SULLA PROPAGAZIONE DELLE ONDE NELLA TERMOIDRODINAMICA RELATIVISTA

per

GIUSEPPE ARCIDIACONO (a Roma)

1 — INTRODUZIONE

Nel precedente lavoro [1] abbiamo visto che nella «relatività proiettiva» basata sul cronotopo di De Sitter, le equazioni di Maxwell generalizzate ci forniscono una nuova formulazione della termoidrodinamica dei fluidi incompressibili. Passando al limite per r tendente all'infinito, si ricava il tensore energetico della termoidrodinamica relativista

$$(1,1) \qquad \boxed{T_{ik} = f^2 u_i u_k + f(u_i \bar{q}_k + u_k \bar{q}_i) + p\, \delta_{ik} + \bar{q}_i \bar{q}_k}$$

dove abbiamo indicato con f l'indice del fluido, ed abbiamo posto

$$(1,2) \qquad f^2 = \mu + p/c^2 = 2\,\mu_0\, F/n \quad ; \quad \bar{q}_i = q_i/fc^2$$

Inoltre vale la seguente equazione di stato

$$(1,3) \qquad 2p = f^2 c^2 - \bar{q}^2 \qquad \text{ovvero} \qquad p^2 = \mu^2 c^4 - q^2/c^2$$

Tra i fluidi termodinamici incompressibili si possono poi definire quelli che abbiamo chiamato «ideali», per i quali l'indice F e la entropia S sono date dalle formule [2]:

$$(1,4) \qquad F = \frac{(n-1)\,k_0}{2\,\mu_0\, c^2} \log \frac{T}{T_0} \quad ; \quad S = Fc^2/T$$

In particolare, se la conducibilità termica del fluido ideale é nulla ($q_i = 0$), l'indice F e la entropia S sono date da

$$\boxed{\mu_0 F = N \cdot T^n \qquad ; \qquad S = F c^2 / T} \tag{1,5}$$

dove N é una costante. Si ottiene così la legge generale della radiazione termica, trovata dallo Straneo in base alla sua teoria delle di mensioni fisiche [3], e che adesso si ritrova a partire dalle equazioni della termoidrodinamica. Infatti, la (5), per $n = 4$ ci dà la legge di radiazione del corpo nero, e per $n = 5/2$ quella della radiazione corpuscolare.

Nella prima parte di questo lavoro studieremo la propagazione delle onde nella termoidrodinamica relativista, secondo i due schemi di Eckart e di Landau-Lifchitz. Nella seconda parte estenderemo *i* risultati ottenuti, al caso della termoidrodinamica proiettiva.

Le onde nella termoidrodinamica secondo Eckart

Come é noto, nella termoidrodinamica secondo lo schema di Eckart [4], si parte dal seguente tensore energetico

$$\boxed{T_{ik} = \mu_0 F u_i u_k + p\, \delta_{ik} + (u_i q_k + u_i q_k) / c^2} \tag{2,1}$$

dove, per il significato dei simboli rimandiamo alla precedente memoria [1]. Uguagliando a zero la divergenza del tensore energetico, si ottiene l'equazione dinamica

$$\begin{aligned} &u_k \partial_i (\mu_0 F u_i) + \mu_0 F u_i \partial_i u_k + \partial_k p + \\ &+ (u_i \partial_i q_k + q_k \partial_i u_i + u_k \partial_i q_i + q_i \partial_i u_k) / c^2 = 0 \end{aligned}$$

Moltiplicandola per u_k si ricava l'equazione di continuità

$$c^2 \partial_i (\mu_0 F u_i) - dp / d\tau + q_i a_i / c^2 + \partial_i q_i = 0 \tag{2,2}$$

dove si é tenudo conto che dalla $u_i q_i = 0$ si deduce $u_i dq_i / d\tau = - a_i q_i$, e si é indicata con a_i l'accelerazione.

Occorre poi aggiungere l'equazione di conservazione della materia

$$\partial_i (\mu_0 u_i) = 0 \tag{2,3}$$

e quindi la (2) si semplifica ulteriormente

$$c^2 \mu_0 dF/d\tau - dp/d\tau + \partial_i q_i + a_i q_i/c^2 = 0 \tag{2,4}$$

Tenendo conto della equazione termodinamica

$$\mu_0 c^2 dF - dp = \mu_0 T dS \tag{2,5}$$

la (4) si può scrivere nel seguente modo

$$\mu_0 T dS/d\tau + \partial_i q_i + a_i q_i/c^2 = 0 \tag{2,6}$$

Portando la (2) nella equazione dinamica, essa diventa

$$\begin{aligned} \mu_0 F a_k + \frac{u_k}{c^2} \frac{dp}{d\tau} + \partial_k p + \\ + \frac{1}{c^2}\left(\frac{dq_k}{d\tau} - \frac{u_k}{c^2} q_i a_i + q_k \partial_i u_i + q_i \partial_i q_k\right) = 0 \end{aligned} \tag{2,7}$$

Dalla equazione di Kranys della conduzione termica [5]

$$q_i + \chi \frac{dq_i}{d\tau} = -\varkappa\left(\partial_i T + \frac{u_i}{c^2}\frac{dT}{d\tau}\right) \tag{2,8}$$

moltiplicandola per u_i, segue che $u_i dq_i/d\tau = 0$, e quindi si deduce che il vettore termico q_i é ortogonale alla accelerazione

$$a_i q_i = 0 \tag{2,9}$$

Si hanno infine le due equazioni di stato

$$p = p(\mu_0, T) \quad ; \quad S = S(\mu_0, T) \tag{2,10}$$

dove μ_0 e T sono le due variabili termodinamiche. Tenendo conto della (9) si hanno in definitiva le seguenti equazioni della termoidrodinamica, secondo lo schema di Eckart:

$$\text{(a)} \qquad \mu_0 F a_k + \frac{u_k}{c^2}\frac{dp}{d\tau} + \partial_i p + \frac{1}{c^2}\left(\frac{dq_k}{d\tau} + q_k \partial_i u_i + q_i \partial_i u_k\right) = 0$$

$$\text{(b)} \qquad \mu_0 T \frac{dS}{d\tau} - \partial_i q_i = 0 \qquad\qquad \text{(c)} \qquad \frac{d\mu_0}{d\tau} + \mu_0 \partial_i u_i = 0$$

$$\text{(d)} \qquad q_i + \chi \frac{dq_i}{d\tau} = -\varkappa\left(\partial_i T + \frac{u_i}{c^2}\frac{dT}{d\tau}\right)$$

$$\text{(e)} \qquad \frac{dS}{d\tau} = S'_{\mu_0}\frac{d\mu_0}{d\tau} + S'_T \frac{dT}{d\tau} \qquad\qquad \text{(f)} \qquad \frac{dp}{d\tau} = p'_{\mu_0}\frac{d\mu_0}{d\tau} + p'_T \frac{dT}{d\tau}$$

$$\text{(g)} \qquad u_i u_i = -c^2 \quad ; \quad u_i q_i = 0 \quad ; \quad a_i q_i = 0$$

Per studiare la propagazione delle onde nel fluido, consideriamo una ipersuperficie Σ del cronotopo, di equazione $\varphi(x_i) = \text{cost}$. Attraverso questa ipersuperficie siano continue le variabili del campo $(u_i, q_i, p, \mu_0, T, S)$, mentre possono presentare discontinuità di prima specie le loro derivate parziali prime rispetto alle x_i. Indicando con $(U_i, Q_i, \pi, m_0, \varphi, \sigma)$ le corrispondenti discontinuità, e procedendo come é stato precisato nel precedente lavoro [1], dalle equazioni (g) si deduce che

$$(2{,}11) \qquad u_i U_i = 0 \quad ; \quad u_i Q_i = 0 \quad ; \quad q_i U_i = 0$$

Dalla equazione dinamica (a), passando alle discontinuità, segue che

$$\mu_0 F U_k \dot\varphi + \frac{u_k}{c^2}\dot\varphi\,\pi + \pi\varphi_k + (Q_k\dot\varphi + q_k U_i \varphi_i + q_i U_k \varphi_i)/c^2 = 0$$

Moltiplicandola per $\varphi_k = \partial_k \varphi$ a ponendo

$$(2{,}12) \qquad X = U_i \varphi_i \quad ; \quad Y = Q_i \varphi_i \quad ; \quad \bar\varphi^2 = \varphi_i \varphi_i$$

otteniamo l'equazione algebrica

$$\text{(I)} \qquad \boxed{\mu_0 F X \dot\varphi + \frac{\pi}{c^2}\dot\varphi^2 + \pi\bar\varphi^2 + \frac{1}{c^2}(Y\dot\varphi_i + 2 q_i \varphi_i X) = 0}$$

Dalla equazione (b) di continuità, segue

$$\text{(II)} \qquad \boxed{\mu_0 T \dot{\varphi} \sigma + Y = 0}$$

Dalla equazione (c) di conservazione della materia, si ha

$$\text{(III)} \qquad \boxed{\dot{\varphi} m_0 + \mu_0 X = 0}$$

Dalla equazione (d) di Kranys, ponendo $k_0 = \varkappa / \chi$ si ricava la

$$Q_i \dot{\varphi} + k_0 \theta (\varphi_i + u_i \dot{\varphi} / c^2) = 0$$

la quale, moltiplicata per φ_i ci dà

$$\text{(IV)} \qquad \boxed{\dot{\psi} Y + k_0 \theta (\bar{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^2 / c^2) = 0}$$

Dalle (e) (f) seguono infine le due equazioni

$$\text{(V)} \qquad \boxed{\sigma = S'_{\mu_0} m_0 + S'_T \theta} \qquad\qquad \text{(VI)} \qquad \boxed{\pi = p'_{\mu_0} m_0 + p'_T \theta}$$

Otteniamo così un sistema di 6 equazioni algebriche omogenee nelle 6 incognite $(X, Y, \pi, m_0, \theta, \sigma)$. Dalle (II) e (III) si ricavano la X e la Y

$$X = - m_0 \dot{\varphi} / \mu_0 \qquad ; \qquad Y = - \mu_0 T \dot{\varphi} \sigma$$

mentre la (V) e la (VI) ci danno la σ e la π. Sostituendo tali valori nelle rimanenti equazioni, ci riduciamo al seguente sistema di due equazioni nelle due incognite (m_0, θ):

$$\text{(2,13)} \quad \left\{ \begin{aligned} & \left[F \dot{\varphi}^2 - p'_{\mu_0} (\bar{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^2 / c^2) + \frac{\mu_0 T}{c^2} \dot{\varphi}^2 S'_{\mu_0} + 2 q_i \varphi_i \dot{\varphi} / \mu_0 \right] m_0 + \\ & + \left[\frac{\mu_0 T}{c^2} \dot{\varphi}^2 S'_T - p'_T (\bar{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^2 / c^2) \right] \theta = 0 \\ & \frac{\mu_0 T}{c^2} S'_{\mu_0} \dot{\varphi}^2 m_0 + \left[\frac{\mu_0 T}{c^2} \dot{\varphi}^2 S'_T - k_0 (\bar{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^2 / c^2) \right] \theta = 0 \end{aligned} \right.$$

Perché tale sistema ammetta soluzioni non tutte nulle nelle discontinuità, (m_0, θ) occorre annullare il suo determinante, cioé

$$(2,14) \qquad \begin{vmatrix} \left(F + \frac{\mu_0 T}{c^2} S'_{\mu_0}\right) V^2 + \frac{2 q_N}{\mu_0} V - p'_{\mu_0} & \frac{\mu_0 T}{c^2} S'_T V^2 - p'_T \\ \frac{\mu_0 T}{c^2} S'_{\mu_0} V^2 & \frac{\mu_0 T}{c^2} S'_T V^2 - k_0 \end{vmatrix} = 0$$

dove abbiamo indicato con V la velocità di propagazione delle onde, e con q_N la componente del vettore termico, nella direzione spaziale di propagazione dell'onda, così definite

$$(2,15) \qquad V^2 = \dot{\varphi}^2 / (\overline{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^2/c^2) \qquad ; \qquad q_N^2 = (q_i \varphi_i)^2 / (\overline{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^2/c^2)$$

Sviluppando il determinante (14) otteniamo la seguente equazione di 4° grado nella velocità V:

$$(2,16) \qquad \boxed{\begin{aligned} &\frac{F \mu_0 T}{c^2} S'_T V^4 + \frac{2 q_N}{c^2} S'_T V^3 - 2 \frac{k_0 q_N}{\mu_0} V + k_0 p'_{\mu_0} + \\ &- \left[\left(k_0 F + \frac{\mu_0 T}{c^2} p'_{\mu_0} S'_T\right) + (k_0 - p'_T) \frac{\mu_0 T}{c^2} S'_{\mu_0}\right] V^2 = 0 \end{aligned}}$$

Tale equazione si semplifica notevolmente se la entropia soddisfa alla condizione $S'_{\mu_0} = 0$, oppure se la pressione p é tale che $p'_T = k_0$. In tal caso si avrá una equazione di stato del tipo

$$(2,17) \qquad p = k_0 T + A(\mu_0)$$

dove $A(\mu_0)$ é una arbitraria funzione di μ_0 [6]. Come si vede dalla (14) si ottiene l'equazione piu semplice

$$(2,18) \qquad \boxed{\left(F V^2 + \frac{2 q_N}{\mu_0} V - p'_{\mu_0}\right)\left(\frac{\mu_0 T}{c^2} S'_T V^2 - k_0\right) = 0}$$

la quale ci fornisce la velocità delle onde di entropia

$$(2,19) \qquad V^2 = k_0 c^2 / \mu_0 T S'_T$$

e le due velocità delle onde idrodinamiche

(2.20) $$F V^2 - (2 q_N/\mu_0)\, V - p'_{\mu_0} = 0$$

In particolare, se $q_N = 0$, avremo la velocità

(2,21) $$V^2 = p'_{\mu_0}/F$$

la quale, in assenza di scambi termici ($F = 1$), si riduce alla velocità $V^2 = p'_{\mu_0}$ delle onde idrodinamiche.

3. — Le onde nella termoidrodinamica secondo Landau-Lifchitz

A risultati un pò diversi si perviene se si utilizzano le equazioni della termoidrodinamica, secondo lo schema di Landau-Lifchitz [7]. In tale teoria si parte dal tensore energetico

(3,1) $$\boxed{T_{ik} = \mu_0 F u_i u_k + p\, \delta_{ik}}$$

Annullando la sua divergenza, si ottiene l'equazione dinamica

(3,2) $$u_k\, \partial_i (\mu_0 F u_i) + \mu_0 F u_i\, \partial_i u_k + \partial_k p = 0$$

la quale, moltiplicata per u_k, ci dà l'equazione di continuità

(3,3) $$c^2\, \partial_i (\mu_0 F u_i) = dp/d\tau$$

Allora la (2) diventa

(3,4) $$\mu_0 F a_k + \frac{u_k}{c^2} \frac{dp}{d\tau} + \partial_k p = 0$$

che é l'equazione di Eulero. Occorre poi imporre la condizione, che sostituisce quella (2,3) di conservazione della materia

(3,5) $$\partial_i (\mu_0 u_i + q_i) = 0$$

La (3) si scrive allora così

$$c^2 \mu_0\, dF/d\tau - c^2 F\, \partial_i (\mu_0 u_i) - dp/d\tau = 0$$

ovvero, per la (5)

$$c^2 \mu_0 \frac{dF}{d\tau} - c^2 F \partial_i q_i - \frac{dp}{d\tau} = 0$$

e tenendo conto della equazione termodinamica (2,5), avremo infine

$$\mu_0 T dS / d\tau - c^2 F \partial_i q_i = 0 \tag{3,6}$$

Otteniamo così il seguente sistema di equazioni

$$\boxed{\begin{array}{ll}
(a') & \mu_0 F a_k + \dfrac{u_k}{c^2}\dfrac{dp}{d\tau} - \partial_k p = 0 \\[2ex]
(b') & \mu_0 T \dfrac{dS}{d\tau} - c^2 F \partial_i q_i = 0 \qquad (c') \quad \dfrac{d\mu_0}{d\tau} + \mu_0 \partial_i u_i + \partial_i q_i = 0 \\[2ex]
(d') & q_i + \chi \dfrac{dq_i}{d\tau} = -\varkappa\left(\partial_i T + \dfrac{u_i}{c^2}\dfrac{dT}{d\tau}\right) \\[2ex]
(e') & \dfrac{dS}{d\tau} = S'_{\mu_0}\dfrac{d\mu_0}{d\tau} + S'_T \dfrac{dT}{d\tau} \qquad (f') \quad \dfrac{dp}{d\tau} = p'_{\mu_0}\dfrac{d\mu_0}{d\tau} + p'_T \dfrac{dT}{d\tau} \\[2ex]
(g') & u_i u_i = -c^2 \quad ; \quad u_i q_i = 0 \quad ; \quad a_i q_i = 0
\end{array}}$$

Procedendo come al numero precedente, passiamo alle equazioni di compatibilità dinamica. Dalla (a') segue l'equazione algebraica

$$\mu_0 F U_k \dot{\varphi} + \frac{u_k}{c^2}\dot{\varphi}\pi + \pi \varphi_k = 0 \tag{3,7}$$

la quale, moltiplicata per φ_k ci dà

$$\boxed{\mu_0 F \dot{\varphi} X + \pi(\overline{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^2/c^2) = 0} \tag{I'}$$

Dalla (b') si deduce che

$$\boxed{\mu_0 T \dot{\varphi} \sigma - c^2 F Y = 0} \tag{II'}$$

dalla (c') segue subito l'equazione

$$\text{(III}'\text{)} \qquad \boxed{\dot{\varphi}\, m_0 + \mu_0 X + Y = 0}$$

Dalla equazione di Kranys, di deduce come nel n^0 precedente

$$\text{(IV}'\text{)} \qquad \boxed{\dot{\varphi}\, Y + k_0\, \theta\, (\overline{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^2/c^2) = 0}$$

Si hanno infine le due equazioni

$$\text{(V}'\text{)} \quad \boxed{\sigma = S'_{\mu_0} m_0 + S'_T\, \theta} \qquad \text{(VI}'\text{)} \quad \boxed{\pi = p'_{\mu_0} m_0 + p'_T\, \theta}$$

Otteniamo così un sistema di 6 equazioni algebriche omogenee nelle 6 incognite (X, Y, π, m_0, θ, σ). Dalle (II') e (III') si ricavano la X e la Y

$$X = -\, \dot{\varphi}\, m_0/\mu_0 - T\, \dot{\varphi}\, \sigma/c^2 F \quad ; \quad Y = \mu_0\, T\, \dot{\varphi}\, \sigma/c^2 F$$

mentre la (V') e la (VI') ci danno la σ e la π. Eliminando tali incognite dalle precedenti equazioni, ci riduciamo ad un sistema algebrico di 2 equazioni nelle due incognite (m_0, θ)

$$(3,8) \qquad \begin{cases} F\, \dot{\varphi}^2 m_0 + \dfrac{\mu_0 T}{c^2}\, \dot{\varphi}^2\, (S'_{\mu_0} m_0 + S'_T \theta) - (p'_{\mu_0} m_0 + p'_T \theta)\, (\overline{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^2/c^2) = 0 \\[2ex] \dfrac{\mu_0 T}{c^2 F}\, \dot{\varphi}^2\, (S'_{\mu_0} m_0 + S'_T \theta) + k_0\, \theta\, (\overline{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^2/c^2) = 0 \end{cases}$$

Introducendo la velocità V delle onde, data dalla (2,15), esso assume la forma più semplice

$$(3,9) \qquad \begin{cases} \left[\left(F + \dfrac{\mu_0 T}{c^2}\, S'_{\mu_0}\right) V^2 - p'_{\mu_0}\right] m_0 + \left[\dfrac{\mu_0 T}{c^2}\, S'_T\, V^2 - p'_T\right] \theta = 0 \\[2ex] \dfrac{\mu_0 T}{c^2 F}\, S'_{\mu_0}\, V^2\, m_0 + \left(\dfrac{\mu_0 T}{c^2 F}\, S'_T\, V^2 + k_0\right) \theta = 0 \end{cases}$$

Perché tale sistema ammetta soluzioni non tutte nulle nelle discontinuità, occorre annullare il suo determinante

$$(3,10)\qquad \begin{vmatrix} \left(F + \dfrac{\mu_0 T}{c^2} S'_{\mu_0}\right) V^2 - p'_{\mu_0} & \dfrac{\mu_0 T}{c^2} S'_T V^2 - p'_T \\ \dfrac{\mu_0 T}{c^2 F} S'_{\mu_0} V^2 & \dfrac{\mu_0 T}{c^2 F} S'_T V^2 + k_0 \end{vmatrix} = 0$$

Sviluppando e semplificando, otteniamo l'equazione biquadratica nella velocitá V:

$$(3,11)\qquad \boxed{\frac{\mu_0 T}{c^2} S'_T V^4 + \left[\frac{\mu_0 T}{c^2} S'_{\mu_0} (k_0 + p'_T / F) + \left(k_0 F - \frac{\mu_0 T}{c^2 F} p'_{\mu_0} S'_T\right)\right] V^2 - k_0 p'_{\mu_0} = 0}$$

Come nel caso precedente, essa si semplifica notevolmente, se l'entropia soddisfa alla condizione $S'_{\mu_0} = 0$, oppure se la pressione é tale che

$$(3,12)\qquad p'_T = - k_0 F$$

Dalla (10) segue allora che la (11) si riduce ad una equazione più semplice:

$$(3,13)\qquad \boxed{(F V^2 - p'_{\mu_0}) \left(\frac{\mu_0 T}{c^2 F} S'_T V^2 + k_0\right) = 0}$$

la quale ci dà la velocità delle onde di entropia

$$(3,14)\qquad V^2 = - k_0 F / \mu_0 T S'_T$$

e quella delle onde idrodinamiche

$$(3,15)\qquad V^2 = p'_{\mu_0} / F$$

Dai risultati ottenuti appaiono chiaramente le differenze e le analogie tra le due diverse formulazioni della termoidrodinamica relativista.

4 — Caso dei fluidi con conducibilità termica nulla

Particolarmente interessante é il caso in cui la conducibilità termica del fluido é nulla, perché allora $q_i = 0$, e la teoria di Eckart viene a coincidere con quella di Landau-Lifchitz. Ci riduciamo così al seguente sistema di equazioni differenziali

$$\boxed{\begin{array}{llll}
(\mathrm{a}_0) & \multicolumn{3}{l}{\mu_0 F a_k + \dfrac{u_k}{c^2}\dfrac{dp}{d\tau} + \partial_k p = 0} \\
(\mathrm{b}_0) & \mu_0 T dS/d\tau = 0 & (\mathrm{c}_0) & d\mu_0/d\tau + \mu_0 \partial_i u_i = 0 \\
(\mathrm{d}_0) & \dfrac{dS}{d\tau} = S'_{\mu_0}\dfrac{d\mu_0}{d\tau} + S'_T \dfrac{dT}{d\tau} & (\mathrm{e}_0) & \dfrac{dp}{d\tau} = p'_{\mu_0}\dfrac{d\mu_0}{d\tau} + p'_T\dfrac{dT}{d\tau}
\end{array}}$$

Da esso si deducono le condizioni di compatibilità dinamica

$$(4,1) \quad \begin{cases}
(\mathrm{I}^0) \quad \mu_0 F \dot{\varphi} X + \pi(\bar{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^2/c^2) = 0 \\
(\mathrm{II}^0) \quad \sigma = 0 \qquad (\mathrm{III}_0) \quad \dot{\varphi} m_0 + \mu_0 X = 0 \\
(\mathrm{IV}^0) \quad O = S'_{\mu_0} m_0 + S'_T \theta \qquad (\mathrm{V}_0) \quad \pi = p'_{\mu_0} m_0 + p'_T \theta
\end{cases}$$

Perché tale sistema omogeneo ammetta soluzioni non tutte nulle nelle discontinuità, occorre annullare il suo determinante

$$\begin{vmatrix}
\mu_0 F \dot{\varphi} & \bar{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^2/c^2 & 0 & 0 \\
\mu_0 & 0 & \dot{\varphi} & 0 \\
0 & 0 & S'_{\mu_0} & S'_T \\
0 & -1 & p'_{\mu_0} & p'_T
\end{vmatrix} = 0$$

ed otteniamo così l'equazione nella velocità V delle onde

$$(4,2) \qquad \boxed{F S'_T V^2 + (S'_{\mu_0} p'_T - S'_T p'_{\mu_0}) = 0}$$

Tale equazione si semplifica nel caso in cui $p'_T = 0$ (ovvero $S'_{\mu_0} = 0$), e ci dà la velocità delle onde idrodinamiche

$$(4,3) \qquad V^2 = p'_{\mu_0}/F$$

Se invece $p'_{\mu_0} = 0$ (ovvero $S'_T = 0$), otteniamo la velocità delle onde di entropia

$$V^2 = -(S'_{\mu_0} p'_T)/(F S'_T) \tag{4,4}$$

Nel caso più generale, si ottiene la seguente velocità

$$V^2 = \frac{1}{F}\left(p'_{\mu_0} - p'_T \frac{S'_{\mu_0}}{S'_T}\right) \tag{4,5}$$

che generalizza i due precedenti casi particolari.

5 — Le equazioni della termoidrodinamica «proiettiva»

Fatta questa premessa sullo studio delle onde nella termoidrodinamica relativista, ci proponiamo di estendere e completare i risultati ottenuti nel precedente lavoro [1], al caso della termoidrodinamica «proiettiva».

A tale scopo osserviamo che, nel caso dei fluidi incompressibili, il relativo tensore energetico é dato da

$$T_{AB} = c_A c_B - c_S c_S \left(\frac{1}{2}\delta_{AB} - \frac{1}{r^2} x_A x_B\right) \qquad (A, B, S = 1, 2 \dots 5) \tag{5,1}$$

e risulta «duale» (nel senso della geometria proiettiva) al tensore energetico della magnetoidrodinamica ideale [8]. Se introduciamo l'equazione di stato

$$c_S c_S = -2p \tag{5,2}$$

il tensore (1) assume la forma più semplice

$$\boxed{T_{AB} = c_A c_B + p\,\delta_{AB} - (2p/r^2)\, x_A x_B} \tag{5,3}$$

Dalle equazioni di Maxwell generalizzate segue che il vettore idrodinamico é formato da una parte parallela alla velocità del fluido, e da una parte ad esso ortogonale [1], cioé

$$c_A = f u_A + \bar{q}_A \qquad \text{con} \qquad \bar{q}_A = q_A/fc^2 \tag{5,4}$$

ed allora l'equazione di stato (2) diventa

$$\boxed{2p = f^2 c^2 - \bar{q}^2} \tag{5,5}$$

Vale inoltre la condizione di incompressibilità del fluido

$$\partial_A c_A = 0 \tag{5,6}$$

Fatta questa premessa, il vettore termico soddisfa alla equazione che generalizza quella di Fourier-Kranys

$$q_A + \chi \frac{dq_A}{d\tau} = -\varkappa\left(\partial_A T + \frac{u_A}{c^2}\frac{dT}{d\tau} - \frac{x_A}{r^2}\frac{dT}{d\varrho}\right) \tag{5,7}$$

dove si é indicato con $d/d\varrho = x_A \partial_A$, la derivata radiale, analoga alla derivata rispetto al tempo proprio $d/d\tau = u_A \partial_A$. Tale equazione, tenendo conto che $q_A = fc^2 \bar{q}_A$, si può scrivere così

$$\boxed{fc^2\bar{q}_A + \chi f c^2 \frac{d\bar{q}_A}{d\tau} + \chi \bar{q}_A c^2 \frac{df}{d\tau} = -\varkappa\left(\partial_A T + \frac{u_A}{c^2}\frac{dT}{d\tau} - \frac{x_A}{r^2}\frac{dT}{d\varrho}\right)} \tag{I}$$

Moltiplicandola per u_A e ricordando che $u_A x_A = 0$, da essa segue che

$$u_A d\bar{q}_A / d\tau = -\bar{q}_A a_A = 0 \tag{5,8}$$

cioé il vettore termico é ortogonale alla accelerazione a_A. Moltiplicando la (I) per x_A e ricordando che $x_A q_A = 0$, si ricava

$$x_A d\bar{q}_A / d\tau = -\bar{q}_A dx_A / d\tau = -\bar{q}_A a_A = 0 \tag{5,9}$$

Fatta questa premessa, osserviamo che per ottenere l'equazione dinamica, basta prendere la divergenza del tensore (3) ed annullarla. Tenendo conto della equazione (6) avremo allora

$$c_A \partial_A c_B + \partial_B p - (2p/r^2) x_B - x_B \partial_A (2p x_A / r^2) = 0$$

Sostituendo al vettore idrodinamico c_A il suo valore dato dalla (4), avremo con facili calcoli

(5,10)
$$\begin{gathered} f^2 a_B + f u_B \, df/d\tau + f d\bar{q}_B/d\tau + f\bar{q}_A \, \partial_A u_B + \bar{q}_A u_B \partial_A f + \\ + \bar{q}_A \partial_A \bar{q}_B + \partial_B p - (2p/r^2) x_B - x_B \partial_A (2p x_A/r^2) = 0 \end{gathered}$$

Moltiplicandola per u_B si ha l'equazione di continuità

$$-fc^2 df/d\tau - c^2 \bar{q}_A \partial_A f + \bar{q}_A u_B \partial_A \bar{q}_B + dp/d\tau = 0$$

dove si é tenuto conto della (8). Essa si può scrivere nel seguente modo

$$d(2p - f^2 c^2)/d\tau = 2\bar{q}_A (c^2 \partial_A f + \bar{q}_B \partial_A u_B)$$

e tenendo conto della equazione di stato (5) avremo in definitiva

(II)
$$\boxed{\bar{q}_A (d\bar{q}_A/d\tau + 2c^2 \partial_A f + 2\bar{q}_B \partial_A u_B) = 0}$$

Se invece moltiplichiamo l'equazione dinamica (10) per x_B, e ricordiamo che $x_B x_B = r^2$; $x_B a_B = c^2$ [8], avremo

$$\begin{gathered} f^2 c^2 + f x_B d\bar{q}_B/d\tau + f x_B \bar{q}_A \partial_A u_B + \bar{q}_A x_B \partial_A \bar{q}_B + \\ + dp/d\varrho - 2p - \partial_A (2p x_A) = 0 \end{gathered}$$

Ma é facile vedere che

$$\begin{cases} x_B \partial_A u_B = - u_B \partial_A x_B = - u_A \quad ; \quad f^2 c^2 - 2p = \bar{q}^2 \\ x_B d\bar{q}_B/d\tau = - \bar{q}_B u_B = 0 \quad ; \quad x_B \partial_A \bar{q}_B = - \bar{q}_B \partial_A x_B = - \bar{q}_A \end{cases}$$

e quindi otteniamo la seconda equazione di continuità

(5,11)
$$\partial_A (2p x_A) = dp/d\varrho$$

L'equazione dinamica si scrive allora così

(III)
$$\boxed{\begin{gathered} f^2 a_B + f u_B \, df/d\tau + f d\bar{q}/d\tau + f\bar{q}_A \partial_A u_B + \bar{q}_A u_B \partial_A f + \\ + \bar{q}_A \partial_A \bar{q}_B + \partial_B p - (2p/r^2) x_B - x_B \, dp/r^2 d\varrho = 0 \end{gathered}}$$

Occorre poi aggiungere l'equazione (6) di incompressibilità del fluido

(IV) $$\boxed{df/d\tau + f\,\partial_A u_A + \partial_A \bar{q}_A = 0}$$

Dalla equazione di stato (5) si ricava la

(V) $$\boxed{dp/d\tau = fc^2\,df/d\tau - \bar{q}_A\,d\bar{q}_A/d\tau}$$

Dalla relazione $f^2 = 2\,\mu_0\,F/n$ che lega i due indici f ed F, segue che

(VI) $$\boxed{nf\,df/d\tau = \mu_0\,dF/d\tau + F\,d\,\mu_0/d\tau}$$

Dalla equazione termodinamica si deduce che

(VII) $$\boxed{T\,dS/d\tau = c^2\,dF/d\tau - dp/\mu_0\,d\tau}$$

Poiché l'entropia dipende dalle due variabili termodinamiche μ_0, T, si avrá $S = S\,(\mu_0, T)$, ed in conseguenza

(VIII) $$\boxed{dS/d\tau = S'_{\mu_0}\,d\,\mu_0/d\tau + S'_T\,dT/d\tau}$$

Infine dalle identità $u_A u_A = -\,c^2$; $u_A \bar{q}_A = x_A \bar{q}_A = 0$ ed $a_A \bar{q}_A = 0$ seguono le

(IX) $$\boxed{u_A\,du_A/d\tau = u_A\,d\bar{q}_A/d\tau = \bar{q}_A\,du_A/d\tau = x_A\,d\bar{q}_A/d\tau = 0}$$

Le (I), (II) ... (IX) sono le equazioni della termoidrodinamica «proiettiva» dei fluidi incompressibili, che si deducono a partire dalle equazioni di Maxwell generalizzate.

6 — Studio della velocità di propagazione delle onde

Per passare allo studio delle onde e della loro velocità di propagazione, procediamo come nei casi precedenti, ed introduciamo al solito modo le discontinuità delle derivate del campo. Dalle (IX) seguono allora le

$$(6,1) \quad u_A U_A = 0 \quad ; \quad u_A \bar{Q}_A = 0 \quad ; \quad \bar{q}_A U_A = 0 \quad ; \quad x_A \bar{Q}_A = 0$$

Dalla equazione di Kranys generalizzata, segue che

$$(6,2) \qquad f c^2 \bar{Q}_A \dot{\varphi} + \bar{q}_A c^2 \dot{\varphi} \psi = -k_0 \left(\varphi_A + \frac{u_A}{c^2} \dot{\varphi} - \frac{x_A}{r^2} \varphi'\right) \theta$$

ove abbiamo posto

$$(6,3) \qquad \varphi_A = \partial_A \varphi \quad ; \quad \dot{\varphi} = d\varphi / d\tau \quad ; \quad \varphi' = d\varphi / d\varrho$$

Se poi introduciamo le nuove incognite

$$(6,4) \qquad X = U_A \varphi_A \quad ; \quad Y = \bar{Q}_A \varphi_A \quad ; \quad Z = \bar{Q}_A \bar{q}_A$$

e moltiplichiamo la (2) per φ_A, otteniamo l'equazione

$$(\mathrm{A}) \qquad \boxed{f c^2 Y + \bar{q}_A \varphi_A c^2 \dot{\varphi} \psi + k_0 (\bar{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^2 / c^2 - \varphi'^2 / r^2)\, \theta = 0}$$

Moltiplicando invece la (2) per $\bar{q}_A$, si deduce

$$(\mathrm{B}) \qquad \boxed{f c^2 \dot{\varphi} Z + \bar{q}^2 c^2 \dot{\varphi} \psi + k_0 \bar{q}_A \varphi_A \theta = 0}$$

Dalla equazione (II) di continuità segue che

$$\bar{q}_A \bar{Q}_A \dot{\varphi} + 2 c^2 \bar{q}_A \varphi_A \psi + 2 \bar{q}_A \bar{q}_B \varphi_A U_B = 0$$

la quale, in base alle (1) e (3) diventa

$$(\mathrm{C}) \qquad \boxed{\dot{\varphi} Z + 2 c^2 \bar{q}_A \varphi_A \psi = 0}$$

Dall'equazione dinamica (III), segue [9]

$$f^2 U_B \dot{\varphi} + f u_B \dot{\varphi} \psi + f \bar{Q}_B \dot{\varphi} + f \bar{q}_A \varphi_A U_B +$$
$$+ \bar{q}_A \varphi_A u_B \psi + \bar{q}_A \varphi_A \bar{Q}_B + \pi \varphi_B - x_B \varphi' \pi = 0$$

Moltiplicandola per φ_B, otteniamo l'equazione

$$f^2 \dot{\varphi} X + f \dot{\varphi}^2 \psi + f \dot{\varphi} Y + f \bar{q}_A \varphi_A X + \bar{q}_A \varphi_A \dot{\varphi} \psi +$$
$$+ \bar{q}_A \varphi_A Y + \pi \bar{\varphi}^2 - \pi \varphi'^2 = 0$$

che si può scrivere così

$$\text{(D)} \qquad \boxed{(fX + Y + \dot{\varphi} \psi)(f \dot{\varphi} + \bar{q}_A \varphi_A) + \pi (\bar{\varphi}^2 - \varphi'^2 / r^2) = 0}$$

Dall'equazione (IV) si ricava la

$$\dot{\varphi} \psi + f U_A \varphi_A + \bar{q}_A \bar{Q}_A = 0$$

ovvero

$$\text{(E)} \qquad \boxed{\dot{\varphi} \psi + fX + Y = 0}$$

Dall'equazione di stato (V), si ha

$$\text{(F)} \qquad \boxed{\pi - f c^2 \psi + Z = 0}$$

L'equazione (VI) che lega *i* due indici f ed F, ci dà la

$$\text{(G)} \qquad \boxed{n f \psi = \mu_0 \Phi + F m_0}$$

Dall'equazione termodinamica (VII) si ricava la

$$\text{(H)} \qquad \boxed{T \sigma = c^2 \Phi - \pi / \mu_0}$$

Infine, dall'equazione di stato (VIII) si ha

$$\text{(J)} \qquad \boxed{\sigma = S'_{\mu_0} m_0 + S'_T \theta}$$

Le (A), (B) ... (J) formano un sistema di 9 equazioni lineari omogenee nelle 9 incognite $(X, Y, Z, \pi, m_0, \theta, \sigma, \psi, \Phi)$. Per risolverlo, ricaviamo la Y dalla (C) e la Φ dalla (G):

$$\text{(6,4)} \qquad Y = -\dot{\varphi}\psi - fX \quad ; \quad \Phi = (nf/\mu_0)\psi - (F/\mu_0) m_0$$

inoltre la (J) e la (F) ci danno rispettivamente la σ e la Z

$$\text{(6,5)} \qquad \sigma = S'_{\mu_0} m_0 + S'_T \theta \quad ; \quad Z = fc^2 \psi - \pi$$

Sostituendo nelle rimanenti equazioni, ci riduciamo al seguente sistema di 5 equazioni lineari ed omogenee, nelle 5 incognite $(\pi, \psi, X, \theta, m_0)$:

$$\text{(6,6)} \quad \begin{cases} (\bar{\varphi}^2 - \varphi'^2/r^2)\pi = 0 \\ \dot{\varphi}\pi - (\dot{\varphi} + 2\bar{q}_A \varphi_A) f c^2 \psi = 0 \\ (\bar{q}_A \varphi_A - f)\dot{\varphi} c^2 \psi + f^2 c^2 X + k_0 (\bar{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^2/c^2 - \varphi'^2/r^2)\theta = 0 \\ fc^2 \dot{\varphi}\pi - c^2 \dot{\varphi}(f^2 c^2 + \bar{q}^2)\psi - k_0 \bar{q}_A \varphi_A \theta = 0 \\ \pi/\mu_0 - (c^2 nf/\mu_0)\psi + TS'_T \theta + (TS'_{\mu_0} + c^2 F/\mu_0) m_0 = 0 \end{cases}$$

Perché tale sistema ammetta soluzioni non tutte nulle nelle discontinuità, occorre annullare il suo determinante

$$\begin{vmatrix} \bar{\varphi}^2 - \varphi'^2/r_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi & -f(\dot{\varphi} + 2\bar{q}_A \varphi_A)c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\bar{q}_A \varphi_A - f)c^2 \dot{\varphi} & f^2 c^2 & k_0(\bar{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^2/c^2 - \varphi'^2/r^2) & 0 \\ fc^2 \dot{\varphi} & -c^2 \dot{\varphi}(f^2 c^2 + \bar{q}^2) & 0 & -k_0 \bar{q}_A \varphi_A & 0 \\ 1/\mu_0 & nc^2 f/\mu_0 & 0 & TS'_T & TS'_{\mu_0} + c^2 F/\mu_0 \end{vmatrix}$$

Otteniamo così l'equazione delle caratteristiche

$$\text{(6,7)} \qquad \boxed{\bar{q}_A \varphi_A (\bar{\varphi}^2 - \varphi'^2/r^2)(f\dot{\varphi} + 2\bar{q}_A \varphi_A)(\mu_0 T S'_{\mu_0} + c^2 F) = 0}$$

A questo punto introduciamo la velocità V delle onde e la componente q_N del vettore termico, nella direzione spaziale di propagazione delle onde, nel seguente modo

$$(6,8)\quad V^2 = \frac{\dot{\varphi}^2}{\bar{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^2/c^2 - \varphi'^2/r^2} \quad ; \quad \bar{q}_N^2 = \frac{(\bar{q}_A\,\varphi_A)^2}{\bar{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^2/c^2 - \varphi'^2/r^2}$$

che estende alla relatività proiettiva le analoghe formule (2,15), valide in relatività ristretta. Se ci poniamo allora nel caso in cui

$$(6,9)\qquad \bar{q}_N \neq 0 \quad ; \quad \mu_0\,T S'_T + c^2 F \neq 0$$

la (7) ci dà la seguente equazione nella velocità V delle onde

$$(6,10)\qquad \boxed{(V^2 - c^2)\,(fV + 2\,\bar{q}_N) = 0}$$

Da essa si deduce che una delle velocità di propagazione é quella c della luce, in accordo con il fatto che il fluido termodinamico é incompressibile. Esso infatti soddisfa all'equazione (5,5) di stato ed alla equazione (5,6) di incompressibilità. La seconda velocità di propagazione delle onde é invece data dalla formula

$$(6,11)\qquad V = -\,n q_N / \mu_0\,F c^2$$

nella quale si é tenudo presente che $\bar{q} = q/fc^2$, e che $f^2 = 2\,\mu_0\,F/n$.

7 — Fluidi termici «ideali» e con conducibilità nulla

Nel caso particolare in cui l'entropia S del fluido soddisfa alla condizione

$$(7,1)\qquad S'_{\mu_0} = -\,c^2\,F/\mu_0\,T$$

la prima equazione del sistema (6,6), se si vuole che $\pi \neq 0$, ci fornisce la condizione

$$(7,2)\qquad \bar{\varphi}^2 - \varphi'^2/r^2 = 0$$

della quale, in base alla prima delle (6,8) si deduce che la velocità delle onde é quella della luce ($V = c$).

La 2°, 4° e 5° equazione del sistema (6,6) formano allora un sistema di 3 equazioni nelle tre incognite (ψ, π, θ), il quale ammette soluzioni non tutte nulle, se si annulla il suo determinante

$$(7,3) \qquad \begin{vmatrix} \dot{\varphi} & -f(\dot{\varphi} + 2\bar{q}_A \varphi_A)\, c^2 & 0 \\ f c^2 \dot{\varphi} & -c^2 \dot{\varphi}\,(f^2 c^2 + \bar{q}^2) & -k_0 \bar{q}_A \varphi_A \\ 1/\mu_0 & -n c^2 f/\mu_0 & T S'_T \end{vmatrix} = 0$$

Otteniamo così l'equazione che ci dà la velocità delle onde

$$(7,4) \qquad \mu_0 c^2 T \bar{q}^2 S'_T V^2 + [(n-1)\, k_0 - 2\mu_0 c^2 T S'_T] f c^2 q_N V - 2 c^2 k_0 \bar{q}_N^2 = 0$$

come nel caso relativistico (1). Essa si semplifica ulteriormente se l'entropia soddisfa alla nuova condizione

$$(7,5) \qquad S'_T = (n-1)\, k_0 / 2\, \mu_0\, c^2\, T$$

Un fluido, la cui entropia soddisfa alle due condizioni (1) e (5), sarà chiamato «ideale», e per esso l'equazione (4) si riduce alla

$$(7,6) \qquad \boxed{V = \frac{2c}{\sqrt{n-1}} \frac{q_N}{q}}$$

Ripetendo allora il calcolo fatto nel caso relativistico, grungiamo alla conclusione che in un fluido ideale, l'entropia S e l'indice F sono date dalle (1,4).

Nel caso poi in cui la conducibilità del fluido é nulla, il sistema di equazioni nelle discontinuità, si riduce al seguente

$$(7,7) \qquad \begin{cases} (fX + \dot{\varphi}\,\psi) f \dot{\varphi} + \pi\,(\dot{\varphi}^2 - \varphi'^2/r^2) = 0 \\ \dot{\varphi}\,\psi + fX = 0 \quad ; \quad f c^2 \psi = \pi \\ T\sigma = c^2 \Phi - \pi/\mu_0 \quad ; \quad n f \psi = \mu_0 \Phi + F m_0 \\ \sigma = S'_{\mu_0} m_0 + S'_T \theta \quad ; \quad \Phi = F'_{\mu_0} m_0 + F'_T \theta \end{cases}$$

La prima equazione, in virtù della seconda equazione, si riduce alla

$$(7,8) \qquad \pi\,(\dot{\varphi}^2 - \varphi'^2/r^2) = 0$$

Perché il sistema (7) ammetta soluzioni non tutte nulle nelle discontinuità, occorre annullare il suo determinante, cioé ordinando le incognite nell'ordine $(\pi, X, \psi, \sigma, \Phi, m_0, \theta)$, avremo

$$\left|\begin{array}{ccc|cccc} \varphi^2 - \varphi'^2/r^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & \dot{\varphi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & fc^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1/\mu_0 & 0 & 0 & T & -c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -nf & 0 & \mu_0 & F & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & S'_{\mu_0} & S'_T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & F'_{\mu_0} & F'_T \end{array}\right| = 0$$

e, per $f \neq 0$, otteniamo l'equazione

$$\boxed{(\bar{\varphi}^2 - \varphi'^2/r^2)\,[F'_T\,(\mu_0 T S'_{\mu_0} + F c^2) - T S'_T\,(\mu_0 F' + F)] = 0} \tag{7,9}$$

Annullando il primo fattore si ottiene che la velocità delle onde é quella c della luce

$$V^2 = \dot{\varphi}^2/(\bar{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^2/c^2 - \varphi'^2/r^2) = c^2 \tag{7,10}$$

in accordo con il fatto che il fluido é incompressibile. Se invece l'entropia S e l'indice F del fluido sono tali da annullare il secondo fattore, allora abbiamo i fluidi termodinamici «ideali», per i quali, in base ai calcoli della precedente memoria (1), si ha

$$\mu_0 F = N \cdot T^n \quad ; \quad S = F c^2/T \tag{7,11}$$

Possiamo quindi concludere che i risultati ottenuti nel caso relativistico, si possono estendere senza alcuna modifica al caso della termoidrodinamica «proiettiva», invariante per il gruppo di Fantappié.

8 — Le onde nella idrodinamica «proiettiva»

In un precedente lavoro [10] abbiamo studiato la propagazione delle onde nalla idrodinamica proiettiva e nella magnetoidrodinamica proiettiva. Quì rifaremo il calcolo in modo più rigoroso e soddisfacente.

Le equazioni della idrodinamica proiettiva dei fluidi incompressibili, si possono dedurre da quelle della termoidrodinamica, stabilite al n° 5, nel caso in cui non ci sono scambi termici ($q_A = 0$; $F = 1$). Otteniamo così le seguenti equazioni

$$(8,1) \qquad \begin{cases} f^2 a_A + \dfrac{u_A}{c^2}\dfrac{dp}{d\tau} - \dfrac{x_A}{r^2}\dfrac{dp}{d\varrho} + \partial_A p = H^2 f^2 x_A \\ df/d\tau + f\,\partial_A u_A = 0 \quad ; \quad f^2 = \mu + p/c^2 \\ p = \mu c^2 \quad ; \quad u_A u_A = -c^2 \quad ; \quad H = c/r \end{cases}$$

La prima equazione é quella del moto, che si deduce dalla (III); la seconda equazione é quella di incompressibilità, che segue dalla (IV). La terza equazione ci dà l'indice f, mentre la quarta ci dà l'equazione di stato. Passando alle discontinuità, al solito modo, otteniamo il seguente sistema di 4 equazioni lineari omogenee nelle 4 incognite (π, ψ, X, m)

$$(8,2) \qquad \begin{cases} (fX + \dot\varphi\,\psi) f\dot\varphi + \pi\,(\bar\varphi^2 - \varphi'^2/r^2) = 0 \\ fX + \dot\varphi\,\psi = 0 \quad ; \quad 2f\psi = m + \pi/c^2 \\ \pi - fc^2\psi = 0 \end{cases}$$

La prima equazione, in base alla seconda, si riduce alla (7,8), ed allora perché il sistema ammetta soluzioni non tutte nulle nelle discontinuità, occorre annullare il suo determinante

$$(8,3) \qquad \begin{vmatrix} \bar\varphi^2 - \varphi'^2/r^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot\varphi & f & 0 \\ 1/c^2 & -2f & 0 & 1 \\ 1 & -fc^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = f^2 c^2 (\bar\varphi^2 - \varphi'^2/r^2) = 0$$

Ne segue subito che la velocità di propagazione delle onde é quella c della luce, in accordo con il fatto che il fluido é incompressibile

9 — LE ONDE NELLA MAGNETOIDRODINAMICA PROIETTIVA «IDEALE»

Come abbiamo visto nella memoria [10], le equazioni della magnetoidrodinamica ideale sono le seguenti

$$(9,1)\quad \begin{cases} h^2 a_B + u_B \partial_A (h^2 u_A) + (c^2/2)\, \partial_B h^2 = c^2 \partial_A (h_A h_B) \\ 2\, \partial_A (h^2 u_A) - d h^2/d\tau + 2 h_A u_B \partial_A h_B = 0 \quad ; \quad u_A u_A = -c^2 \\ \partial_A (h_A u_B - h_B u_A) = 0 \quad ; \quad h_A u_A = 0 \quad ; \quad u_A x_A = 0 \end{cases}$$

Passando alle discontinuità, al solito modo, si ottengono le seguenti equazioni

$$(9,2)\quad \begin{cases} h^2 U_B \dot{\varphi} + u_B h^2 U_A \varphi_A + 2 u_B h_S H_S \dot{\varphi} + c^2 h_S H_S \varphi_B = \\ \qquad = c^2 h_A \varphi_A H_B + c^2 h_B \varphi_A H_A \\ h^2 U_A \varphi_A + h_S H_S \dot{\varphi} + h_A u_B H_B \varphi_A = 0 \\ u_A H_B \varphi_A + h_B U_A \varphi_A - u_B H_A \varphi_A - h_A U_B \varphi_A = 0 \\ u_A H_A = -h_A U_A \quad ; \quad u_A U_A = 0 \quad ; \quad x_A U_A = 0 \end{cases}$$

L'ultima equazione si ottiene derivando rispetto al tempo proprio la $u_A x_A = 0$ e si ottiene la $x_A a_A - c^2 = 0$. Passando alle discontinuità si ha $x_A U_A = 0$.

Introduciamo le 5 nuove incognite

$$(9,3)\quad X = U_A \varphi_A \;;\; Y = H_A \varphi_A \;;\; Z = H_A h_A \;;\; W = U_A h_A \;;\; R = H_A x_A$$

Moltiplicando la 1° equazione (2) per u_B, si ha

$$(\mathrm{I})\qquad \boxed{\dot{\varphi} Z + h^2 X - h_A \varphi_A W = 0}$$

Moltiplicandola per h_B, si ha invece

$$(\mathrm{II})\qquad \boxed{\dot{\varphi} W = c^2 Y}$$

Moltiplicando ancora la 1° equazione per φ_B, avremo

(III) $$\boxed{2 h^2 \dot{\varphi} X + (2 \dot{\varphi}^2 + c^2 \overline{\varphi}^2) Z - 2 c^2 h_A \varphi_A Y = 0}$$

Moltiplichiamo infine la 1° equazione per x_B, ed osserviamo che si ha la relazione $h_A x_A = rcf$, dove f é l'indice del fluido [8]. Avremo così l'equazione

(IV) $$\boxed{\varphi' Z = h_A \varphi_A R + crf Y}$$

con $\varphi' = d\varphi / d\varrho$. La seconda equazione (2) coincide con la (I), mentre se si moltiplica la 3° equazione (2) per u_B, si ottiene ancora la (II). Moltiplicando la 3° equazione per h_B si riottiene la (I), e moltiplicandola per φ_B si ottiene una identità. Infine, moltiplicando la 3° equazione per x_B, otteniamo la

(V) $$\boxed{\dot{\varphi} R + rcf X = 0}$$

Otteniamo così un sistema lineare omogeneo di 5 equazioni nelle 5 incognite (X, Y, Z, W, R) .Per risolverlo ricaviamo dalla (II) e dalla (V) la W e la R, così

(9,4) $$W = (c^2 / \dot{\varphi}) Y \quad ; \quad R = -(rcf / \dot{\varphi}) X$$

Sostituendo nelle altre equazioni, otteniamo il seguente sistema di 3 equazioni nelle 3 incognite (X, Y, Z)

(9,5) $$\begin{cases} h^2 \dot{\varphi} X - c^2 h_A \varphi_A Y + \dot{\varphi}^2 Z = 0 \\ 2 h^2 \dot{\varphi} X - 2 c^2 h_A \varphi_A Y + (2 \dot{\varphi}^2 + c^2 \overline{\varphi}^2) Z = 0 \\ rcf h_A \varphi_A X - rcf \dot{\varphi} Y + \dot{\varphi} \varphi' Z = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione ricaviamo l'incognita Z

(9,6) $$Z = (c^2 h_A \varphi_A / \dot{\varphi}^2) Y - (h^2 / \dot{\varphi}) X$$

Sostituendo nella 2° equazione e semplificando, si ricava la Y

(9,7) $$Y = (h^2 \dot{\varphi} / c^2 h_A \varphi_A) X$$

Tale valore, sostituito nella (6), ci dice che $Z = 0$, e cioé, in base alla (3), che la discontinuità H_A del campo magnetico h_A, é ortogonale al campo magnetico

$$Z = H_A h_A = 0 \tag{9,8}$$

Sostituendo il valore della Y nella terza equazione (5), otteniamo in definitiva

$$[h_A \varphi_A / \dot{\varphi} - h^2 \dot{\varphi} / c^2 h_A \varphi_A] X = 0 \tag{9,9}$$

e se vogliamo che $X \neq 0$, ricaviamo l'equazione delle caratteristiche

$$\boxed{c^2 (h_A \varphi_A)^2 - h^2 \dot{\varphi}^2 = 0} \tag{9,10}$$

Introducendo allora la velocità V delle onde e la componente h_N del vettore magnetico, nella direzione spaziale di propagazione delle onde, nel seguente modo

$$V^2 = \frac{\dot{\varphi}^2}{\overline{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^2/c^2 - \varphi'^2/r^2}; \qquad h_N^2 = \frac{(h_A \varphi_A)^2}{\overline{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^2/c^2 - \varphi'^2/r^2} \tag{9,11}$$

ed osserviamo che nella magnetoidrodinamica proiettiva vale l'equazione di stato

$$h^2 = M c^2 = \mu c^2 + p + h^2 \tag{9,12}$$

otteniamo dalla (10) la velocità delle onde di Alfvèn

$$\boxed{V^2 = c^2 h_N^2 / h^2 = h_N^2 / M} \tag{9,13}$$

E' interessante osservare che la velocità (13) delle onde nella magnetoidrodinamica ideale, é simile a quella (7,6) della termoidrodinamica ideale. Del resto abbiamo precedentemente stabilito che queste due teorie risultano «duali» nel senso della geometria proiettiva [8].

Prof. Giuseppe ARCIDIACONO
Via Acquedotto del Peschiera 96
00135-ROMA

BIBLIOGRAFÍA

(1) G. ARCIDIACONO, *Una nuova termoidrodinamica relativistica*, Coll. Math. XXVI, 39-66 (1975); vedi pure: *L'Universo di De Sitter-Castelnuovo e la termoidrodinamica*, Coll. Math. XXIII, 105-128 (1972).

(2) C. MARLE, *Sur l'établissement des equations de l'hydrodynamique des fluides relativistes dissipatives*, Ann. Poincaré, X°, n° 1 (1969) pág. 114.

(3) P. STRANEO, *Teoria generalizzata delle dimensioni fisiche*, Nuovo Cimento, *17*, 183, 506 (1940); E. RECAMI, *Black-Body radiation and generalized theory of physical dimensions*, Lettere Nuovo Cimento, vol. 2, n° 6 (1971).

(4) C. ECKART, *The thermodynamics of irreversible processes*, Phys. Rev. 58, *919*, (1940). B. MAHJOUB, *Système d'évolution d'un fluide relativiste conducteur de chaleur, d'après le schema d'Eckart*, Ann. Poincaré, XV, n° 2 (1971).

(5) M. KRANYS, *Relativistic hydrodynamics with irreversible thermodynamics without the paradox of infinite velocity of heat conduction*, Nuovo Cimento, X, 42 B, 51 (1966); *Relativistic theory of waves in dissipative media*, Coll. Int. CNRS, n° 236, *Théories cinetiques classiques et relativistes*, Juin 1974.

(6) B. MAHJOUB, op. cit. pág. 163.

(7) A. D. LANDAU, E. M. LIFCHITZ, *Fluid Mechanics*, London 1958; B. MAHJOUB, *Système d'évolution d'un fluide relativiste conducteur de chaleur*, Ann. Poincaré, XIV, n° 2 (1971), pp. 113-132.

(8) G. ARCIDIACONO, *Relatività e Cosmologia*, Libreria Veschi (Viale Università 7), Roma 1973, pág. 307; *Su alcuni casi limiti della magnetoidrodinamica*, Coll. Math. XXII, 141-156 (1971).

(9) Nella memoria (1) occorre fare la seguente correzione: Dalla equazione dinamica (II) del n° 2, passando alle discontinuitá, segue

$$f^2 U_k \dot{\varphi} + f U_k \dot{\varphi} \psi + f\bar{Q}_k \dot{\varphi} + f q_i \varphi_i U_k + q_i \varphi_i u_k \psi + q_i \varphi_i \bar{Q}_k + \pi \varphi_k = 0$$

e moltiplicandola per φ_k, si avrà

$$\text{(A)} \qquad (fX + Y + \dot{\varphi}\psi)(\dot{\varphi} f + q_i \varphi_i) + \pi \bar{\varphi}^2 = 0$$

la quale, in virtù della (C) del n° 3 si riduce alla $\pi \bar{\varphi}^2 = 0$. Il calcolo della velocità delle onde viene allora modificato nel modo indicato in questa memoria, quando r tende all'infinito.

(10) G. ARCIDIACONO, *Il modello di Klein e la Cosmologia*, Coll. Math. XXV, 159-184 (1974).