ESTRUCTURAS DE TIPO $\phi(4, \pm 2)$ NORMALIDAD Y REFERENCIAS GLOBALES

por

PEDRO MARTÍNEZ GADEA

§ 1. INTRODUCCION

El estudio del problema de las G-estructuras, esbozado ya por S. Lie y E. Cartan, y cuyos fundamentos fueron puestos por Chern, en su comunicación al Coloquio de Geometría Diferencial de Estrasburgo de 1953, ha sido facilitado por la consideración de diversos conceptos unificadores. Entre ellos el estructura polinómica (ver Goldberg y Yano [8] (*)). Como es sabido, las estructuras casi complejas, casi producto y casi tangentes han sido muy estudiadas, en particular las dos primeras. Pueden ser consideradas conjuntamente a partir de la definición de extensión cuadrática del anillo **R** de números reales, obteniendo el concepto de estructura casi γ-compleja, (ver Grifone [9]). Consideradas como estructuras polinómicas cuadráticas, puede darse una expresión unificada, en términos de una condición algebraica o, equivalentemente, con el grupo a que puede reducirse el de transformaciones del fibrado tangente de una variedad diferenciable dotada de una de esas estructuras.

Las nociones de $\varphi(4,2)$-estructura y $\varphi(4, -2)$-estructura, introducidas por Yano, Houh y Chen [25], constituyen una generalización natural de las estructuras casi γ-complejas. Las $\varphi(4, \pm 2)$-estructuras son estructuras polinómicas cuárticas, sujetas a determinada condición sobre el rango.

La existencia de una $\varphi(4,2)$-estructura φ sobre una variedad diferenciable V, permite la descomposición del fibrado tangente en suma de Whitney de dos subfibrados, es decir,

$$TV = LV \oplus MV$$

(*) Los números entre corchetes remiten a la bibliografía.

Estos fibrados están asociados a dos operadores de proyección l y m deducidos de la estructura. Probamos la existencia de estructuras casi complejas en el espacio total del fibrado MV, asociadas a conexiones en el fibrado. Para el caso de las $\varphi(4, -2)$-estructuras, existe una descomposición análoga del fibrado tangente, y demostramos (ver [7]) la existencia de $\varphi(4,2)$-estructuras en el espacio total del fibrado LV correspondiente, asociadas a conexiones en el fibrado. Damos definiciones de normalidad de las $\varphi(4, \pm 2)$-estructuras. La primera definición de normalidad fue dada por Sasaki y Hatakeyama [16], en el estudio de las estructuras casi contacto, y es un concepto que se ha revelado útil para el estudio de subvariedades. Probamos que la normalidad equivale, en ambos casos, a la anulación de cinco campos tensoriales sobre la variedad, y de la curvatura de la conexión; y más, puede reducirse a la anulación de un solo campo tensorial, definido en términos del tensor de Nijenhuis de la estructura y de las componentes de la conexión. Para ello nos apoyamos en nuestro resultado sobre la integrabilidad de las $\varphi(4, \pm 2)$-estructuras (ver Gadea-Cordero [5]).

Por último, en el § 3 se estudia el caso de referencias globales — en el sentido que allí se indica —. Se prueba la existencia de estructuras casi complejas en la variedad producto $V \times W$ de dos variedades dotadas de $\varphi(4,2)$-estructuras con referencias globales, y de $\varphi(4,2)$-estructuras en la variedad producto de dos variedades dotadas de $\varphi(4, -2)$-estructuras con referencias globales. Se estudia el problema de normalidad para esas estructuras. Puede verse un ejemplo de variedad con $\varphi(4,2)$-estructura normal no trivial en Gadea [6]. Este trabajo es resumen de [7], que ha obtenido el Premio «Antonio de Gregorio Rocasolano» de la convocatoria de 1973 del C.S.I.C. para la especialidad de Matemáticas. Quiero hacer constar aquí mi más profundo agradecimiento al Prof. L.A. Cordero, cuyas contínuas ayudas y sugerencias han sido tan eficaces para la realización de este trabajo. El autor disfrutó durante su realización de una beca del Ministerio de Educación y Ciencia. Para las definiciones y primeras propiedades de las estructuras de tipo $\varphi(4,2)$ y $\varphi(4, -2)$ ver Yano-Houh-Chen [25].

§ 2. $\varphi(4,2)$-ESTRUCTURAS NORMALES

2.1. *Normalidad*

Sea V una variedad diferenciable de dimensión n con una $\varphi(4,2)$-estructura φ de rango r. Entonces existen dos distribuciones L y M, correspondientes a los operadores de proyección

$$l = -\varphi^2 \qquad ; \qquad m = \varphi^2 + l$$

El operador φ actúa en el fibrado tangente TV de la variedad V como una estructura casi compleja en la distribución L, y como una estructura casi tangente en la distribución M. Es bien conocido (ver p. ej. Dombrowski [4]) que, dada una conexión lineal ∇ en el fibrado tangente TW de una variedad W, entonces ∇ determina una estructura casi compleja en TW. Se verá en este epígrafe, por un método similar al de Dombrowski, que dada una conexión ω en el fibrado vectorial MV de todos los vectores tangentes pertenecientes a la distribución M, entonces ω determina una estructura casi compleja en MV. Pueden verse también: Cordero [3], Ishihara [11].

Si la estructura casi compleja en el fibrado vectorial MV es compleja analítica, se dice que la $\varphi(4,2)$-estructura φ de V es normal respecto de la conexión ω dada.

La noción de normalidad fue introducida por Sasaki y Hatakeyama [16] en el estudio de estructuras casi contacto, y caracterizaron la normalidad de la estructura por la anulación de un campo tensorial construdo a partir de la estructura. El concepto de normalidad parece ser útil en el estudio de subvariedades (Nakagawa [14]).

2.2. *Expresiones locales*

Sea V una variedad diferenciable de dimensión n con una $\varphi(4,2)$-estructura φ de rango r, y sean

$$l = -\varphi^2 \qquad\qquad m = \varphi^2 + l$$

los operadores de proyección. Se cumple (ver [25])

$$\begin{aligned} \varphi l = l\varphi = -\varphi^3 \quad &; \quad \varphi m = m\varphi = \varphi^3 + \varphi \\ \varphi^2 l = l\varphi^2 = -l \quad &; \quad \varphi^2 m = m\varphi^2 = 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

y las dimensiones de L y M, distribuciones correspondientes a l y m son, respectivamente, $2r - n$ y $2n - 2r$.

Sea U un entorno coordenado cualquiera de la variedad V. Si tomamos en U de modo arbitrario un conjunto ordenado $\{\varphi_x\}$ de $2n - 2r$ campos vectoriales contravariantes φ_x que generan la distribución M en cada punto, entonces existe en U un único conjunto ordenado $\{\varphi^y\}$ de $2n - 2r$ campos vectoriales covariantes, — es decir, 1-formas —, φ^y tales que

$$\sum_{x=n+1}^{3n-2r} \varphi^x \otimes \varphi_x = m \qquad ; \qquad \varphi^x(\varphi_y) = \delta_y^x \tag{2.2}$$

variando los índices x, y, z en el conjunto $\{n+1, ..., 3n - 2r\}$

De las relaciones (2,1) y (2.2.) se obtiene

$$\varphi^2 \varphi_x = 0 \qquad ; \qquad \varphi^y(\varphi^2 X) = 0$$

para cualquier vector X en cada punto de V. Se llama al conjunto ordenado $\{\varphi_x\}$ una $(2n - 2r)$-*referencia* y al conjunto ordenado $\{\varphi^y\}$ una $(2n - 2r)$-*correferencia*, dual a la $\{\varphi_x\}$.

Si un campo vectorial covariante ϕ, global o local, cumple en cada punto

$$\phi(X) = 0$$

para cualquier vector X que pertenece a la distribución L, entonces ϕ se dice que es ***transversal*** a L. Cualquier campo vectorial covariante ϕ transversal a L, se expresa de modo único como una combinación lineal de los φ^y en U, es decir,

$$\phi = \phi_y \varphi^y$$

Análogamente, cualquier campo vectorial contravariante X que pertenece a la distribución M se expresa de modo único como una combinación lineal de los φ_x en U, es decir,

$$X = X^x \varphi_x$$

Si son (η^a) las coordenadas locales definidas en U, y se denotan las componentes de φ, φ_y, φ^x respecto de (η^a) por φ_b^a, φ_y^a, φ_b^x, respectivamente, se tiene, en virtud de las relaciones anteriores que (los índices a, b, c, d, e varían en el conjunto $\{1, 2, ..., n\}$),

$$\begin{aligned} &\varphi_c^a \varphi_b^c = -\,\delta_b^a + \varphi_b^y \varphi_y^a \\ &\varphi_c^x \varphi_y^c = \delta_y^x \\ &\varphi_b^a \varphi_c^b \varphi_x^c = 0 \\ &\varphi_a^y \varphi_b^a \varphi_c^b = 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

2.3. *El fibrado vectorial MV.*

Sea MV el fibrado vectorial de todos los vectores tangentes que pertenecen a la distribución M, correspondiente al operador de proyección $m = \varphi^2 + 1$. El fibrado vectorial $p : MV \to V$ es un subfibrado vectorial del fibrado tangente TV de la variedad V.

Sea $M^* V$ el fibrado vectorial dual de MV. Si se toma un elemento $\tilde{\phi}$ de la fibra M_P^* — del fibrado M_V^* — sobre un punto P de V, entonces existe en P un único covector ϕ de V, el cual es transversal a la distribución L, tal que

$$\phi\,(v) = \tilde{\phi}\,(v)$$

para cualquier elemento v de la fibra M_P — de MV — sobre P. Y recíprocamente, para cualquier covector ϕ transversal a L en P existe un único elemento $\tilde{\phi}$ de M_P^* que cumple $\tilde{\phi}\,(v) = \phi\,(v)$. Es decir, se puede identificar, de modo natural, el fibrado $M^* V$ con el conjunto de todos los covectores transversales a la distribución L, y por tanto, considerar a $M^* V$ como un subfibrado del fibrado cotangente $T^* V$ de la variedad V.

Pueden considerarse de modo análogo, y según [11] las definiciones y fórmulas de ley de transformación de componentes de una conexión ω^* en MV; tensor F_P — valuado (F_P fibra de $M^* V \otimes MV$ en P), etc.

2.4. *Estructura casi compleja en MV*

Identificando cada espacio tangente a la fibra del fibrado vectorial

$$p : MV \to V$$

con la fibra misma, el espacio tangente $T_\sigma MV$ a la variedad MV en el punto σ, se puede expresar como suma directa

$$T_\sigma MV = T_p V \oplus F_p = L_p \oplus M_p \oplus F_p$$

siendo $P = p(\sigma) \in V$, y

$T_p V =$ espacio tangente de V en P
$F_p =$ fibra de MV
$L_p =$ el plano tangente perteneciente a L
$M_p =$ el plano tangente perteneciente a M.

Existe una identificación natural $j : M_p \to F_p$.

Sea ω^* una conexión en el fibrado vectorial MV. Dado un vector tangente X del espacio base V en P, se denota X^H el levantamiento horizontal de X en cada punto σ de la fibra $p^{-1}(P)$. Se define un operador lineal F_0 aplicado al espacio tangente $T_0 MV$ de la variedad MV en el punto σ por

$$\begin{aligned} F_\sigma(X^H) &= (\varphi X)^H && X \in L_p \\ F_\sigma(Y^H) &= j(Y) && Y \in M_p \\ F_\sigma(Z) &= -(j^{-1} Z)^H && Z \in F_p \end{aligned}$$

Se verifica que los operadores F_σ definidos en cada espacio tangente $T_\sigma MV$ determinan una estructura casi compleja F en la variedad MV, es decir que $F^2 = -I$, siendo I el operador unidad. En efecto,

$$F_\sigma F_\sigma(X^H) = F_\sigma(\varphi X)^H = (\varphi \varphi X)^H = -X^H$$

puesto que φ restringido a L es una estructura casi compleja.

$$\begin{aligned} F_\sigma F_\sigma(Y^H) &= F_\sigma Y = -(j^{-1} j Y)^H = -Y^H \\ F_\sigma F_\sigma(Z) &= F_\sigma(-j^{-1} Z)^H = -jj^{-1} Z = -Z \end{aligned}$$

Interesa considerar la representación tensorial F_i^h de la estructura F, (los índices $h, i, j, \ldots$ varían en el conjunto $\{1, 2, \ldots, 3n - 2r\}$).

Sea $\{U\}$ un recubrimiento abierto de la base V. Como el espacio fibra de MV es el espacio vectorial $\mathbf{R}^{2n-2r}$, la colección $\{p^{-1}(U) = U \times \mathbf{R}^{2n-2r}\}$. de representaciones de productos locales del fibrado MV sobre los abiertos U, forma un recubrimiento abierto de MV.

En un elemento $p^{-1} U = U \times \mathbf{R}^{2n-2r}$, cualquier elemento v de MV, tal que $p(v) \in U$, se expresa como (η^a, v^x) donde (η^a) son las coordenadas del punto $p(v)$ y $v = v^x \varphi_x$, siendo $\{\varphi_x\}$ una $(2n - 2r)$-referencia en U. Cualquier vector tangente del espacio total MV se expresa como

$$\begin{pmatrix} V^a \\ V^x \end{pmatrix}$$

es decir, si se llama $\partial^a = \partial / \partial \eta^a$, $\partial_x = \partial / \partial v^x$, es

$$V = V^a \frac{\partial}{\partial \eta^a} + V^x \frac{\partial}{\partial v_x} = V^a \partial_a + V^x \partial_x$$

si se identifican los espacios tangentes de $\mathbf{R}^{2n-2r}$ con el propio $\mathbf{R}^{2n-2r}$. Es decir, (η^a, b^x) son coordenadas locales definidas en cada entorno $p^{-1} U = U \times \mathbf{R}^{2n-2r}$ del espacio total MV.

Sea ω^* una conexión lineal en el fibrado MV y Γ^x_{cy} sus componentes respecto de las coordenadas locales (η^a) y de una $(2n - 2r)$-referencia $\{\varphi_x\}$ en un entorno U de V. Entonces, en el espacio tangente del espacio total MV en cualquier punto (η^a, v^x) de $p^{-1} U$, el plano horizontal está definido por una ecuación lineal

$$V^x + \Gamma^x_a V^a = 0 \tag{2.4}$$

donde

$$\Gamma^x_a = \Gamma^x_{ay} v^y \tag{2.5}$$

y el plano vertical por una ecuación lineal

$$V^a = 0 \tag{2.6}$$

Si en cada espacio tangente del espacio total MV se considera una referencia formada de $3n - 2r$ vectores $V_{(i)}$ de componentes $V^h_{(i)}$ tales que

$$(V^h_{(b)}) = \begin{pmatrix} V^a_{(b)} \\ V^x_{(b)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta^a_b \\ -\Gamma^x_b \end{pmatrix}$$

$$(V^h_{(y)}) = \begin{pmatrix} V^a_{(y)} \\ V^x_{(y)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta^x_y \end{pmatrix}$$

entonces los $V_{(b)}$ son horizontales y los $V_{(y)}$ verticales, de acuerdo con (2.4) y (2.6).

Es $V_{(b)} = (\partial_b)^H$ (ver [24]), de donde

$$V_{(b)} = (\partial_b)^H = (l\,\partial_b + m\,\partial_b)^H = (l\,\partial_b)^H + (m\,\partial_b)^H$$

y es

$$\begin{aligned} F V_{(b)} &= F((l\,\partial_b)^H + (m\,\partial_b)^H) = F(l\,\partial_b)^H + F(m\,\partial_b)^H = \\ &= (\varphi\, l\,\partial_b)^H + j\,m\,\partial_b = (-\varphi^3\,\partial_b)^H + j\,(\varphi^x \otimes \varphi_x)\,\partial_b = \\ &= (-\varphi^3\,\partial_b)^H + j\,\varphi_b^x\,\varphi_x = (-\varphi^3)_b^a\,V_{(a)} + \varphi_b^x\,V_{(x)} \\ F V_{(y)} &= -(j^{-1}\,V_{(y)})^H = -\varphi_y^H = -(\varphi_y^a\,\partial_a)^H = -\varphi_y^a\,V_{(a)} \end{aligned}$$

Se define pues, en cada espacio tangente del espacio total MV un operador lineal F tal que

$$F(V_{(b)}) = -\sum_{a=1}^{n} p_b^a\,V_{(a)} + \sum_{x=n+1}^{3n-2r} \varphi_b^x\,V_{(x)}$$

$$F(V_{(y)}) = -\sum_{a=1}^{n} \varphi_y^a\,V_{(a)}$$

siendo $p_b^a = (\varphi^3)_b^a$.

Los operadores lineales F así definidos determinan un campo tensorial de tipo (1,1) sobre el espacio total MV. Si se llama F_i^h a las componentes del campo tensorial F respecto de las coordenadas locales (η^a, v^x) definidas en el entorno $p^{-1}\,U = U \times \mathbf{R}^{2n-2r}$, se obtiene

$$\begin{aligned} (F_i^h) &= \begin{pmatrix} \delta_b^a & 0 \\ -\Gamma_b^x & \delta_y^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p_b^a & -\varphi_y^a \\ \varphi_b^x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_b^a & 0 \\ -\Gamma_b^x & \delta_y^x \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} -p_b^a & -\varphi_y^a \\ \Gamma_c^x p_b^c + \varphi_b^x & \Gamma_c^x \varphi_y^c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_b^a & 0 \\ \Gamma_b^x & \delta_y^x \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -p_b^a - \varphi_z^a \Gamma_b^z & -\varphi_y^a \\ \Gamma_c^x p_b^c + \varphi_b^x + \Gamma_c^x \varphi_z^c \Gamma_b^z & \Gamma_c^x \varphi_y^c \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Se verifica

$$\begin{pmatrix} -p_b^o & -\varphi_y^a \\ \varphi_b^x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p_b^a & -\varphi_y^a \\ \varphi_b^x & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\delta_b^a + \varphi_b^z \varphi_z^a - \varphi_b^z \varphi_z^a & p_e^a \varphi_y^e \\ -\varphi_d^x p_b^d & -\varphi_c^x \varphi_y^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta_b^a & 0 \\ 0 & -\delta_y^x \end{pmatrix}$$

en virtud de las relaciones (2.3), y ser $p_b^a = (\varphi^3)_b^a$, por tanto

$$F^2 = -I$$

siendo I el tensor identidad.

Por tanto, el campo tensorial F así definido es una estructura casi compleja en el espacio total MV del fibrado $p : MV \to V$. Se puede enunciar el

TEOREMA 2.1

Si una variedad diferenciable V admite una $\varphi(4,2)$-estructura φ de rango r, entonces existen estructuras casi complejas en el espacio total del fibrado vectorial, de dimension $2n - 2r$, MV sobre V. Dada una conexion de componentes Γ_{cy}^x en MV, entonces una estructura casi compleja $F = (F_i^h)$ está determinada por (2.7).

2.5. *Tensor de Nijenhuis de F.*

Sea V una variedad diferenciable dotada de una $\varphi(4,2)$-estructura φ de rango r, y sea ω^* una conexión en el fibrado vectorial MV. Sean Γ_{yc}^x las componentes de la conexión ω^* respecto de $\{\eta^a, \varphi_x\}$, donde (η^a) son coordenadas locales y $\{\varphi_x\}$ es una $(2n - 2r)$-referencia en un entorno U de V. Si se llama φ_b^a a las componentes de la estructura φ respecto a (η^a), y $p_b^a = (\varphi^3)_b^a = \varphi_c^a \varphi_d^c \varphi_b^d$, el tensor de Nijenhuis N_{cb}^a de $p_b^a = (\varphi^3)_b^a$ es, por definición,

$$N_{cb}^a = p_c^e \partial_e p_b^a - p_b^e \partial_e p_c^a - (\partial_c p_b^e - \partial_b p_c^e) p_e^a$$

Se define en U un campo tensorial S_{cb}^a de tipo (1,2) por

$$S_{cb}^a = N_{cb}^a + (\partial_c \varphi_b^z - \partial_b \varphi_c^z) \varphi_z^a - (\varphi_c^u \Gamma_{bu}^z - \varphi_b^u \Gamma_{cu}^z) \varphi_z^a$$

siendo (φ_x^a) y (φ_b^y) respectivamente las componentes de φ_x y φ^y.

Se definen además en U:

1) Un campo tensorial MV-valuado

$$S_{cb} = S_{cb}^x \varphi_x$$

de tipo (0,2) por

$$S^x_{cb} = p^e_c(\partial_e \varphi^x_b - \partial_b \varphi^x_e) - p^e_b(\partial_e \varphi^x_c - \partial_c \varphi^x_e) - (\varphi^z_c p^e_b - \varphi^z_b p^e_c)\, \Gamma^x_{ez}\,;$$

2) Un campo tensorial $M^* V$-valuado

$$S_{cb} = S^x_{cb}\, \varphi_x$$

de tipo (1,1) por

$$S^a_{cy} = \varphi^e_y \partial_e p^a_c - p^8_c \partial_n \varphi^a_y + p^a_e \partial_c \varphi^e_y + p^e_c \varphi^a_z - \Gamma^z_{ey}\,;$$

3) Un campo tensorial $MV \otimes M^* V$-valuado

$$S_c = S^x_{cy}\, \varphi_x \otimes \varphi^y \tag{2.8}$$

de tipo (0,1) por

$$S^x_{cy} = \varphi^e_y(\partial_e \varphi^x_c - \partial_c \varphi^x_e) + \varphi^z_c \varphi^e_y \Gamma^x_{ez} - \Gamma^x_{cy}$$

4) Un campo tensorial $MV \otimes M^* V$-valuado

$$S^a = S^a_{xy}\, \varphi^x \otimes \varphi^y$$

de tipo (1,0) por

$$S^a_{xy} = \varphi^e_x \partial_e \varphi^a_y - \varphi^a_y\, \partial_e \varphi^a_x - (\varphi^e_x \Gamma^z_{ey} - \varphi^e_y \Gamma^z_{ex})\, \varphi^a_z$$

Esos campos tensoriales cumplen

$$S^a_{cb} + S^a_{bc} = 0$$
$$S^x_{cb} + S^x_{bc} = 0$$
$$S^a_{xy} + S^a_{yx} = 0$$

Los campos tensoriales S^a_{cb}, S_{cb}, S^a_c, S_c y S^a definidos en cada entorno U, determinan campos tensoriales globales correspondientes en la variedad V. En efecto, tomando una conexión lineal simétrica cualquiera Γ^a_{cb} en V, se puede comprobar fácilmente que esos campos tensoriales se expresan respectivamente del modo siguiente:

$$
\begin{aligned}
S^a_{cb} &= N^a_{cb} + (\nabla_c \varphi^z_b - \nabla_b \nabla^z_c)\, \varphi^a_z \\
S^x_{cb} &= p^e_c (\nabla_e \varphi^x_b - \nabla_b \varphi^x_e) - p^e_b (\nabla_e \varphi^x_c - \nabla_c \varphi^x_e) \\
S^a_{cy} &= \varphi^e_y \nabla_e p^a_c - p^e_c \nabla_e \varphi^a_y + p^a_e \nabla_c \varphi^e_y \\
S^x_{cy} &= \varphi^e_y\, (\nabla_e \varphi^x_c - \nabla_c \varphi^x_e) \\
S^a_{xy} &= \varphi^e_x \nabla_e \varphi^a_y - \varphi^e_y \nabla_e \varphi^a_x
\end{aligned}
$$

haciendo uso de la diferenciación covariante introducida en [11]. De este modo los campos tensoriales locales, determinan campos tensoriales globales correspondientes en V. Estos tensores S son generalizaciones de los introducidos en [16].

En virtud del teorema **2**.1, dada una conexión lineal, existe una estructura casi compleja F en el espacio total MV, cuyas componentes F^h_i vienen dadas por (2,7). El tensor de Nijenhuis H^j_{hi} de la estructura casi compleja F es, por definición

$$
H^h_{ji} = F^l_j\, \partial_l F^h_i - F^l_i\, \partial_l F^h_j - (\partial_j F^l_i - \partial_i F^l_j)\, F^h_l,
$$

respecto a las coordenadas locales (η^a, v^x) en cada entorno $p^{-1}\, U = U \times \mathbf{R}^{2n-2r}$ del espacio total MV, donde, para simplificar, se considera $\eta^x = v^x$ y $\partial_i = \partial / \partial \eta^i$. Si se substituye (**2**.7) en el miembro de la derecha de la anterior igualdad y se tiene en cuenta (**2**.5) se obtiene

$$
\begin{aligned}
H^a_{cb} &= - S^a_{cb} - \Gamma^z_c S^a_{bz} - \Gamma^z_b S^a_{cz} + \Gamma^z_c \Gamma^x_b S^a_{zx} \\
H^x_{cb} &= - S^x_{cb} - \Gamma^z_c S^x_{bz} - \Gamma^z_b S^x_{cz} - \Gamma^x_d S^d_{cb} - \\
&- \Gamma^x_d (\Gamma^z_c S^d_{bz} - \Gamma^z_b S^d_{cz}) - \Gamma^z_c \Gamma^y_d S^d_{zy} \Gamma^x_d + \\
&+ R^x_{cb} - p^a_c p^d_b R^x_{ad} - \varphi^a_z (\Gamma^z_c p^d_b - \Gamma^z_b p^d_c)\, R^x_{ad} - \qquad (2.9) \\
&- \Gamma^z_c \varphi^a_z \Gamma^y_b \varphi^d_y R^x_{ad} - \Gamma^x_d (p^a_c R^z_{ab} - p^a_b R^z_{ac})\, \varphi^d_z - \\
&- \varphi^d_y \Gamma^x_d (\Gamma^z_c R^y_{ab} - \Gamma^z_b R^y_{ac})\, \varphi^a_z \\
H^a_{cy} &: - S^a_{cy} + R^z_{ce} \varphi^e_y \varphi^a_z + \Gamma^z_c S^a_{zy} \\
H^x_{cy} &= S^x_{cy} + S^d_{cy} \Gamma^x_d + \Gamma^z_c S^d_{zy} \Gamma^x_d - p^d_c\, \varphi^b_y R^x_{db} + \\
&+ \Gamma^z_e \varphi^d_z \varphi^a_y R^x_{ad} + \varphi^a_y \varphi^d_z \Gamma^y_c R^z_{ac} \\
H^a_{zy} &= S^a_{zy} \\
H^x_{zy} &= - S^e_{zy} \Gamma^x_e - \varphi^e_z \varphi^d_y R^y_{ed}
\end{aligned}
$$

donde

$$R^x_{cb} = R^x_{cby}\, v^y \tag{2.10}$$

y R^x_{cby} es el tensor de curvatura de la conexión Γ^x_{cy}, definido como se sabe por

$$R^x_{cby} = \partial_c \Gamma^x_{yb} - \partial_b \Gamma^x_{cy} + \Gamma^x_{cz} \Gamma^z_{by} - \Gamma^x_{bz} \Gamma^z_{cy}$$

En general, el tensor de Nijenhuis de una estructura casi compleja F^h_i satisface

$$\begin{aligned} H^h_{jl} F^l_i + H^k_{ji} F^h_k &= 0 \\ H^h_{jl} F^l_i - H^h_{ls} F^l_j &= 0 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Por tanto, si se considera (2.7) (2.9) y (2.10), se observa que los miembros de la izquierda de las ecuaciones (2.11) se pueden considerar como polinomios en las variables v^x. Identificando coeficientes, los términos independientes permiten obtener ecuaciones que contienen a S^a_{cb}, S^x_{cb}, S^a_{cy}, S^x_{cy}, S^a_{zy}, y se deduce

$$\begin{aligned} S^x_{cb} &= S^a_{yd}\, p^d_b\, \varphi^x_a - S^x_{dy}\, p^d_c\, \varphi^y_b \\ S^a_{by} &= S^a_{dc}\, p^d_b\, \varphi^c_y - S^c_{zy}\, \varphi^x_b\, p^a_c \\ S^x_{cy} &= S^x_{da}\, p^d_c\, \varphi^a_y + S^d_{zy}\, \varphi^z_c\, \varphi^x_d \\ S^a_{zy} &= - S^a_{cb}\, \varphi^c_z\, \varphi^b_y \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} S^a_{cb} &= 0 \Rightarrow S^a_{zy} = 0 \\ S^a_{cb} &= S^a_{zy} = 0 \Rightarrow S^a_{by} = 0 \end{aligned}$$

y $\quad S^x_{cy} = S^x_{da}\, p^d_c\, \varphi^a_y = - S^x_{ez}\, p^e_d\, p^d_c\, \varphi^z_a\, \varphi^a_y = - S^x_{ez}\, (p^2)^e_c\, \delta^z_y = - S^x_{ey}\, (p^2)_c$

pero, como S_e es $MV \otimes M^* V$-valuado, se obtiene

$$(p^2)^e_c\, S_e = (p^2)^e_c\, S^x_{ey}\, \varphi_x \otimes \varphi^y = 0$$

luego

$$S^x_{cy} = 0, \qquad \text{y de ahí,} \qquad S^x_{cb} = 0$$

Por tanto

$$S^a_{cb} = 0 \Rightarrow S^x_{cb} = 0, \quad S^a_{cy} = 0, \quad S^x_{cy} = 0, \quad S^a_{zy} = 0, \tag{2.12}$$

2,6 $\varphi(4,2)$-*estructura normal*

DEFINICION 2.2

Cuando la estructura casi compleja F definida por (2.7) *es compleja en el espacio total MV, se dice que la* $\varphi(4,2)$-*estructura* φ *es normal, respecto a la conexion* ω^* *dada en el fibrado MV. Como es bien sabido, una condicion necesaria y suficiente para que* φ *sea normal respecto a* ω^* *es que el tensor de Nijenhuis* H_{ji}^h *de* F_{ji}^h, *dado por* (2,9) *se anule idénticamente en el espacio total MV.*

Las ecuaciones obtenidas igualando cada componente de H_{ji}^h a cero, son ecuaciones en las variables v^x en virtud de (2.9). Por tanto, si $H_{ji}^h = 0$ entonces

$$\begin{aligned} &S_{cb}^a = 0 \qquad && S_{cy}^x = 0 \\ &S_{cb}^x = 0 && S_{zy}^a = 0 \\ &S_{cy}^a = 0 && \end{aligned} \tag{2.13}$$

pues esos tensores no contienen a ninguna de las v^x. Substituyendo (2.13) en las ecuaciones $H_{ji}^h = 0$ tenemos un sistema de ecuaciones lineales respecto a R_{cb}^x, de donde $R_{cb}^x = 0$, es decir,

$$R_{cby}^x = 0 \tag{2.14}$$

en virtud de (2.10).

Recíprocamente, si se supone (2.13) y (2.14) se tiene obviamente $H_{ji}^h = 0$.

En consecuencia, una condición necesaria y suficiente para que H_{ij}^h se anule idénticamente es que se satisfagan (2.13) y (2.14).

En definitiva se obtiene

PROPOSICION 2.3.

Una condición necesaria y suficiente para que una $\varphi(4,2)$-*estructura* φ *sea normal en una variedad diferenciable V, respecto de una conexion* ω^* *dada en el fibrado vectorial MV es que los campos tensoriales*

$$S_{cb}^a,\ S_{cb}^x,\ S_{cy}^a,\ S_{cy}^x,\ S_{zy}^a$$

se anulen idénticamente, y la conexión ω^* *tenga curvatura cero.*

En virtud de (2.12) y la proposición anterior, se deduce

TEOREMA 2.4

Una condición necesaria y suficiente para que una $\varphi\,(4{,}2)$-estructura φ sea normal en una variedad diferenciable, V, respecto de una conexión ω^* dada en el fibrado vectorial MV es que el campo tensorial S^a_{cb} se anule idénticamente y la conexión ω^* sea de curvatura cero.

Si una $\varphi\,(4{,}2)$-estructura φ en una variedad V es normal respecto a una conexión dada en el fibrado MV, entonces la conexión tiene curvatura cero por el teorema anterior. Así, si V es simplemente conexa, el fibrado MV es trivial, y es posible enunciar la

PROPOSICIÓN 2.5.

Si una $\varphi\,(4{,}2)$-estructura en una variedad V es normal respecto a una conexión dada en MV, entonces el fibrado vectorial $M\tilde{V}$, inducido de MV por la proyección de revestimiento Π: $\tilde{V} \to V$, es trivial, siendo $\tilde{V}$ el espacio de revestimiento universal de V.

Sea φ una $\varphi\,(4{,}2)$-estructura de rango r en una variedad V. Si el fibrado MV es trivial, se puede identificar de modo natural con el producto $V \times \mathbf{R}^{2n-2r}$. Entonces existe de modo natural una conexión ω^*_0, de curvatura cero en el fibrado $MV = V \times \mathbf{R}^{2n-2r}$. Es decir, aquella cuyas componentes se anulan respecto a cada sistema de coordenadas locales (η^a, v^x) de $V \times \mathbf{R}^{2n-2r}$, siendo (η^a) las coordenadas locales en V, y (v^x) las coordenadas cartesianas en $\mathbf{R}^{2n-2r}$. Si se supone que φ es normal respecto a ω^*_0, los campos tensoriales S están dados por las fórmulas (2.8) donde se anula Γ^z_{cy}, y cada S es un campo tensorial del tipo correspondiente en la variedad V para índices fijos x, y, z. En virtud del teorema 2.4, *una condición necesaria y suficiente para que φ sea normal respecto a ω^*_0 es que*

$$S^a_{cb} = N^a_{cb} + (\partial_c\,\varphi^z_b - \partial_b\,\varphi^z_c)\,\varphi^a_z = 0$$

Observación:

En el caso de ser φ una $\varphi\,(4{,}2)$-estructura en V ha sido posible introducir una estructura casi compleja en la variedad MV, por ser dim $MV = 2n - 2r + n = 2n - 2r + 2m$, por ser siempre dim $V = 2m$. Pero en el caso de ser φ una φ (4, $-$ 2)-estructura en V, en general no es par la dimensión de la variedad MV, al no serlo necesariamente la de V. Por tanto la definición general de normalidad de una φ (4, $-$ 2)-estructura será necesariamente distinta en cuanto al conjunto de tipos de estructuras utilizadas.

NOTA. Para resultados relativos al caso de φ (4, $-$ 2)-estructuras, ver [7].

§ 3. φ (4,2)-ESTRUCTURAS CON REFERENCIAS GLOBALES

3.1. φ (4,2)-*estructuras con referencias globales*

Sea V una variedad diferenciable de dimensión n, dotada de una φ (4,2)-estructura φ de rango r. Sea MV el fibrado vectorial formado por todos los vectores tangentes a V pertenecientes a la distribución M, correspondiente al operador de proyección $m = \varphi^2 + 1$. Se supone además que en el fibrado MV, de dimensión $2n - 2r$, existen $2n - 2r$ campos vectoriales contravariantes φ_y (los índices $x, y, z, \ldots$ varían en el conjunto $\{1, 2, \ldots, 2n - 2r\}$) que generan la distribución M en cada punto de la variedad V, y $2n - 2r$ campos vectoriales covariantes φ^x, tales que $\varphi^x(\varphi_y) = \delta^x_y$ y $\varphi^2 + 1 = \varphi_y \otimes \varphi^y$. Se llama al conjunto ordenado $\{\varphi_y\}$ de los campos vectoriales contravariantes φ_y una $(2n - 2r)$-*referencia* (*global*), y al conjunto ordenado de los campos vectoriales covariantes $\{\varphi^x\}$ una $(2n - 2r)$-*correferencia* (*global*).

DEFINICION 3.1.

Se llama φ (4,2)-*estructura con referencia complementaria, o simplemente* φ (4,2)-*estructura con referencia al conjunto* $\phi = (\varphi, \{\varphi_y\}, \{\varphi^x\})$ *formado por la estructura* φ, *la* $(2n - 2r)$-*referencia* $\{\varphi_y\}$, *y el conjunto ordenado* $\{\varphi^x\}$, *que satisfacen las condiciones anteriores.*

En una φ (4,2)-estructura con referencia de rango r, el operador de proyección m se expresa como

$$m = \varphi_y \otimes \varphi^y$$

Se deducen las siguientes ecuaciones, correspondientes a las (2.3), pero que son expresiones globales este caso

$$\begin{aligned} &\varphi^2 = -I + \varphi_y \otimes \varphi^y \\ &\varphi^x(\varphi_y) = \delta^x_y \\ &\varphi^2 \varphi_y = 0 \\ &\varphi^y(\varphi^2 X) = 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

siendo X un campo vectorial cualquiera sobre V.

Sea V una variedad diferenciable de dimensión n dotada de una φ (4,2)-estructura con referencia, ϕ, de rango r. Como se ha probado en 2.6 la variedad producto $V \times \mathbf{R}^{2n-2r}$ admite una estructura casi compleja. Las componentes del tensor de Nijenhuis de la estructura casi compleja inducida en $V \times \mathbf{R}^{2n-2r}$, son los tensores S definidos en 2.5 (véase mediante las fórmulas (2.9)), y se ha demostrado allí que si se anula idénticamente el tensor S^a_{cb}, entonces se anulan idénticamente S^x_{cb}, S^a_{cy}, S^x_{cy} y S^a_{cy}.

3.2. *Producto de dos variedades con φ (4,2)-estructuras con referencias*

Sea V una variedad diferenciable de dimensión n dotada de una φ (4,2)-estructura con referencia $\phi = (\varphi, \{\varphi_y\}, \{\varphi^x\})$ de rango r, y sea $\bar{V}$ una variedad diferenciable de dimensión $\bar{n}$ dotada de una φ (4,2)-estructura con referencia $\bar{\phi} = (\bar{\varphi}, \{\bar{\varphi}_w\}, \{\bar{\varphi}^z\})$ de rango $\bar{r}$. Se supone aquí además que $2n - 2r = 2\bar{n} - 2\bar{r}$.

Si se consideran recubrimientos por abiertos suficientemente pequeños, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de V, y $\bar{\mathcal{U}} = \{\bar{U}_\lambda\}_{\lambda \in A}$ de $\bar{V}$, y son $\{\eta^a\}$ y $\{\bar{\eta}^h\}$ sistemas de coordenadas locales de U_α en V, y $\bar{U}_\lambda$ en $\bar{V}$, respectivamente, entonces $\{\eta^a, \bar{\eta}^h\}$ puede ser considerado como un sistema local de coordenadas del abierto $U_\alpha \times \bar{U}_\lambda$ de la variedad $V \times \bar{V}$, y además la colección $\{U_\alpha \times \bar{U}_\lambda\}$ de los abiertos $U_\alpha \times \bar{U}_\lambda$ es un recubrimiento abierto de $V \times \bar{V}$. Sea $\mathcal{U} \times \bar{\mathcal{U}}$ ese recubrimiento.

Sean (U_α, η^a) y $(U_{\alpha'}, \eta^{a'})$ dos entornos coordenados en V tales que $U_\alpha \cap U_{\alpha'} \neq \phi$ y sean $(\bar{U}_\lambda, \bar{\eta}^h)$ y $(\bar{U}_{\lambda'}, \bar{\eta}^{h'})$ dos entornos en $\bar{V}$ tales que $\bar{U} \cap \bar{U}_\lambda = \phi$ (los índices varían aquí del siguiente modo;

$$
\begin{array}{ll}
a, b, c, \ldots & \varepsilon\{1, 2, \ldots, n\} \\
h, i, j, \ldots & \varepsilon\{n+1, \ldots, n+\bar{n}\} \\
x, y, z, \ldots & \varepsilon\{1, 2, \ldots, 2n-2r\} \\
A, B, C, \ldots & \varepsilon\{1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots, n+\bar{n}\}).
\end{array}
$$

Sean

$$\eta^{a'} = \eta^{a'}(\eta^b)$$

y

$$\eta^{h'} = \bar{\eta}^{h'}(\bar{\eta}^j)$$

las transformaciones de coordenadas en $U_\alpha \cap U_{\alpha'}$ y $\bar{U}_\lambda \cap \bar{U}_{\lambda'}$, respectivamente. Entonces la transformación de coordenadas en $(U_\alpha \times \times \bar{U}_\lambda) \cap (U_{\alpha'} \times \bar{U}_{\beta'})$ es

$$
\begin{aligned}
\eta^{a'} &= \eta^{a'}(\eta^b) \\
\bar{\eta}^{h'} &= \bar{\eta}^{h'}(\bar{\eta}^j)
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Sean TV, $T\bar{V}$ y $T(V \times \bar{V})$ los fibrados vectoriales tangentes a las variedades V, $\bar{V}$ y $Vx\ \bar{V}$ respectivamente. Se define un operador lineal F en el espacio tangente a cada punto de la variedad $V \times \bar{V}$ por

$$
\begin{aligned}
F(X) &= \varphi^3 X + \varphi^y(X)\,\bar{\varphi}_y, & X \in TV \\
F(Y) &= \bar{\varphi}^3 X + \bar{\varphi}^y(Y)\,\varphi_y, & X \in T\bar{V}
\end{aligned}
$$

El operador F verifica $F^2 = -I$. En efecto,

$$
\begin{aligned}
F^2 X = FFX &= F(\varphi^3 X) + F(\varphi^y(X)\,\bar{\varphi}_y) = \\
&= \varphi^3 X + \varphi^y(\varphi^6 X)\,\bar{\varphi}_y + \\
&+ \bar{\varphi}^3(\varphi^y(X)\,\bar{\varphi}_y) - \bar{\varphi}^z(\varphi^y(X)\,\bar{\varphi}_y)\,\varphi_z = \\
&= \varphi^6 X - \varphi^y(X)\,\delta^z_y\,\varphi_z = \\
&= -X + \varphi^y(X)\,\varphi_y - \varphi^y(X)\,\varphi_y = -X
\end{aligned}
$$

en virtud de (3.1) y analogamente se prueba $F^2 Y = -Y$. Sean $p^a_b = (\varphi^3)^a_b$ y $\bar{p}^j_i = (\bar{\varphi}^3)^j_i$. Se verifica que, si es

$$
F^B_A = \begin{pmatrix} F^b_a & F^b_i \\ F^j_a & F^j_i \end{pmatrix}
$$

cumple

$$F\left(\frac{\partial}{\partial \eta^a}\right) = F_a^b \frac{\partial}{\partial \eta^b} + F_a^j \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}^j} =$$

$$= p_a^b \frac{\partial}{\partial \eta^b} + \varphi_a^y \bar{\varphi}_y^j \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}^j}$$

$$F\left(\frac{\partial}{\partial \bar{\eta}^i}\right) = F_i^b \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}^b} + F_i^j \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}^j} =$$

$$= \bar{p}_i^j \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}^j} - \bar{\varphi}_i^y \varphi_y^b \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}^b}$$

de donde

$$F_A^B = \begin{pmatrix} p_a^b & -\bar{\varphi}_i^y \varphi_y^b \\ \varphi_a^y \bar{\varphi}_y^j & \bar{p}_i^j \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

en todo entorno coordenado de $\mathcal{U} \times \overline{\mathcal{U}}$. En virtud de la transformación (3.2), se prueba que (3.3) define un campo tensorial en la variedad producto $V \times \overline{V}$, ya que el jacobiano es de la forma

$$J = \begin{pmatrix} J_\eta & 0 \\ 0 & J_{\bar{\eta}} \end{pmatrix}$$

y por tanto, siendo $F = (F_A^B)$ y $F' = (F_{A'}^{B'})$, es

$$JFJ^{-1} = \begin{pmatrix} J_\eta & 0 \\ 0 & J_{\bar{\eta}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & * \\ * & \bar{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_\eta & 0 \\ 0 & J_{\bar{\eta}} \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} J_\eta p J_\eta^{-1} & 0 \\ 0 & J_{\bar{\eta}} \bar{p} J_{\bar{\eta}}^{-1} \end{pmatrix} = F'$$

Se verifica además que $F^2 = -I$. En efecto,

$$F^2 = \begin{pmatrix} p_a^b & -\bar{\varphi}_i^y \varphi_y^b \\ \varphi_a^y \bar{\varphi}_y^j & \bar{p}_i^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_a^b & -\bar{\varphi}_i^y \varphi_y^b \\ \varphi_a^y \bar{\varphi}_y^j & \bar{p}_i^j \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} p_c^b p_a^c - \bar{\varphi}_k^y \varphi_y^b \varphi_a^z \bar{\varphi}_z^k & - p_c^b \bar{\varphi}_i^y \varphi_y^c - \bar{\varphi}_k^y \varphi_y^b \bar{p}_i^k \\ \varphi_c^y \bar{\varphi}_y^j p_a^c + \bar{p}_k^j \varphi_a^y \bar{\varphi}_y^k & - \varphi_c^y \bar{\varphi}_y^j \bar{\varphi}_i^z \varphi_z^c + \bar{p}_k^j \bar{p}_i^k \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (p^2)_a^b - \varphi_y^b \varphi_a^y & 0 \\ 0 & (\bar{p}^2)_i^j - \bar{\varphi}_y^j \bar{\varphi}_i^y \end{pmatrix} = -I$$

Por tanto, el campo tensorial F_A^B es una estructura casi compleja en $V \times \overline{V}$. Se llamará a esa estructura F la *estructura casi compleja inducida en* $V \times \overline{V}$ *por las* $\varphi(4,2)$*-estructuras con referencia* ϕ *y* $\overline{\phi}$. Así, se puede enunciar la

PROPOSICION 3.2.

Sean V *una variedad diferenciable de dimensión* n *dotada de una* $\varphi(4,2)$*-estructura con referencia* ϕ *de rango* r, *y* $\overline{V}$ *una variedad diferenciable de dimensión* $\overline{n}$ *dotada de una* $\varphi(4,2)$*-estructura con referencia* $\overline{\phi}$ *de rango* $\overline{r}$, *tales que* $2n - 2r = 2\overline{n} - 2\overline{r}$. *Entonces la variedad producto* $V \times \overline{V}$ *admite una estructura casi compleja inducida por* ϕ *y* $\overline{\phi}$.

DEFINICION 3.3.

Sea V *una variedad diferenciable de dimensión* n, *dotada de una* $\varphi(4,2)$*-estructura con referencia* ϕ, *de rango* r. *La variedad producto* $V \times \mathbf{R}^{2n-2r}$ *admite una estructura casi compleja inducida por la estructura* ϕ. *Si la estructura casi compleja inducida es compleja analítica se dice que* ϕ *es normal.*

Interesa obtener la relación entre dos $\varphi(4,2)$-estructuras con referencia normales ϕ y $\overline{\phi}$ en dos variedades V y $\overline{V}$ respectivamente, y la estructura casi compleja inducida por ϕ y $\overline{\phi}$ en la variedad producto $V \times \overline{V}$.

PROPOSICION 3.4.

Una condición necesaria y suficiente para que una $\varphi(4,2)$*-estructura con referencia,* ϕ, *sea normal es que el tensor* S_{cb}^{a}, (2.8), *se anule idénticamente.*

En efecto. Esta proposición es en realidad un corolario del teorema 2.4, para el caso particular de que la $\varphi(4,2)$-estructura lo sea con referencia global.

Se calcula ahora el tensor de Nijenhuis K de la estructura casi compleja F definida en $V \times \bar{V}$, inducida por las $\varphi\,(4{,}2)$-estructuras con referencia ϕ de V y $\bar{\phi}$ de $\bar{V}$. La componente K^A_{CB} de K es por definición

$$K^A_{CB} = F^E_C\, v_E\, F^A_B - F^E_B\, v_E\, F^A_C - (v_C\, F^E_B - v_B\, F^E_C)\, F^A_E.$$

Entonces, en virtud de la expresión (3,3) de F, y de la definición (2.8) de los tensores S en V y $\bar{S}$ en $\bar{V}$ inducidos respectivamente por las $\varphi\,(4{,}2)$-estructuras con referencia ϕ y $\bar{\phi}$, se obtiene

$$\begin{aligned}
K^a_{cb} &= S^a_{cb} \\
K^a_{hb} &= \bar{\varphi}^y_h\, S^a_{yb} + \varphi^a_x\, \varphi^z_h\, \bar{S}^x_{hy} \\
K^a_{hi} &= -\,\varphi^a_x\, \bar{S}^x_{hi} + \bar{\varphi}^z_h\, \bar{\varphi}^y_i\, S^a_{zy} \\
K^h_{cb} &= \bar{\varphi}^h_x\, S^x_{cb} + \varphi^z_c\, \varphi^y_b\, \bar{S}^h_{zy} \\
K^h_{jb} &= -\,\varphi^y_b\, \bar{S}^h_{jy} + \bar{\varphi}^z_l\, \bar{\varphi}^h_x\, S^x_{zb} \\
K^h_{ji} &= \bar{S}^h_{ji}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Se supone ahora que las $\varphi\,(4{,}2)$-estructuras con referencia dadas, ϕ y ϕ, en V y $\bar{V}$ respectivamente, son normales. Ya que los tensores S en V y $\bar{S}$ en $\bar{V}$ se anulan idénticamente por definición de normalidad, se obtiene

$$K^A_{CB} = 0$$

Recíprocamente, si la estructura casi compleja inducida en $V \times \bar{V}$ es compleja analítica, entonces en virtud de las ecuaciones (3.4), se deduce

$$S^a_{cb} = 0, \qquad \bar{S}^h_{ji} = 0$$

para esas condiciones equivalen respectivamente a la normalidad de ϕ y $\bar{\phi}$. Por tanto,

TEOREMA 3.5

Sean V y $\bar{V}$ dos variedades diferenciables dotadas de las $\varphi\,(4{,}2)$-estructuras con referencia ϕ y $\bar{\phi}$, respectivamente. Entonces una con-

dición necesaria y suficiente para que ϕ y $\overline{\phi}$ sean normales es que la estructura casi compleja en $V \times \overline{V}$ inducida por ϕ y $\overline{\phi}$ sea compleja analítica.

Sean ahora $V = \overline{V}$ y $\phi = \overline{\phi}$. Se sigue que ϕ es normal si y solo si la estructura casi compleja inducida por ϕ en $V \times \overline{V}$ es compleja analítica. Por tanto,

COROLARIO 3.6

Sea V una variedad diferenciable dotada de una $\varphi(4,2)$-estructura con referencia, ϕ, de rango r. Entonces las tres siguientes condiciones son equivalentes:

i) *El tensor S^a_{cb} se anula idénticamente.*

ii) *La estructura casi compleja inducida en $V \times \mathbf{R}^{2n-2r}$ por ϕ es compleja analítica.*

iii) *La estructura casi compleja inducida en $V \times V$ por ϕ es compleja analítica.*

NOTA. Para el caso de las estructuras de tipo $\varphi(4, -2)$ ver [7].

Departamento de Geometría
y Topología
Santiago de Compostela

BIBLIOGRAFÍA

[1] CLARK, R.S. y BRUCKHEIMER, M.R. *Tensor structures on a differentiable manifold*. Annali di Mat 54 (1961), 123-142

[2] CLARK, R.S. *Special geometric object fields on a differentiable manifold*. Tensor N.S. 13 (1963), 60-70.

[3] CORDERO, L.A. *P-normal almost product structures*. Tensor N.S. Vol. 28, (1974).

[4] DOMBROWSKI, P. *On the geometry of the tangent bundle*. J. Reine u. Angew. Math. 210 (1962), 73-88.

[5] GADEA, P.M. y CORDERO, L.A. *On integrability conditions of a structure satisfying* $\varphi^4 \pm \varphi^2 = 0$. Tensor N.S. 28 (1974), 78-82.

[6] GADEA, P.M. *Sobre las* φ (4,2)*-estructuras normales*. II Jorn. Mat. Luso-Españolas. Madrid, (1973).

[7] GADEA, P.M. *Estructuras polinómicas de tipo* φ (4, $\pm$ 2) *y estructuras casi tangentes*. Public. del Dep. de Geom. y Top. de Santiago de C., n.º 20 (1973).

[8] GOLDBERG, S.I. y YANO, K. *Polynomial structures on manifolds*. Ködai Math. Sem. Rep. 22 (1970), 199-218.

[9] GRIFONE, I. *Structures presque* γ*-complexes*. Grenoble, (1965).

[10] HUSEMOLLER, D. *Fibre bundles*, McGraw Hill, (1966).

[11] ISHIHARA, S. *Normal structure f satisfying* $f^3 + f = 0$. Ködai Math. Sem. Rep. 18 (1966), 36-47.

[12] KOBAYASHI, S. y NOMIZU, K. *Foundations of Differential Geometry, I y II*. Intersc. Publ. (1963 y 1969).

[13] MORIMOTO, A. *On normal almost contact structures*. J. Soc. Math. Japan, 15 (1963), 420-436.

[14] NAKAGAWA, H. *f-structure induced on submanifolds in space, almost Hermitian or Kählerian*. Ködai Math. Sem. Rep. 18 (1966), 161-183.

[15] NAKAGAWA, H. *On framed f-manifolds*. Ködai Math. Sem. Rep. 18 (1966), 293-306

[16] SASAKI, S. y HATAKEYAMA, Y. *On differentiable manifolds with certain structure which are closely related to almost contact structure, II*, Tôhoku Math. J. 13 (1961), 281-294.

[17] TACHIBANA, S. y OKUMURA, M. *On the almost complex structure of tangent bundles of Riemannian spaces*, Tôhoku Math. J. 14 (1962), 156-161.

[18] TANNO, S. *Almost complex structures in bundle space over almost contact manifolds*, J. Soc. Math. Japan 17 (1965), 167-186.

[19] YANO, K. *On a structure f satisfying* $f^3 + f = 0$. Tech. Report, n.º 12, (1961), Univ. of Washington.

[20] YANO, K. *On a structure defined by a tensor field f of type* (1,1) *satisfying* $f^3 + f = 0$. Tensor N.S. 14 (1963) 99-109.

[21] YANO, K. y LEDGER, A.J. *Linear connections of tangent bundles*. J. London Math. Soc. 39 (1964), 495-500.

[22] YANO, K. y KOBAYASHI, S. *Prolongations of tensor fields and connections to tangent bundles, I, General theory*, J. Math. Soc. Japan, 18 (1966), 194-210.

[23] YANO, K. e ISHIHARA, S. *Almost complex structures induced in tangent bundles*, Ködai Math. Sem. Rep. 19 (1967), 1-27.

[24] YANO, K. e ISHIHARA, S. *Horizontal lifts of tensor fields and connections to tangent bundles*. J. of Math. and Mech. vol. 16, n.º 9 (1967), 1015-1029.

[25] YANO, K, HOUH, C S y CHEN, B.Y. *Structures defined by a tensor field* φ *of type* (1,1) *satisfying* $\varphi^4 \pm \varphi^2 = 0$. Tensor N.S. 23(1972), 81-87.