire, entonces E es separable, metrizable y completo.*

Demostración: Utilizamos la misma notación que en la prueba del Teorema 1. Hallamos el conjunto de primera categoría A. Puesto que E es de segunda categoría, se tiene que $E \sim A$ no es vacío, de aquí que podamos tomar un $x \in E \sim A$. Haciendo, si fuera necesario, una traslación, podemos suponer que x coincide con el origen de E. Tomamos en E un entorno del origen V_1, equilibrado y abierto, contenido en U_1. Supuesto que hemos construido $V_1, V_2, \ldots, V_n$, hallamos un entorno del origen V_{n+1}, equilibrado y abierto, tal que

$$V_{n+1} + V_{n+1} \subset \frac{1}{n+1} (V_1 \cap V_2 \cap \ldots V_n \cap U_{n+1}).$$

Entonces $\{V_n : n = 1, 2, \ldots\}$, como es fácil de demostrar, forman una base de entornos del origen para una topología $\mathcal{T}$ sobre E, menos fina que la inicial, de manera que $E[\mathcal{T}]$ es un espacio vectorial topológico metrizable.

Si L es un antorno cerrado del origen en E, entonces existe un entero positivo n_1 tal que $n_1 \mathring{L}$ contiene $\varphi(y_0)$, puesto que $\varphi(y_0)$ es relativa, numerablemente compacto, siendo $\mathring{L}$ el interior de L. Supongamos que

$$\varphi(B_n) \not\subset n_1 \mathring{L}, n = 1, 2, \ldots$$

Tomamos $u_n \in B_n$ tal que

$$\varphi(u_n) \not\subset n_1 \mathring{L}, n = 1, 2, \ldots$$

y

$$v_n \in \varphi(u_n), v_n \notin n_1 \mathring{L}, n = 1, 2, \ldots \quad (1)$$

Puesto que la sucesión (u_n) converge en P a y_0, se tiene que (v_n) tiene un punto adherente en $\varphi(y_0)$, lo que está en contraidcción con (1).

Entonces existe un entero positivo q tal que

$$\varphi(B_{n_q})) \subset n_1 \mathring{L}$$

y, por lo tanto,

$$0 (\varphi(B_{n_q})) \subset n_1 L.$$

Hallamos un entero positivo n_2 de manera que $0 (f(B_{n_q})) = U_{n_2}$. Si p es un entero mayor que n_1 y n_2 resulta que

$$V_{p+1} \subset \frac{1}{p+1} (V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_p \cap U_{p+1}) \subset \frac{1}{p+1} V_p \subset \frac{1}{n_2} U_{n_2} \subset L,$$

de aquí que $E[\mathcal{T}] = E$.

Cada conjunto numerablemente compacto de E es compacto, de donde se deduce que E es K-susliniano, de aquí que E sea un espacio de Lindelöf, [8], por lo que resulta separable. Si $\hat{E}$ es la complección de E, aplicamos la Proposición 3 y obtenemos que E tiene la propiedad de Baire en $\hat{E}$ y, por lo tanto, [7 p. 113], $E \doteq \hat{E}$. c. q. d.

El siguiente Teorema es una extensión de un resultado dado en [10].

TEOREMA 3. *Sea E un grupo topológico K-susliniano de segunda categoría. Si existe en E un conjunto de primera categoría A tal que $E \sim A$ es metrizable, entonces el grupo topológico es metrizable, separable y completo para la uniformidad bilátera.*

Demostración: Sea $A = \bigcup \{F_n : n = 1,2,...\}$, de manera que F_n es denso en ninguna parte. Si $\bar{F}_n$ es la clausura de F_n en E, sea $B = \bigcup \{\bar{F}_n : n = 1,2,...\}$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que el elemento neutro e de E no está en B. Puesto que $E \sim B$ es metrizable, podemos hallar una familia $\{T_n : n = 1,2,...\}$ de entornos de e en E, de manera que

$$\{T_n \cap (E \sim B) : n = 1,2,...\}$$

sea una base de entorno de e en $E \sim B$. Para cada entero positivo n sea S_n un entorno de E tal que $S_n \cap \bar{F}_n = \varnothing$. Sea

$$\{U_n : n = 1,2,...\} = \{T_n : n = 1,2,...\} \cup \{S_n : n = 1,2,...\}.$$

Entonces $\bigcap \{U_n : n = 1,2,...\} = \{e\}$. Tomamos un entorno abierto simétrico V_1 de e en E tal que $V_1 \subset U_1$. Supuestos construidos $V_1, V_2, ..., V_n$ hallamos un entorno abierto simétrico V_{n+1} de e en E tal que

$$\overset{n+1}{V_{n+1} V_{n+1} \cdots V_{n+1}} \subset V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n \cap U_{n+1}.$$

Puesto que la familia $\{x V_n : x \in E\}$ recubre E y este espacio es de Lindelöf, [8], existe una sucesión $(a_{np})_{p=1}^{\infty}$ de elementos de E de manera que

$$\bigcup \{a_{np} V_n : p = 1,2,...\} = E. \qquad (1)$$

Suponemos que, para cada entero positivo n, e está en $(a_{np})_{p=1}^{\infty}$. Sea $\mathcal{B}$ el filtro de entorno de e engendrado por

$$\{a_{np}\, V_m\, a_{np}^{-1} : m, n, p = 1,2,\dots\}.$$

Es obvio que

$$\bigcap \{L : L \in B\} = \{e\}.$$

Si $T \in B$ también es inmediato que $T^{-1} \in B$. Tomemos ahora enteros positivos

$$n_i,\ p_i,\ m_i,\ i = 1,2,\dots, q,$$

tales que

$$\bigcap \{a_{n_i p_i}\, V_{m_i}\, a_{n_i p_i}^{-1} : i = 1,2,\dots, q\} \subset T$$

Si

$$W = \bigcap \{a_{n_i p_i} V_{m_i + 1}\, a_{n_i p_i}^{-1} : i = 1,2,\dots q\},$$

entonces W es un elemento simétrico de B tal que

$$\begin{aligned} WW \subset & \bigcap \{(a_{n_i p_i}\, V_{m_i - 1}\, a_{n_i p_i}^{-1})\,(a_{n_i p_i}\, V_{m_i + 1}\, a_{n_i p_i}^{-1}) : i = 1,2,\dots, q\} \\ & \subset \bigcap \{a_{n_i p_i}\, V_{m_i}\, a_{n_i p_i}^{-1} : i = 1,2,\dots, q\} \subset T. \end{aligned}$$

Finalmente, veamos que si $a \in E$ entonces $a\,T\,a^{-1}$ está en B. En efecto, teniendo en cuenta (1), hallamos enteros positivos r_i, s_i, $i = 1,2,\dots, q$ tales que

$$a a_{n_i p_i} \in a_{r_i s_i}\, V_{m_i + 3}$$

de aquí que

$$a_{r_i s_i}^{-1} \in V_{m_i + 3}\, a_{n_i p_i}^{-1}\, a^{-1},\quad a_{r_i s_i} \in a_{\,n_i p_i}\, V_{m_i + 3}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} a_{r_i s_i}\, V_{m_i + 3}\, a_{r_i s_i}^{-1} & \subset a a_{n_i p_i}\, V_{m_i + 3}\, V_{m_i + 3}\, V_{m_i + 3}\, a_{n_i p_i}^{-1}\, a^{-1} \\ & \subset a[a_{n_i p_i}\, V_{m_i}\, a_{n_i p_i}^{-1}], \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$\bigcap \{a_{r_i s_i}\, V_{m_i + 3}\, a_{r_i s_i}^{-1} : i = 1,2,\dots, q\} \subset a\,T\,a^{-1},$$

luego $a T a \in B$. Podemos afirmar que B define sobre E un grupo topológico separado $E[\mathcal{T}]$. de manera que la topología $\mathcal{T}$ es menos fina que la topología de E y $E[\mathcal{T}]$ es metrizable.

Sea ψ la inyección canónica de $E[\mathcal{T}]$ en E. Entonces ψ^{-1} es continua y, por lo tanto, ψ tiene la gráfica cerrada. Sea $\{X_n : n = 1,2,...\}$ una familia numerable de conjuntos cerrados de $E[\mathcal{T}]$ que recubren $E[\mathcal{T}]$. Puesto que E es de segunda categoría existe un entero positivo n_0 tal que X_{n_0} tiene un punto interior en E. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que este punto es e. Entonces $X_{n_0} \cap (E \sim B)$ es un entorno del elemento neutro en $E \sim B$, de aquí que $X_{n_0} \cap \cap (E \sim B)$ sea un entorno de e en $(E \sim B)[\mathcal{T}]$ y puesto que $E \sim B$ es denso en $E[\mathcal{T}]$ y X_{n_0} es cerrado en $E[\mathcal{T}]$ resulta que X_{n_0} es un entorno de e en $E[\mathcal{T}]$, de aquí que este espacio sea de segunda cateria. Aplicamos ahora el resultado a) y obtenemos que ψ es continua, de aquí que E sea metrizable. Puesto que E es un espacio de Lindelöf resulta que E es separable.

Supongamos ahora que H es la complección de E para la estructura uniforme bilátera. Puesto que E tiene la propiedad de Baire en H, [8], se debe verificar que $H \sim E$ es de primera categoría en H. Si $u_0 \in H$, $u_0 \notin E$, entonces $u_0 H$ es denso en H y homeomorfo a E, de aquí que $u_0 H$ es de segunda categoría en E. Esto es una contradicción por verificarse que $u_0 H \subset H \sim E$. c. q. d.

El Teorema siguiente también se encuentra en [12].

TEOREMA 4. *Si E es un grupo topológico susliniano de segunda categoría, entonces E es metrizable, separable y completo para la uniformidad bilátera.*

Demostración: De acuerdo con el resultado a), existe un conjunto A de primera categoría, de manera que $E \sim A$ es un espacio polaco. Aplicamos ahora el Teorema 3 y llegamos a la conclusión buscada. c. q. d.

NOTA 2. V. L. Klee, [5], demuestra que si E es un grupo abeliano topológico, que posee una métrica compatible con su topología, para la cual es completo, entonces E es completo. Con este resultado se da respuesta al problema propuesto por S. Banach, [1 p. 232] de si todo espacio vectorial topológico que es completo para alguna métrica compatible con su topología es completo.

Para obtener el anterior teorema de Klee, puede utilizarse el anterior Teorema 4 de la siguiente forma: si E es un grupo topológico separable que posee una métrica compatible con su topología, para la cual es completo, entonces E es susliniano y, por lo tanto ,aplicando el Teorema 4, ya que E es un espacio de Baire, resulta que E es completo para la uniformidad bilátera. En el caso que E no sea separable la demostración se deduce fácilmente a la anterior.

NOTA 3. En [4] J. Dieudonné demuestra que el grupo E de los homeomorfismos del intervalo $[0,1]$ en $[0,1]$, cuando se le dota a E de la topología que se deduce de la métrica

$$d(f, g) = \text{máx}\ \{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\}, f, g \in E,$$

es un grupo topológico que no se puede sumergir como subgrupo denso en ningún grupo topológico completo. Nosotros daremos ahora una prueba de esta propiedad. Dados los homeomorfismos f, g y h de $[0,1]$ en $[0,1]$, se tiene que

$$\begin{aligned} d(foh, gog) &= \text{máx}\ \{|(fog)(x) - (hog)(x)| : x \in [0,1]\} = \\ &= \text{máx}\ \{|f(g)x)) - h(g(x))| : x \in [0,1]\} = \\ &= \text{máx}\ \{|f(y) - h(y)| : y \in [0,1]\} = d(f, h), \end{aligned}$$

de aquí que la métrica d sea invariante por la derecha, de donde se deduce que d describe en E la uniformidad derecha. Hemos de ver ahora, para tener el resultado que buscamos, que la complección de (E, d) no es un grupo topológico, [3 p. 43].

Es fácil de comprobar que la métrica δ definida por:

$$\delta(f, g) = \text{máx}\ \{|f^{-1}(x) - g^{-1}(x)| : x \in [0,1]\}, f, g \in E,$$

describe la uniformidad izquierda en E y, por lo tanto,

$$q(f, g) = d(f, g) + \delta(f, g), f, g \in E,$$

define sobre E la uniformidad bilátera. Es inmediato que (E, q) es completo. Por otra parte E es separable, por lo que E es un espacio polaco. La complección H de (E, d) es el espacio de todas las funciones monótonas continuas de $[0,1]$ en $[0,1]$ y, por lo tanto $E \neq H$. Razonando ahora igual que en la prueba del Teorema 3, resultaría que si H fuera un grupo no podría ser distinto de E, lo cual es una contradicción.

BIBLIOGRAFIA

1. BANACH, S.: *Théorie des opérations linéaires*. Chelsea Publishing Company, New York.

2. BOURBAKI, N.: *Topologie Générale*, Chap. 9, Utilisation des nombres réels en topologie générale, Paris 1958.

3 BOURBAKI, N.: *Topologie Générale*. Chap. 3. Groupes topologiques, Paris 1960.

4. DIEUDONNÉ, J.: *Sur la completion des groupes topologiques*, C.R. Acad. Sci. Paris, vol. 218, p. 774-776 (1944).

5. KLEE, V.L.: *Invariant metrics in groups (solution of a problem of Banach)*. Proc. Amer. Math. Soc. *3*, 484-487 (1952).

6. KELLEY, J.L. and NAMIOKA, L.: *Linear Topological Spaces*, D. Van Nostrand Company, Inc. London, 1963.

7. KURATOWSKI, K.: *Topology*. Vol. I. Academic Press, New York and London, 1966.

8. MARTINEAU, A.: *Sur les théorèmes de S. Banach et de L. Schwartz concernant le graphe fermé*. Studia Math. T. XXX. p. 43-51 (1968).

9. SCHWARTZ, L.: *Sur le théorème du graphe fermé*, C. R. Acad. Sci. Paris, 263, ser. A, 602-605 (1966).

10. VALDIVIA, M.: *On the closed graph theorem in topological spaces*. Manuscripta Mathematica. (Pendiente de publicación).

11. NAKAMURA, M.: *On quasi-Suslin space and the closed graph theorem*. Proc. Japan Acad. 46 (6), 514-517 (1970).

12. DE WILDE, M. and SUNYACH, C.: *Un théorème de selection pour des applications à graphe borelién*. C. R. Acad. Sc. Paris *269*, 273-274 (1969).