ESPACIOS K-SUSLINIANOS Y GRUPOS TOPOLOGICOS

por

PEDRO PÉREZ CARRERAS (*)

SUMMARY

Let $(E, .)$ be a topological group. Let A be a set which is a K-Suslin space with the topology induced by the topology of E. Let B be a closed set of E such that $A \cdot B$ is of second category in E. Then, $A . B$ has the Baire property. As Corollary of this result we get a more general open mapping theorem as the one given by Martineau (3) : Let $(F, .)$ be a K-Suslin topological group and $(E, .)$ a topological group of second category. Let f be continuous algebraic homomorphism from F onto E. Then, f is open.

Sea E un espacio topológico. E es un espacio polaco, (1), si es separable y si existe una métrica d sobre E compatible con su topología de modo que (E, d) es completo. Un espacio topológico E se dice K-Susliniano, (3) si existe un espacio polaco P y una aplicación f de P en las partes compactas de E tal que (a) $\cup \{f(x) : x \in P\} = E$ (b) para todo x de P y para todo entorno abierto V de $f(x)$, existe un entorno de x, W, tal que $f(W) \subset V$. Sea A un conjunto de un espacio topológico E: se dice que A tiene la propiedad de Baire si existe en E un abierto U tal que $A \setminus U$ y $U \setminus A$ son conjuntos de primera categoría. Sea A un conjunto de un espacio topológico E y sea x un punto de E. Se dice que A es de segunda categoría con respecto a x si para todo entorno V de x, la intersección de V y A es un conjunto de segunda categoría en E. Mediante $0(A)$ denotaremos al interior del conjunto de puntos de un espacio topológico tales que un conjunto A de E es de segunda categoría respecto a ellos. Si A es un conjunto de segunda categoría, $0(A)$ nunca es vacío y para

(*) Este trabajo ha sido realizado en el Departamento de Teoría de Funciones y Ecuaciones Funcionales que dirige el Prof. M. Valdivia.

cualquier conjunto A de E, $A \setminus 0(A)$ es siempre de primera categoría, es decir, para comprobar si un conjunto A tiene la propiedad de Baire basta con demostrar que $0(A) \setminus A$ es un conjunto de primera categoría. Utilizaremos el siguiente resultado que puede ser encontrado en (2), p. 114: (+) Sea E un espacio topológico y sea A un conjunto de E que es unión numerable de una sucesión (A_n) de conjuntos de E. Entonces, $0(A) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} 0(A_n)$ es un conjunto de primera categoría.

A continuación especificamos algunas propiedades de los espacios K-Suslinianos que utilizaremos en lo que sigue:

(++) Todo subespacio cerrado de un espacio K-Susliniano es un espacio K-Susliniano. La imagen continua de un espacio K-Susliniano es un espacio K-Susliniano. (Ver (3))

(+++) Todo espacio K-Susliniano es de Lindelof (Ver (3))

(++++) La condición b) de la definición de espacio K-Susliniano puede ser sustituida por la siguiente: Dada cualquier red $(x_i : i \in I, \geq)$ de P convergente a un cierto punto x de P, la red $(y_i : i \in I, \geq)$, donde $y_i \in f(x_i)$, tiene un punto adherente en E que pertenece a $f(x)$. (Ver (4)).

Probaremos el siguiente Teorema.

Teorema. Sea $(E, .)$ un grupo topológico. Sea A un conjunto de E que, con la topología inducida por la de E, es un espacio K-Susliniane. Sea B un conjunto cerrada de E tal que $A \cdot B$ es de segunda categoría en E. Entonces, $A \cdot B$ tiene la propiedad de Baire.

Demostración: Como A es un espacio K-Susliniano, existe un espacio polaco P y una aplicación f de P en las partes compactas de A verificando las condiciones a) y (++++). Como P es separable y metrizable, existe una sucesión de bolas cerradas, de radios más pequeños que la unidad, cubriendo P. Sea (B_n) esta sucesión. Supongamos ya construida la bola $B_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ para los números naturales $n_1, n_2, \ldots n_k$ y sea $(B_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n})$ una sucesión de bolas cerradas, de radios menores que $1/2^k$, cubriendo el espacio metrizable separable $B_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$. Sea $A_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ la unión de las imágenes de cada punto de $B_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ mediante f. Inductivamente, $A_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ será unión, al variar n, de $A_{n_1\, n_2, \ldots, n_k, n}$. Entonces, $A \cdot B = \bigcup \{A \cdot x : x \in B\} = \bigcup \{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cdot x : x \in B\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cdot B$ e inductivamente $A_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \cdot B =$

$= \bigcup \{A_{n_1, n_2, ..., n_k, n} \cdot B : n = 1, 2, ...\}$. Por el resultado $(+)$, $0 (A_{n_1, n_2, ..., n_k} \cdot \cdot B) \setminus \bigcup \{0 (A_{n_1, n_2, ..., n_k, n} \cdot B) : n = 1, 2, ...\} = M (n_1, n_2, ..., n_k)$ es un conjunto de primera categoría, donde $n_1, n_2, ... n_k$ varían sobre el conjunto de los números naturales. Sea $M = 0 (A \cdot B) \setminus \bigcup \{0 (A_n \cdot B) : : n = 1, 2 ...\}$, que también será un conjunto de primera categoría. Sea H la unión de M y todos los $M (n_1, n_2, ..., n_k)$ al variar $n_1, n_2, ..., n_k$ sobre los naturales y $k = 1, 2, ...$, que será un conjunto de primera categoría. Bastará con probar que $0 (A \cdot B) \subset A \cdot B \cup H$ o, equivalentemente, que $0 (A \cdot B) \setminus H \subset A \cdot B$. Sea x un punto de $0 (A \cdot B) \setminus H$. Entonces, existirá una sucesión de naturales $m_1, m_2, ..., m_k, ...$ de forma que x es adherente a $A_{m_1} \cdot B, A_{m_1, m_2} \cdot B, ..., A_{m_1, m_2, ..., m_k} \cdot B, ...$. Sea $(U_a : a \in L)$ un sistema fundamental de entornos de x. Claramente, $U_a \cap (A_{m_1, m_2, ... m_k} \cdot B)$ nunca es vacío, luego existe un $x (a, k)$ perteneciente a esta intersección. Ordenando convenientemente el conjunto de índices $L \times N$, lograremos que la red $(x (a, k) : (a, k) \in \in L \times N, \geq)$ converja a x: decimos que (a, k) es posterior a (a', k') si $k \geq k'$ y si $U_a \subset U_{a'}$. Descomponiendo $x (a, k)$ en producto de $h (a, k)$ y $b (a, k)$, donde $h (a, k)$ pertenece a $A_{m_1, m_2, ..., m_k}$ y $b (a, k)$ pertenece a B, seleccionamos una red $(t (a, k) : (a, k) \in L \times N, \geq)$ en P tal que $h (a, k)$ pertenezca a $f (t (a, k))$. Esta red converge a un cierto t de P, luego aplicando la condición $(++++)$, la red $(h (a, k) : (a, k) \in \in L N, \geq)$ tiene un punto adherente y que pertenece a $f (t)$. Sea $(h' (a, k) : (a, k) \in L N, \geq)$ una subred de la red anterior que converge a y. Entonces, $b' (a, k) = h'^{-1} (a, k) \cdot x' (a, k)$ será una red convergente a un cierto b, que por ser B cerrado, $b \in B$. Tomando límites, $x = y \cdot b$ que pertenece a $A \cdot B$

QED

El siguiente resultado puede hallarse en (3), p. 46: $(+++++)$ Sea $(G, .)$ un grupo topológico y sea A un conjunto de G de segunda categoría que tiene la propiedad de Baire. Entonces, $A \cdot A^{-1}$ es un entorno del elemento neutro.

COROLARIO. *Sea $(F, .)$ un grupo topológico K-Susliniano y sea $(E, .)$ un grupo topológico de segunda categoría. Sea f un homomorfismo algebraico continuo de F sobre E. Entonces, f es abierto.*

Demostración: Sea U un entorno del elemento neutro de F y sea V un entorno del elemento neutro de F cerrado y simétrico tal que $V \cdot V^{-1} \subset U$. Como V es cerrado, V es K-Susliniano y también

$f(V)$, $(++)$. Como F es un espacio de Lindelöf, $(+++)$, existe una sucesión de elementos de F, (x_n), tales que $c_n \cdot \mathring{V}$ cubren F. Tomando imágenes mediante f, llegamos a la conclusión de que $f(V)$ es de segunda categoría en E, pues E es de segunda categoría. Tomando en el Teorema, $A = f(V)$ y $B = \{e\}$ tenemos que $f(V)$ tiene la propiedad de Baire, luego $f(V) \cdot f(V)^{-1} = f(V \cdot V^{-1})$ es un entorno del elemento neutro de E, por $(+++++)$. Como $V \cdot V^{-1}$ está contenido en U, llegamos a la conclusión de que f es una aplicación abierta.

QED

NOTA: A. Martineau prueba en (3) el siguiente resultado: Sea f un homomorfismo algebraico continuo de un grupo topológico K-Susliniano sobre un grupo topológico K-Susliniano de Baire. Entonces, f es abierta. Nuestro Corolario generaliza el resultado de Martineau.

REFERENCIAS

(1) BOURBAKI, N : Topologie General, Chap. 9, *Utilisation des nombres réels en topologie general.* París 1958.

(2) DE WILDE, M.: *Reseaux dans les espaces linéaires a semi-normes* Thése d'Agregation de l'Enseignement Supérieur, Liège, 1969.

(3) MARTINEAU, A.: *Sur des théorèmes de S. Banach et de L. Schwartz concernant le grahe fermé* Studia Math. XXX, 1968.

(4) VALDIVIA, M.: *On the closed graph theorem in topological spaces* (pendiente de publicación).