ACERCA DEL GENERO VIRTUAL DE LAS SUPERFICIES ALGEBRAICAS

por

EDUARDO CASAS ALVERO

Primera parte (1)

INTRODUCCION

El problema tratado aquí tiene su origen en la clásica fórmula del género para curvas algebraicas planas. Dicha fórmula expresa el género (efectivo) de una curva algebraica plana en función de su género virtual (género aritmético para algunos autores) y de un término que depende de las singularidades de la curva.

Es bien sabido que los géneros efectivo y virtual de una curva no singular coinciden, ello permite interpretar el género efectivo de una curva cualquiera como el género virtual de su desingularizada: si se escribe la fórmula del género en la forma $g = p + \delta$ donde g es el genero efectivo y p es género virtual, puede interpretarse δ como la diferencia entre los géneros virtuales del modelo no singular y de la propia curva; en [3], interpretado δ como la variación de género virtual sufrida en el proceso de desingularización, se establece la fórmula del género para curvas no necesariamente planas:

$$g = p - \Sigma_x (\mu_x + p_x - 1)$$

con el sumatorio extendido a todos los puntos, ordinarios e infinitamente próximos, de la curva e indicando por μ_x, p_x, respectivamente, la multiplicidad de x y el género virtual del cono tangente en x; la demostración se obtiene descomponiendo el proceso de desingulari-

(1) La segunda parte de esta memoria se publicará próximamente en *Collectanea Methemática*. La introducción y bibliografía que figuran aquí son comunes a las dos partes de la memoria.

zación mediante transformaciones cuadráticas apropiadas y calculando la variación de género virtual en cada transformación.

El mismo problema puede considerarse para una superficie irreducible, si bien en este caso el proceso de desingularización es más complicado: siguiendo a ZARISKI [33], sabemos que se alcanza un modelo no singular de la superficie mediante sucesivas normalizaciones y transformaciones cuadráticas centradas en puntos múltiples aislados. Aun en el caso de una superficie normal es posible que aparezcan pasos de normalización en el proceso de desingularización (por existir una curva múltiple en el primer entorno de un punto singular aislado, por ejemplo); ello justifica el atender en primer lugar a la determinación de la variación en el género virtual sufrida en el proceso de normalización, como primer paso para determinar la variación de género virtual en el proceso de desingularización. Nos ocuparemos pues de determinar la diferencia entre el género virtual de una superficie irreducible S y el de su normalizada $\overline{\overline{S}}$.

Conviene en primer lugar descomponer la proyección natural $S \leftarrow \overline{\overline{S}}$ en un número finito de transformaciones de manera que resulte posible determinar la variación de género virtual en cada una de ellas en un proceso paralelo al que hemos mencionado para curvas. Ello se consigue mediante dos tipos de transformaciones: una primera transformación permite obtener, a partir de S, una superficie S_{cm}, birracionalmente equivalente a S, cuyos puntos verifican todos la condición de COHEN-MACAULAY e isomorfa a S salvo en los puntos de S que no verifican dicha condición (cap. II). Partiendo ya de una superficie cuyos puntos verifican la condición de COHEN-MACAULAY, un segundo tipo de transformación, $S \leftarrow \overline{S}$, opera sobre las curvas múltiples de S en la forma en que las transformaciones cuadráticas actuan sobre los puntos múltiples de una curva (cap. III). Dada una superficie irreducible S se alcanza su normalizada $\overline{\overline{S}}$ operando en primer lugar mediante una transformación $S \leftarrow S_{cm}$ y aplicando luego un número finito de transformaciones del segundo tipo.

En el capítulo IV se da una primera determinación de las variaciones de género virtual por las transformaciones $S \leftarrow S_{cm}$ y $S \leftarrow \overline{S}$. La primera de ellas coincide con la variación de género virtual que sufren, por la misma transformación, ciertas curvas trazadas sobre S.

Los resultados del capítulo IV sugieren la conveniencia de definir, para una curva C en una superficie S, la función asociada a C en S, que generaliza la función de HILBERT-SAMUEL de un anillo local:

si θ es el haz estructural de S y $\mathbf{a}$ el haz de ideales de C en S, la función asociada a C en S es la

$$F(n) = \chi(\theta/\mathbf{a}^{(n)}) = \Sigma_i (-1)^i \, dim \, H^i (S\,;\; \theta/\mathbf{a}^{(n)})$$

donde $\mathbf{a}^{(n)}$ es la enésima potencia simbólica del haz de ideales $\mathbf{a}$. Con ello en el capítulo V se establece el carácter asintóticamente polinómico en n de diversas funciones asociadas y se determinan las diferencias de géneros virtuales en las etapas del proceso de normalización como términos independientes de funciones asociadas asintóticamente polinómicas (V. 4 y V. 5). Importa señalar la analogía con el caso de curva por cuanto en [3] aparecen las variaciones de género virtual como términos independientes de polinomios de HILBERT-SAMUEL.

El resto de la memoria (capítulos VI a IX) está dedicado al cálculo efectivo de la función asociada para determinadas curvas y superficies del espacio proyectivo tridimensional. Ante todo se hace necesario extender algunos resultados clásicos relativos a la representación de curvas en el espacio (cap. VI): se demuestra que por toda curva del espacio que sea localmente intersección de dos superficies en cada punto (en particular cualquier curva con singularidades planas) pasa una superficie irreducible sobre la que la curva es localmente principal; resulta como corolario la representación de dicha curva como intersección de cuatro superficies.

En los capítulos VII y VIII se calcula la función asociada en el espacio a una curva localmente intersección de dos superficies en cada punto. Dicha función proporciona nuevas demostraciones de fórmulas clásicas relativas a curvas no singulares del espacio, en particular la fórmula del género virtual de una intersección parcial de dos superficies.

Los cálculos de los dos capítulos anteriores permiten obtener, en el capítulo IX, la expresión efectiva de la función asociada a una curva ν-uple de una superficie del espacio proyectivo tridimensional, con las hipótesis de que la curva sea localmente intersección de dos superficies en cada punto y la dilatación de la superficie centrada en la curva sea finita (IX. 8). En particular resulta una expresión efectiva de una variación de género virtual (IX. 9) que en el caso particular de una curva doble coincide con la que se obtiene de la clásica fórmula del genero para superficies con singularidades ordinarias.

Las técnicas actuales de la teoría de esquemas y el álgebra conmutativa se han hecho indispensables en la realización de este trabajo; sin embargo, la intuición que ha llevado a la mayoría de los resultados procede de la obra de los geómetras clásicos italianos. En este sentido es de lamentar que la sencillez de algunas demostraciones se vea quizás oscurecida por el formalismo algebráico que por otra parte he sido incapaz de evitar.

CAPITULO I. PRELIMINARES

A lo largo de toda la memoria k será un cuerpo algebraicamente cerrado y de característica cero que tomaremos como cuerpo base. Todos los anillos que se consideren se supondrán conmutativos y con unidad.

Emplearemos constantemente el lenguaje de esquemas de acuerdo con el texto de GROTHENDIECK [8] y los de MUMFORD [11] y DIEUDONNÉ [4] más ceñidos al caso que nos interesa. Los recursos de álgebra conmutativa se utilizarán a menudo sin referencia: todos ellos se hallan en [13], [22] o [24].

Todas las variedades algebraicas que se consideren se sobreentenderán definidas sobre k y proyectivas; para poder considerar variedades con componentes múltiples, cada variedad algebraica se considerará con su estructura natural de k-esquema, subesquema cerrado de un espacio proyectivo $P_n(k) = Proj\ k[X_0, ..., X_n]$. Dos variedades algebraicas se dirán isomorfas si lo son como esquemas, independientemente de sus posibles inmersiones en un espacio proyectivo.

1. — COMPONENTES DE UNA VARIEDAD

La definición habitual de componentes de una variedad reducida hace coincidir estas con las componentes irreducibles (en sentido topológico) del espacio subyacente. Utilizaremos aquí otra definición, aplicable a variedades no reducidas, que permite considerar componentes sumergidas.

Sea V una variedad algebraica cualquiera: si $0 = \mathfrak{q}_1 \cap ... \cap \mathfrak{q}_m$ es una descomposición reducida en primarios del haz de ideales nulo de V ([8], IV. 3), diremos que la subvariedad de V determinada por cada uno de los $\mathfrak{q}_i$ es una componente de V. Llamaremos componentes reducidas de V a las subvariedades definidas por los haces de ideales primos asociados, $\mathfrak{p}_i = rad\,(\mathfrak{q}_i)$. Obviamente, los espacios subyacentes a cada componente y a la reducida correspondiente coinciden. Los espacios subyacentes a las componentes reducidas correspondientes a un $\mathfrak{p}_i$ minimal coinciden con las componentes irreducibles del espacio subyacente a V en sentido topológico. Llamaremos componentes sumergidas a aquellas, reducidas o no, que correspondan a un primo asociado no minimal en la descomposición en primarios del haz de ideales nulo. Las componentes no sumergidas y las componentes reducidas son independientes de la particular descomposición del haz de ideales nulo en primarios ([10] cap. VI. teorema 3).

Es obvio que en el caso de ser V reducida no aparecen componentes sumergidas, cada componente coincide con la reducida correspondiente y nuestra definición coincide con la habitual.

2. — Variedades normales

Una variedad algebraica irreducible V se dirá normal cuando sean íntegramente cerrados en su cuerpo de fracciones todos los anillos locales de V.

La normalizada de una variedad algebraica irreducible V, de haz estructural θ, se tomará como el espectro ([8], II. 1. 3) de la θ-álgebra clausura entera de θ en el cuerpo de funciones racionales de V, $k(V)$. La normalizada $\overline{\overline{V}}$ está determinada, como variedad sobre V, por ser irreducible, normal y birracional y finita sobre V.

Nos resultará de utilidad el siguiente lema cuya demostración es inmediata a partir de la finitud de la clausura entera de los anillos afines de V.

Lema I.1. *Si V es una variedad algebraica irreducible y $\{V_i\}$, $i \in N$, una familia de variedades irreducibles dotadas de morfismos birracionales y finitos*

$$\cdots \longrightarrow V_i \xrightarrow{\eta_i} V_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow V_1 \xrightarrow{\eta_1} V,$$

para i mayor que un cierto n, todos los η_i son isomorfismos.

3. — Dilatación a lo largo de una subvariedad

Partimos de las definiciones y resultados de [8], II. 8: si W es una subvariedad propia de V, de haz de ideales $\mathbf{I}$, la suma directa $\Delta_{\mathbf{I}}(\theta) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathbf{I}^n$ es un álgebra graduada sobre el haz estructural θ de V; la variedad obtenida de V por dilatación a lo largo de W es el espectro homogéneo $Proj\ \Delta_{\mathbf{I}}(\theta)$, dotada del morfismo natural π inducido por la inclusión $\theta \to \Delta_{\mathbf{I}}(\theta)$ que resulta ser birracional y epiyectivo. Interesa destacar que π es localmente isomorfismo en cada punto $x \in V$ donde $\mathbf{I}_x$ sea principal. En particular π induce isomorfismo $V - W \simeq Proj\ \Delta_{\mathbf{I}}(\theta) - \pi^{-1}(W)$.

Debemos probar aquí que si V es una variedad proyectiva, lo mismo ocurre con $Proj\ \Delta_{\mathbf{I}}(\theta)$.

Supongamos V sumergida en un espacio proyectivo $P_r(k)$ y sea $k[X_0, \ldots, X_r]$ el anillo de polinomios correspondiente. Designemos por $\bar{F}$ la clase módulo el ideal de V de un elemento cualquiera $F \in k[X_0, \ldots, X_r]$, en particular $k[\bar{X}_0, \ldots, \bar{X}_r]$ es el anillo de coordenadas homogeneas de V, $V = Proj\ k[\bar{X}_0, \ldots, \bar{X}_r]$. Consideremos en V el recubrimiento por los abiertos afines $U_i = Spec\ k[\bar{X}_0/\bar{X}_i, \ldots, \bar{X}_r/\bar{X}_i]$, $i = 0, \ldots, r$, y supongamos elegidas las coordenadas de manera que V no esté contenida en ninguno de los hiperplanos $X_i = 0$. Sea I el ideal de W en $k[X_0, \ldots, X_r]$, I es un ideal homogéneo y sean $G_0, \ldots G_s$ un sistema de generadores de I, todos ellos homogéneos de grados respectivos $\varrho_0, \ldots, \varrho_s$; para un $\mu > max\ (\varrho_i)$, sea $F_0, \ldots, F_m$ una base del k-espacio vectorial de los elementos homogeneos de I de grado μ. Se observa en primer lugar que, para cada i, los F_j/X_i^{μ}, $j = 0, \ldots, m$, engendran el ideal de W en $k[X_0/X_i, \ldots, X_r/X_i]$: dicho ideal viene engendrado por los $G_h/X_i^{\varrho_h}$ y basta dividir la expresión de $G_h X_i^{\mu-\varrho_h}$ como combinación lineal de los F_j por X_i^{μ} para obtener la expresión de $G_h/X_i^{\varrho_h}$ como combinación lineal de los F_j/X_i^{μ}.

Si designamos por π la proyección natural $Proj\ \Delta_{\mathbf{I}}(\theta) \to V$, podemos recubrir $\pi^{-1}(U_i)$ por los abiertos afines

$$\mathcal{U}_{ij} = Spec\ k[\bar{X}_0/\bar{X}_i, \ldots, \bar{X}_r/\bar{X}_i][\bar{F}_0/\bar{F}_j, \ldots, \bar{F}_m/\bar{F}_j]$$

ya que los $\bar{F}_j/\bar{X}_i$, $j = 0, \ldots, m$, engendran el ideal de W en el anillo $k[\bar{X}_0/\bar{X}_i, \ldots, \bar{X}_r/\bar{X}_i$. Considerando ahora un espacio proyectivo $P_m(k)$

con coordenadas $Y_0, \ldots, Y_m$ y el producto $P_r(k) \times P_m(k)$ recubierto por los abiertos afines

$$E_{ij} = Spec\ k[X_0/X_i, \ldots, X_r/X_i,\ Y_0/Y_j, \ldots, Y_m/Y_j]$$

resulta inmediatamente que el morfismo que a cada X_s/X_i hace corresponder $\overline{X}_s/\overline{X}_i$ y a cada Y_t/Y_j, $\overline{F}_t/\overline{F}_j$, define una inmersión de U_{ij} en E_{ij}. Trivialmente estas inmersiones determinan una inmersión de $Proj\ \Delta_{\mathrm{I}}(\theta)$ en el producto $P_r(k) \times P_m(k)$ de manera que π viene inducida por la proyección en el primer factor. Basta ahora sumergir $P_r(k) \times P_m(k)$ en $P_{rm+r+m}(k)$ mediante el morfismo de SEGRE para obtener una inmersión de la variedad obtenida por dilatación en un espacio proyectivo.

En particular, la variedad obtenida de V por dilatación a lo largo de W aparece sumergida en $P_r(k) \times P_m(k)$ como el grafo de la transformación definida en V por el sistema lineal de las superficies de grado μ que pasan por W ([5], pág. 22): a un punto genérico $(x_0, \ldots, x_r)$ de V le corresponde por π^{-1} el punto $(x_0, \ldots, x_r;\ F_0(x_0, \ldots, x_r), \ldots, F_m(x_0, \ldots, x_r))$; la transformación definida por el sistema lineal de las hipersuperficies de grado μ que pasan por W se obtiene componiendo π^{-1} con la proyección sobre el segundo factor $P_r(k) \times P_m(k) \to P_m(k)$.

Sea $\overline{V} = Proj\ \Delta_{\mathrm{I}}(\theta)$ y $\overline{\theta}$ su haz estructural: dada una subvariedad de V de haz de ideales $\mathfrak{q}$, su transformada en $\overline{V}$ será la subvariedad de $\overline{V}$ definida por el haz de ideales imagen inversa de $\mathfrak{q}$ por π. Es bien sabido que la transformada de W en $\overline{V}$ es localmente principal, hecho que puede comprobarse directamente a partir de la anterior descripción de π.

4. — GÉNERO VIRTUAL

De acuerdo con la definición clásica ([28] § 31, por ejemplo) el género aritmético virtual de una variedad V, pura de dimensión d, será $(-1)^d(\Phi(0) - 1)$ siendo $\Phi(n)$ el polinomio que expresa, para n suficientemente alto, la postulación de la variedad.

Si θ_V es el haz estructural de V, los resultados de SERRE [23] nos permiten tomar el género aritmético virtual en la forma

$$p_V = (-1)^d (\chi(V) - 1)$$

donde

$$\chi(V) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i \, dim_k H^i(V; \, \theta_V)$$

Conviene señalar que el género aritmético virtual, al que muchos autores llaman actualmente género aritmético, no coincide en general con el género aritmético clásico (véanse las definiciones de [5], [28] § 31, o [29] cap. IV en contraposición a la nomenclatura utilizada por el propio SERRE, [23] pág. 276).

Al no existir aquí peligro de confusión nos referiremos al género aritmético virtual llamándolo, más simplemente, género virtual.

5. — POTENCIAS SIMBÓLICAS

Es bien sabido que si A es un anillo íntegro noetheriano y p un ideal primo de A, las potencias p^n no son en general ideales p-primarios y acostumbra a designarse por $p^{(n)}$ (potencia simbólica enésima) la componente p-primaria de $p^n : p^{(n)} = p^n A_p \cap A$.

Si A es el anillo de un abierto afín de una variedad irreducible V y p el ideal correspondiente a una variedad irreducible W, $p^{(n)}$ puede interpretarse como el conjunto de los elementos de A que presentan orden de anulación n a lo largo de W en el sentido de que se anulan con orden n en el punto genérico de W. Es razonable considerar entonces que la variedad «W contada n veces» viene definida por el ideal $p^{(n)}$. *En* cambio, la variedad definida por p^n presenta, si $p^{(n)} \neq p^n$, componentes sumergidas además de la componente maximal definida por $p^{(n)}$.

Necesitamos considerar el caso de una subvariedad reducible y para ello generalizaremos la definición de potencias simbólicas: si A es un anillo íntegro noetheriano y a es un ideal de A cuyos primos asociados minimales son $p_1, \ldots, p_m$, estos son también los primos asociados minimales de a^n y definimos $a^{(n)}$ como la intersección de las componentes primarias de a^n correspondientes a $p_1, \ldots, p_m$. Equivalentemente si $S = A - p_1 \cup \ldots \cup p_m$, $a^{(n)} = (a^n S^{-1} A) \cap A = (\bigcap_i a^n A_{p_i}) \cap A$ Obviamente, $a^{(1)} = a$ si y solo si a carece de componentes primarias sumergidas.

La definición se extiende inmediatamente a nivel de haces coherentes: si V es una variedad algebraica y $\mathbf{a}$ un haz de ideales coherente del haz estructural de V, el haz $\mathbf{a}^{(n)}$ será la intersección de los haces de ideales primarios correspondientes a primos minimales en la descomposición de $\mathbf{a}^n$; para cada abierto afín U, $\mathbf{a}^{(n)}(U) = (\mathbf{a}(U))^{(n)}$ y para cada punto $x \in V$, $(\mathbf{a}^{(n)})_x = (\mathbf{a}_x)^{(n)}$.

Aun en casos relativamente sencillos en los que la subvariedad definida por $\mathbf{a}$ es pura e incluso irreducible, las potencias ordinarias y simbólicas de $\mathbf{a}$ no coinciden (véase el ejemplo de [18], pág. 29).

TEOREMA 1.2. *Sean A un anillo íntegro noetheriano y a un ideal de A cuyos primos asociados sean todos de una misma altura m. Si a admite un sistema de m generadores, $a^n = a^{(n)}$ cualquiera que sea n.*

Demostración: Sean $p_1, \ldots, p_s$ los primos asociados a a, $S = A - p_1 \cup \ldots \cup p_s$. Llamando B al localizado $B = S^{-1}A$, B es un anillo semilocal de dimensión m Sean $f_1, \ldots, f_m$ un sistema de generadores de a y $b = aB$. Designando por $\widetilde{f_i}$ las clases de los f_i en b/b^2, probemos en primer lugar que el graduado $G_b B = B/b[\widetilde{f_1}, \ldots, \widetilde{f_m}]$ es un anillo de polinomios, esto es, que los $\widetilde{f_i}$ son libres sobre B/b. En caso contrario, si $X_1, \ldots, X_m$ son indeterminadas, el morfismo $\gamma : B/b[X_1, \ldots, X_m] \to B/b[\widetilde{f_1}, \ldots, \widetilde{f_m}]$ tal que $\gamma(X_i) = \widetilde{f_i}$, tendría un núcleo no trivial: sea $P(X_1, \ldots, X_m)$ un elemento homogéneo no nulo de *ker* γ; la longitud de la pieza de grado n de $B/b[X_1, \ldots, X_m]/P$ se calcula fácilmente (B/b es un anillo de ARTIN) resultando, para n mayor que el grado h de P

$$\mathit{long}\,(B/b[X_1, \ldots, X_m]/P)_n = \left(\binom{n+m-1}{m-1} - \binom{n+m-1-h}{m-1}\right) \mathit{long}\, B/b$$

que es un polinomio en n de grado $m-2$ (nulo si $m=1$). En cambio, observando que b es un ideal de definición de B, *long* B/b^n es, para n alto, un polinomio en n de grado $m = \dim B$ ([24] pág. III-7), así

$$\mathit{long}\; b^n/b^{n+1} = \mathit{long}\; B/b^{n+1} - \mathit{long}\; B/b^n$$

es un polinomio en n, para n alto, de grado $m - 1$. Se obtiene una contradicción al ser b^n/b^{n+1} isomorfo a un cociente de

$$(B/b[X_1, \ldots, X_m]/P)_n.$$

Sabido ya que los $\widetilde{f_i}$ son libres sobre B/b, consideremos el graduado $G_a A = \bigoplus_{n \geq 0} a^n/a^{n+1}$ y el morfismo natural entre graduados $\psi : G_a A \to$

$\to G_b B$. Si $\bar{f}_i$ son las clases de los f_i en a/a^2, $G_a A = A/a[\bar{f}_1, ..., \bar{f}_m]$ y representado $G_b B$ como anillo de polinomios, $G_b B = B/b[\tilde{f}_1, ..., \tilde{f}_m]$, ψ opera en grado cero según el morfismo natural $A/a \to B/b$ y $\psi(\bar{f}_i) = \tilde{f}_i$. Por ser B el localizado de A en el complementario de la reunión de los primos asociados a a, $aB \cap A = a$, esto es, $b \cap A = a$ y ψ es inyectivo en grado cero. La independencia algebraica de los $\tilde{f}_i$ sobre B/b permite concluir que ψ es inyectivo.

Supongamos ahora $g \in a^{(n)} - a^n$ para un cierto n: sea r el mayor entero tal que $g \in a^r$, $r > 0$ y, por hipótesis, $r + 1 \leq n$. El elemento $g \in a^r/a^{r+1}$ es no nulo y su imagen por ψ es cero ya que $g \in a^{(n)} \subset b^n \subset b^{r+1}$ con lo que se obtiene una contradicción que prueba el enunciado.

Corolario I.3. *Si V es una variedad algebraica irreducible de dimension d y W una subvariedad de V de dimensión $d - m$ que admite en cada uno de sus puntos un sistema de m ecuaciones locales, las potencias simbólicas y ordinarias del haz de ideales de W coinciden.*

Haremos uso de este corolario en el caso de curvas localmente principales sobre una superficie y en el de curvas de $P_3(k)$ que admiten en cada uno de sus puntos un sistema de dos ecuaciones locales.

6. — Dos lemas

Demostraremos aquí dos resultados de carácter técnico que serán utilizados más adelante.

Lema I.4. *Sean A un anillo íntegro y $m_1, ..., m_s$ ideales maximales de A. Si a es un ideal de A y, para cada i, el ideal $a_i = aA_{m_i}$ admite dos generadores, existen dos elementos f, g de A tales que, para todo i, el ideal engendrado por f, g en A_{m_i}. coincide con a_i.*

Demostración: sean $m_1, ..., m_h, n_1, ..., n_r$ ideales maximales de A distintos entre si, $S_1 = A - m_1 \cup ... \cup m_h$, $S_2 = A - n_1 \cup ... \cup n_r$, $B_1 = S_1^{-1}A$, $B_2 = S_2^{-1}A$, $B_0 = (S_1 \cap S_2)^{-1}A$; probemos en primer lugar que si llamamos $b_1 = aB_1$, $b_2 = aB_2$ y cada uno de ellos admite un par de generadores, $b_1 = (f_1, g_1)$, $b_2 = (f_2, g_2)$, existen f, $g \in A$ tales que $(f, g)B_0 = aB_0$: resulta obvio que f_1, g_1, f_2, g_2 pueden elegirse en a, multiplicandolos, si es necesario, por un inversible de B_1 o B_2.

Sean -

$$\alpha \in m_1 \cap \ldots \cap m_h - n_1 \cup \ldots \cup n_r$$
$$\beta \in n_1 \cap \ldots \cap n_r - m_1 \cup \ldots \cup m_h$$

debiendo observarse que ninguno de los dos conjuntos es vacío. Tomando

$$\begin{aligned} f &= \beta f_1 + \alpha f_2 \\ g &= \beta g_1 + \alpha g_2 \end{aligned} \tag{1}$$

tendremos $f, g \in a$ y por lo tanto $(f, g)\, B_1 \subset a B_1$. Teniendo en cuenta que $f_2, g_2 \in a \subset b_1$, tendremos expresiones en B_1

$$\begin{aligned} f_2 &= \gamma_{11} f_1 + \gamma_{12} g_1 \\ g_2 &= \gamma_{21} f_1 + \gamma_{22} g_1 \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} f &= (\beta + \gamma_{11} \alpha) f_1 + \alpha \gamma_{12} g_1 \\ g &= \gamma_{21} \alpha f_1 + (\beta + \gamma_{22} \alpha) g_1 \end{aligned} \tag{2}$$

El determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} \beta + \gamma_{11} \alpha & \gamma_{12} \alpha \\ \gamma_{21} \alpha & \beta + \gamma_{22} \alpha \end{pmatrix}$$

es $\beta^2 + \alpha (\gamma_{11} \gamma_{22} \alpha + \gamma_{11} \beta + \gamma_{22} \beta - \gamma_{12} \gamma_{21} \alpha)$, inversible en B_1 por la elección de α y β. Pueden por tanto despejarse f_1, g_1 de las (2) y $(f, g)\, B_1 = a B_1 = (f_1, g_1)\, B_1$. Una demostración análoga prueba que $(f, g)\, B_2 = a B_2$.

Si ahora $x \in a B_0$, teniendo en cuenta que los ideales maximales de B_0 lo son de B_1 o B_2, el transportador $((f, g)\, B_0 : x)$ no puede estar contenido en ningún ideal maximal de B_0, luego $x \in (f, g)\, B_0$ y $a B_0 = (f, g)\, B_0$.

Para probar el enunciado basta ahora proceder por inducción: si $S_i = A - m_1 \cup \ldots \cup m_i$, probado que $a S_i^{-1} A$ admite dos generadores, basta utilizar el resultado anterior para asegurar lo mismo de $a S_{i+1}^{-1} A$. Probada la existencia de f, g de A tales que $(f, g)\, S_s^{-1} A = a S_s^{-1} A$, el resultado es ya inmediato al ser los A_{m_i} localizados de $S_s^{-1} A$.

LEMA I.5. *Con las hipótesis del lema anterior, si ahora* aA_{m_i} *es principal para todo* i*, existe* $f \in A$ *tal que* $aA_{m_i} = fA_{m_i}$ *cualquiera que sea* i.

Demostración: Basta repetir la del lema anterior tomando $g_i = 0$ para cada $i = 1, \ldots, s$, de donde resultará $g = 0$.

CAPITULO II

LA CONDICION DE COHEN-MACAULAY EN SUPERFICIE

1. — ANILLOS DE COHEN-MACAULAY DE DIMENSION DOS

Estamos interesados en la condición de COHEN-MACAULAY, que en adelante indicaremos abreviadamente por C. M., para los anillos locales de una superficie irreducible. En lo que se refiere a los anillos locales de dimensión uno, es obvio que verifican siempre la condición C.M. puesto que basta para ello que su ideal maximal contenga un no divisor de cero.

A partir de la caracterización de los módulos de C. M. de [24], pág. IV-20, teorema 2, es inmediato probar la

PROPOSICION II.1. *Si* A *es un anillo local íntegro de dimensión dos,* A *es de C. M. si y solo si existe un elemento* a *en el ideal maximal de* A *tal que todos los primos asociados al ideal* (a) *son de altura uno. En estas condiciones lo mismo ocurre para cualquier otro elemento no nulo y no inversible de* A.

De la observación de la página III-14 de [24] resulta inmediatamente el

COROLARIO II.2. *Un anillo local íntegro de dimensión dos es de C. M. si y solo si es intersección de sus localizados en ideales primos de altura uno.*

2. — SUPERFICIES DE COHEN-MACAULAY

Diremos que una superficie irreducible S es de C. M. en uno de sus puntos x, o que x es un punto C. M. de S, cuando el anillo local de x verifique la condición C. M. Diremos que S es una superficie de

C. M. cuando lo sea en todos sus puntos. Ya hemos observado que para que una superficie sea de C. M. es condición necesaria y suficiente que lo sea en sus puntos cerrados.

Es sabido que toda superficie de $P_3(k)$ y toda superficie normal son C. M., en este último caso basta observar que la normalidad fuerza que se verifique la condición del corolario anterior ([24] pág. III-13).

Si S es una superficie irreducible y x es un punto cerrado de S, supuesto sumergido en un espacio afín un cierto entorno de x en S, cada ideal principal del anillo local θ_x de x en S puede interpretarse como el ideal sobre S de la intersección de S con una cierta hipersuperficie, localmente en x. El hecho de que θ_x sea C. M. equivale a que tal ideal no tenga al maximal de θ_x como primo asociado, esto es, que la intersección de S con la hipersuperficie no tenga al punto x como componente sumergida. Resulta pues que, para que una superficie irreducible sumergida en un cierto espacio proyectivo sea C. M., es necesario y suficiente que por cada uno de sus puntos pase una hipersuperficie que no contenga a S y cuya traza sobre S no tenga al punto como componente sumergida. Con ello la misma condición se verifica para cualquier hipersuperficie que no contenga a S y cualquier punto de S: la traza de una hipersuperficie sobre una superficie C. M. no contenida en ella es una variedad pura de dimensión uno, esto es, una curva.

Nos resultará de utilidad la siguiente caracterización:

Proposición II.3. *Si S es una superficie irreducible, S es C. M. en los puntos de un abierto afín U si y solo si el anillo correspondiente $A = \theta(U)$ es intersección de sus localizados en primos de altura uno.*

Demostración: Es sabido que la condición de que un anillo íntegro sea intersección de sus localizados en ideales primos de altura uno, equivale a que los primos asociados a cualquier ideal principal no nulo sean de altura uno. Si x es un punto cerrado de U, el anillo local en x es el localizado A_m donde m es el ideal maximal de A correspondiente al punto x; basta tomar $a \in m$ no nulo: por hipótesis m no es primo asociado de (a) en A y tampoco lo será mA_m del ideal aA_m con lo que $A_m = \theta_x$ será C. M.

Recíprocamente, sea $a \in A$ $(a \neq 0)$ y supongamos que algún primo asociado de (a) no sea de altura uno. Siendo A íntegro de dimensión dos, tal primo asociado será un maximal m correspondiente a un punto cerrado $x \in U$. Inmediatamente mA_m será primo asociado de aA_m y el anillo local $A_m = \theta_x$ no será C. M.

Proposicion II.4. *Sea A el anillo de un abierto afin U de una superficie irreducible S y sea $\bar{A}$ una extensión entera de A en su cuerpo de fracciones. Si A es intersección de sus localizados en ideales primos de altura uno (i. e., S es C. M. en todos los puntos de U) el conductor de la extensión $A \to \bar{A}$ tiene todos sus primos asociados en A de altura uno; sus componentes primarias son las trazas en A de los conductores de las extensiones no triviales que se deducen de la $A \to \bar{A}$ al localizar en primos de altura uno.*

Demostración. Es sabido que prescindiendo de la hipótesis C. M. la clausura entera de A en su cuerpo de fracciones es un A-módulo de tipo finito de donde el conductor de la extensión anulador del A-módulo $\bar{A}/A$ es un ideal no nulo de A.

Sean $\varkappa$ el conductor de $A \to \bar{A}$, p un ideal primo de altura uno de A y $\Sigma = A - p$; es obvio que el conductor de la extensión $\Sigma^{-1}A \to \Sigma^{-1}\bar{A}$ contiene a $\varkappa$, de ahí que, salvo si $\varkappa \subset p$, el conductor de $\Sigma^{-1}A \to \Sigma^{-1}\bar{A}$ sea todo el anillo y $\Sigma^{-1}A = \Sigma^{-1}\bar{A}$. Recíprocamente, si $\Sigma^{-1}A$ coincide con $\Sigma^{-1}\bar{A}$, de la sucesión exacta

$$0 \to \Sigma^{-1}A \to \Sigma^{-1}\bar{A} \to \Sigma^{-1}(\bar{A}/A) \to 0$$

resulta $\Sigma^{-1}(\bar{A}/A) = 0$ con lo que p no contiene al anulador $\varkappa$ de $\bar{A}/A$.

Si $p_1, \ldots, p_n$ son los primos de altura uno que contienen al conductor, sean $\Sigma_i = A - p_i$ y $\varkappa_i$ los conductores de las extensiones $\Sigma_i^{-1}A \to \Sigma_i^{-1}\bar{A}$. Se tiene $\varkappa \subset \varkappa_i$ para todo i, por consiguiente $\varkappa \subset \bigcap_i (A \cap \varkappa_i)$. Recíprocamente, si $a \in A \cap (\bigcap_i \varkappa_i)$, para cada i, $a\Sigma_i^{-1}\bar{A} \subset \Sigma_i^{-1}A = A_{p_i}$; para los restantes primos de altura uno dicha relación es obvia y $a\bar{A} \subset A_p$ para todo ideal p de altura uno de A. La hipótesis C. M. fuerza que $A = \bigcap_p A_p$ y $\varkappa = \bigcap_i (A \cap \varkappa_i)$.

Cada $\varkappa_i$ es $p_i A_{p_i}$-primario, al ser un ideal propio no nulo de un anillo local íntegro de dimensión uno, con ello la anterior es una descomposición en primarios de $\varkappa$ en la que aparecen como primos asociados los p_i.

Resulta de la demostración, en el caso en que $\bar{A}$ sea la clausura entera de A en su cuerpo de fracciones y prescindiendo de la hipótesis C. M., que los localizados de A en primos de altura uno son normales salvo un número finito, en particular el hecho bien conocido de que la superficie S tiene a lo más un número finito de curvas múltiples y de ser C. M., condición necesaria y suficiente para que sea normal es que lo sean sus anillos locales en puntos de altura uno, esto es, que la superficie carezca de curvas múltiples.

3. — Transformación en superficie Cohen-Macaulay

Probaremos a continuación que a partir de una superficie irreducible S puede obtenerse, por medio de transformaciones monoidales, una superficie S_{cm} birracionalmente equivalente a S, que verifique la condición C. M. y sea isomorfa a S salvo en los puntos en que S no es C. M. Conviene probar en primer lugar la finitud del conjunto de puntos no C. M. de S:

Lema II.5. *Si S es una superficie irreducible, el conjunto de puntos en los que S no es C. M. es finito.*

Demostración. Partiendo de un recubrimiento de S por un número finito de abiertos afines, basta referirse a los puntos de un abierto afín U de S. Teniendo en cuenta que los puntos simples son necesariamente C. M. y que las singularidades aisladas son en número finito, bastará probar que sobre cada curva múltiple irreducible de S hay un número finito de puntos de U no C. M. Sea A el anillo afín de U y p un ideal primo correspondiente a una curva múltiple irreducible; tomemos $a \in p$, $a \neq 0$: si x es un punto de la curva múltiple en el que S no es C. M., x es un punto cerrado correspondiente a un ideal maximal m de A que contiene a p. Al ser el anillo local en x, A_m, no C. M., mA_m es primo asociado de aA_m con lo que m lo es de aA. Teniendo en cuenta que los primos asociados de aA son en número finito, se sigue la conclusión.

Sea x un punto cerrado de una superficie irreducible S. Supuesta S sumergida en un espacio proyectivo, sea H un hiperplano transversal a S que pase por x y no pase por ninguno de los puntos no C. M. de S salvo, en su caso, el propio x. Sea Φ el haz de ideales localmente principal de la traza de H sobre S. Designando por θ el haz estructural de S, si x' es un punto de S distinto de x, o bien la fibra $\Phi_{x'}$ coincide con $\theta_{x'}$, o el anillo $\theta_{x'}$ es C. M. y al ser $\Phi_{x'}$ principal todos sus primos asociados son de altura uno. En cambio el ideal Φ_x, al ser principal y no nulo, tiene todos sus primos asociados de altura uno si y solo si x es un punto C. M. de S. De ahí que, a nivel de haces, los haces de ideales primos asociados a Φ sean todos de altura uno salvo posiblemente el correspondiente al punto cerrado x: este es asociado a Φ si y solo si S no es C. M. en x. Designemos por Φ_1 la intersección de los haces componentes primarias de Φ correspondientes a primos asociados de altura uno: $\Phi_{1x'} = \Phi_{x'}$ para cualquier $x' \neq x$ y $\Phi_{1x} = \Phi_x$ si y solo si S es C. M. en x.

Sea S^1 la superficie obtenida de S por dilatación centrada en la subvariedad definida por Φ_1 y τ_1 la proyección natural $\tau_1 : S^1 \to S$. Observando que en el abierto $S - \{x\}$ coinciden las restricciones de Φ y Φ_1 y el primero es localmente principal, resulta el

LEMA II.6. *τ_1 induce isomorfismo entre $S_1 - \tau_1^{-1}(x)$ y $S - \{x\}$.*

PROPOSICION II.7. *τ_1 es un morfismo finito.*

Demostración. A la vista del resultado anterior basta hacer la demostración para un entorno afín de x. Sea U un tal abierto afín, A el anillo correspondiente y supongamos elegido U tal que $\Gamma_U \Phi = fA$. Sean $f_1, \ldots, f_m$ generadores del ideal $\Gamma_U \Phi_1 = I \subset A$. Si $\Delta_I(A) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n$, $\tau_1^{-1}(U)$ se identifica al espectro homogéneo Proj $\Delta_I(A)$.

Se observa en primer lugar que los f_i/f son enteros sobre A: al coincidir las componentes primarias correspondientes a primos de altura uno de los ideales (f) e I, para todo ideal primo p de altura uno en A, $I A_p = f A_p$ con lo que $f_i/f \in A_p$ para cada i. Teniendo en cuenta que A es excelente, para probar que f_i/f es entero sobre A basta probar que tiene valor no negativo en cualquier valoración centrada en un primo de altura uno de A ([8], IV. 7. 8. 3. 1) y ello es obvio puesto que los elementos de A_p tienen todos valor no negativo por cualquier valoración centrada en p.

Para cada f_i/f tenemos una ecuación de dependencia sobre A

$$(f_i/f)^n + a_{n-1}(f_i/f)^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

de donde

$$f_i^n = -f(a_{n-1}f_i^{n-1} + \ldots + a_0 f^{n-1})$$

igualdad en A que resulta válida en el anillo graduado $\Delta_I(A)$ si se toman f_i, f de grado uno puesto que entonces f_i^n se debe tomar de grado n y el término entre paréntesis resulta de grado $n-1$. De ahí que una potencia conveniente del ideal $I \oplus I^2 \oplus \ldots \oplus I^n \oplus \ldots$ de $\Delta_I(A)$

esté contenida en $f \Delta_I (A)$ entendido f como de grado uno. Con ello ([8], II. 2. 3. 14), $\tau_1^{-1} (U) = Proj\ \Delta_I A = D_+ (f)$ y $\tau_1^{-1} (U)$ es afín, el anillo correspondiente es el localizado homogéneo de $\Delta_I (A)$ en el sistema multiplicativo de las potencias de f (entendido siempre como elemento de grado uno en $\Delta_I (A)$), que es $A [f_1/f, ..., f_m/f]$; se trata de una extensión entera de A por lo ya demostrado y en consecuencia es finito como A-módulo.

LEMA II.8. *τ_1 es isomorfismo si y solo si S es C. M. en x.*

Demostración. Si S es C. M. en x, Φ_1 coincide con Φ y es por ello localmente principal. Reciprocamente, a la vista de la demostración anterior y con las mismas notaciones, si τ_1 es isomorfismo, $A = A [f_i/f]$ con lo que $I = fA$; localizando en el ideal correspondiente al punto x resulta $\Phi_{1x} = \Phi_x$ y x es un punto C. M. de S.

Aplicando sucesivamente transformaciones del tipo descrito se construye una superficie C. M. según el

TEOREMA II.9 *Dada una superficie irreducible S, existe una superficie C. M. S_{cm} dotada de una proyección, $\omega : S_{cm} \to S$, birracional y finita, de manera que si $x_1, ..., x_n$ son los puntos no C. M. de S, ω induce isomorfismo $S_{cm} - \omega^{-1} \{x_1, ..., x_n\} \simeq S - \{x_1, ..., x_n\}$. Por otra parte S_{cm} está determinada salvo isomorfismo como superficie sobre S por el hecho de ser C. M., finita sobre S e isomorfa a S salvo en los puntos no C. M. de S.*

Demostración. Aplicando sucesivas transformaciones del tipo de la descrita anteriormente partiendo cada vez de un punto no C. M., si existe, se construye una sucesión de superficies

$$S \xleftarrow{\tau_1} S^1 \xleftarrow{\tau_2} S^2 \longleftarrow \dots \xleftarrow{\tau_i} S^i \longleftarrow \dots$$

en las condiciones de I.1 que debe ser estacionaria lo que fuerza, en virtud de II.8, que con un número finito de transformaciones se alcance una superficie C. M. que verifica las condiciones del enunciado en virtud de II.6 y II.7.

Para probar la unicidad de S_{cm}, teniendo en cuenta que es irreducible y por ello un esquema íntegro, bastará probar que están determinados los anillos locales de S_{cm} ([8], I. 8. 2. 6). Identifiquemos los cuerpos de funciones racionales de S y S_{cm} a través del isomorfismo inducido por ω, resulta entonces que todos los anillos locales en puntos de altura uno de S_{cm} coinciden con los de sus imágenes en S al ser ω isomorfismo salvo en los puntos no C. M. de S. Si U es un abierto afín de S, sea U_{cm} su antiimagen en S_{cm} y sean A, A_{cm} los anillos correspondientes; por ser S_{cm} C. M., A_{cm} es intersección de sus localizados en ideales primos de altura uno pero estos coinciden con los de A y podemos afirmar que el anillo afín de U_{cm} está determinado como intersección de los anillos locales de los puntos de altura uno de U. En consecuencia los anillos locales de los puntos de U_{cm}, que son los localizados en ideales primos de A_{cm}, están determinados. Basta que U recorra un recubrimiento de S para que queden determinados todos los anillos locales de S_{cm}.

En adelante nos referiremos a S_{cm} como la transformada C. M. de S.

CAPITULO III

CURVAS MULTIPLES SOBRE SUPERFICIES DE COHEN-MACAULAY

Si abordamos ahora el estudio del proceso de normalización de una superficie S con el fin de descomponer la proyección $\overline{\overline{S}} \to S$, de la normalizada en la superficie, en un número finito de proyecciones de modo que sea calculable la variación de género virtual en cada una de ellas, los resultados del capítulo anterior nos permiten cubrir una primera etapa: la transformada C. M. de S es finita sobre S y por ello permite factorizar la anterior proyección en la forma $\overline{\overline{S}} \to S_{cm} \xrightarrow{\omega} S$. Con ello bastará considerar el caso de una superficie C. M.

Nota: A lo largo de este capítulo designaremos por S una superficie que verifique la condición C. M. y por θ su haz estructural

1. — Finitud de la dilatacion centrada en una curva

Dado que la normalizada, $\overline{\overline{S}}$, de S es finita sobre S, cualquier superficie intermedia entre ambas deberá ser también finita sobre S, ello nos lleva en primer lugar a establecer condiciones suficientes para que la superficie obtenida de S por dilatación en una curva sea finita sobre S.

Sea C una curva de S dada por un haz de ideales $\mathbf{a} = \mathbf{q}_1 \cap \ldots \cap \mathbf{q}_r$ donde los $\mathbf{q}_i$ son haces de ideales primarios y sus radicales $\mathbf{p}_i$ de altura uno y distintos dos a dos. Tenemos:

LEMA III.1. *Si x es un punto de C y f un elemento de $\mathbf{a}_x$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) f toma valor mínimo entre los de los elementos de $\mathbf{a}_x$ por toda valoración centrada en un ideal primo de altura uno de θ_x.

b) Para n lo bastante alto, $f\mathbf{a}_x^n = \mathbf{a}_x^{n+1}$.

c) Para n lo bastante alto, $f\mathbf{a}_x^{(n)} = \mathbf{a}_x^{n+1}$.

Se observa que la condición *a*) equivale a que una hipersuperficie cuya traza sobre S tenga ecuación f en un entorno de x, corte a S, en un entorno de x, exactamente en la curva C y con multiplicidad de intersección mínima en cada componente de C.

Demostración de III.1. *c*) $\Rightarrow$ *a*): sea μ el valor mínimo de los elementos de $\mathbf{a}_x$ por una valoración v en las condiciones del enunciado. Para cualquier n, el valor mínimo, por v, de los elementos de $\mathbf{a}_x^{(n)}$ es μn; si n es lo bastante alto como para que se cumpla *c*) y tomamos $g \in \mathbf{a}_x^{(n+1)}$ tal que $v(g) = (n+1)\mu$, por hipótesis $g = fg'$ con $g' \in \mathbf{a}_x^{(n)}$ y $v(f) = v(g) - v(g') \leq (n+1)\mu - n\mu$ de donde $v(f) = \mu$.

a) $\Rightarrow$ *b*): sea $f_1, \ldots, f_m$ un sistema de generadores de $\mathbf{a}_x$. Por hipótesis cada f_i/f tiene valor positivo o nulo por cualquier valoración centrada en un primo de altura uno de θ_x y por ser θ_x excelente, cada f_i/f será entero sobre θ_x; para cada i se tendrá una relación

$$(f_i/f)^{h_i} + a_{h_i-1}(f_i/f)^{h_i-1} + \ldots + a_0 = 0$$

de donde

$$f_i^{h_i} = -f(a_{h_i-1}f_i^{h_i-1} + \ldots + a_0 f^{h_i-1}) = ff_i'$$

con $f_i' \in \mathbf{a}_x^{h_i-1}$; basta tomar $n+1 \geq m \cdot max\,(h_i)$.

b) $\Rightarrow$ *c*): Si p es un ideal primo de altura uno de θ_x que contiene a f, por la hipótesis, $p \supset \mathbf{a}_x^{n+1}$ y en consecuencia, $p \supset \mathbf{a}_x$; siendo p de altura uno, necesariamente es uno de los primos asociados a

$\mathbf{a}_x$ en θ_x, sean estos $p_1, ..., p_s$ y $\Sigma = \theta_x - p_1 \cup ... \cup p_s$. Es obvio que $f\mathbf{a}_x^{(n)} \subset \mathbf{a}_x^{(n+1)}$ cualquiera que sea n. Supongamos $g \in \mathbf{a}_x^{(n+1)}$, para cierto $r \in \Sigma$, $rg \in \mathbf{a}_x^{n+1}$ y $rg = fg'$ con $g' \in a_x^n$ en virtud de $b)$; resulta $g = (g'/r)f$ y bastará probar que $g'/r \in \theta_x$. Es obvio que g'/r es de cada uno de los localizados $(\theta_x)_{p_i}$. Si p es un ideal primo de altura uno no asociado a $\mathbf{a}_x$, $f \notin p$ y por ello $g'/r = g/f \in (\theta_x)_p$. Hemos demostrado que g'/r está en todos los localizados en primos de altura uno de θ_x de donde es elemento de θ_x al ser este último C. M.

TEOREMA III.2. *Sea C una curva de S, $\mathbf{a}$ el haz de ideales correspondiente y x un punto de C: si en $\mathbf{a}_x$ existe un elemento que verifica las condiciones de* III.1, *es posible determinar un entorno afín U de x en S y un elemento $f \in a = \mathbf{a}(U)$ que toma valor mínimo entre los de los elementos de a por cualquier valoración centrada en un ideal primo de altura uno de $A = \theta(U)$. Si se considera la dilatación $\pi : S' \to S$ de S a lo largo de C, $\pi^{-1}(U)$ es un abierto afín de S' cuyo anillo, considerado como extensión de A, es de la forma $A[f_1/f, ..., f_s/f]$ donde los f_i forman un sistema de generadores de a; tal anillo es finito como A-módulo.*

Se deduce en particular del enunciado que π es un morfismo finito en un entorno de x.

Demostración. Sea U' un entorno afín de x que no contenga más componentes de C que las que pasan por x, A' el anillo correspondiente. Sea $f \in \mathbf{a}_x$ en las condiciones de III.1; salvo multiplicación por un inversible de θ_x podemos suponer $f \in A'$. La hipótesis de que todas las componentes de C en U' pasan por x equivale a la igualdad $a' = \mathbf{a}(U') = A' \cap \mathbf{a}_x$ y por ello $f \in a'$.

Si m' es el ideal de A' correspondiente al punto x, elijamos un elemento g en la intersección de todos los primos asociados a fA' no contenidos en m' de modo que $g \notin m'$; de no existir tales primos, sea $g = 1$. El abierto afín $D(g) \subset Spec\, A' = U'$ es un entorno afín de x al que llamaremos U. Su anillo es $A = \theta(U) = A'_g$, localizado de A' en el sistema multiplicativo de las potencias de g. Por la elección de $g, f \in a = \mathbf{a}(U) = a'A$ y el ideal fA tiene todos los primos asociados contenidos en $m = m'A$, ideal de A correspondiente a x. En consecuencia, si v es una valoración centrada en un primo de altura uno de A no contenido en m, $v(f) = 0$ ya que f no pertenece a tal ideal. Si v está centrada en un primo p de altura uno contenido en m, v está también centrada en el ideal $p\theta_x$ de $\theta_x = A_m$ y $v(f)$ es mínimo entre los valores de los elementos de a pues por hipótesis lo era entre los de los elementos de $a\,\theta_x = \mathbf{a}_x$.

Por lo que respecta a la segunda parte del enunciado, $\pi^{-1}(U) = Proj\, A \oplus a \oplus \ldots \oplus a^n \oplus \ldots$. La condición de valor mínimo satisfecha por f asegura que al tomar un sistema de generadores de a, $f_1, \ldots, f_s$, los f_i/f son enteros sobre A (al ser A excelente) de donde se deduce, como en la demostración de II.7 que $\pi^{-1}(U)$ es afín (igual a $D_+(f)$ en el espectro homogéneo), de anillo $A[f_i/f]$, que es finito sobre A al ser extensión entera de A.

Del teorema deducimos inmediatamente el

COROLARIO III.3. *Si en cada punto x de C existe un elemento $f \in \mathbf{a}_x$ que cumple las condiciones de* III.1, *la dilatación de S centrada en C es finita.*

Al final del capítulo IV demostraremos el recíproco de III.3 suponiendo C reducida; por el momento basta una condición suficiente para la finitud de la dilatación.

Es fácil observar que en los puntos genéricos de las componentes de C existen siempre elementos en las condiciones de III.1 de donde, aplicando III.2, se deduce que, cualquiera que sea C, la dilatación centrada en C es finita salvo en un número finito de puntos de C.

Pueden darse ejemplos de curvas sobre una superficie (necesariamente singular) tales que la dilatación de la superficie centrada en una de ellas no es finita; uno de ellos se halla en el apéndice.

2. — LA SUPERFICIE AUXILIAR S'.

En adelante designaremos por C una curva reducida de la superficie S, de haz de ideales $\mathbf{c}$. En los casos de interés C tendrá por componentes curvas múltiples de S.

Aunque las singularidades uno-dimensionales de una superficie C. M. son la única causa de su no normalidad, no conviene eliminarlas directamente por dilataciones centradas en curvas múltiples que en general darán lugar a morfismos no finitos. Se hace necesario elegir adecuadamente el centro de cada dilatación para que esta, además de producir el deseado efecto de desingularización, sea un morfismo finito. A tal fin tenemos:

PROPOSICION III.4. *Dada la curva C en S, existe otra curva C' en S, de haz de ideales* $\mathbf{a}$, *tal que*:

a) *En cada punto* $x \in C'$ *existe* $f_x \in \mathbf{a}_x$ *que cumple las condiciones equivalentes de* III.1.

b) *Las componentes de* C *lo son de* C', *es decir,* $\mathbf{a} = \mathbf{c} \cap \mathbf{q}_{r+1} \cap \dots \cap \mathbf{q}_m$ *donde los* $\mathbf{q}_i$ *son primarios y ninguno de sus radicales es primo asociado de* $\mathbf{c}$.

c) C' *es localmente principal en el abierto* $S - C$.

Obviamente, basta que C cumpla la condición *a*) para poder tomar $C' = C$.

Demostración. Consideremos una hipersuperficie H cualquiera que pase por C y corte a S con multiplicidad de intersección mínima en cada una de las componentes de C. Si $x_1, \dots, x_r$ son los puntos genéricos de las componentes de C, cualquier ecuación local de la traza de H en S en un entorno de x_i, presenta valor mínimo positivo por las valoraciones centradas en el ideal maximal de θ_{x_i} (1).

La traza de H en S es una curva dada sobre S por un haz de ideales localmente principal β que tiene entre sus primos asociados los correspondientes a las componentes de C: basta observar que $\beta \subset \mathbf{c}$ y los primos asociados a ambos haces de ideales son todos de altura uno. Si $\mathbf{c} = \mathbf{p}_1 \cap \dots \cap \mathbf{p}_r$ es la descomposición en primarios (primos en este caso al ser C reducida) del haz de ideales de C, supongamos ordenada la descomposición de β, $\beta = \mathbf{q}_1 \cap \dots \cap \mathbf{q}_m$ de manera que $\mathbf{p}_i = rad\ (\mathbf{q}_i)$ $i = 1, \dots, r$. Si $\mathbf{a}$ es el haz de ideales

$$\mathbf{a} = \mathbf{p}_1 \cap \dots \cap \mathbf{p}_r \cap \mathbf{q}_{r+1} \cap \dots \cap \mathbf{q}_m$$

probaremos que la curva C' definida por $\mathbf{a}$ verifica las condiciones del enunciado.

En cuanto a la condición *a*), para cada $x \in C'$, sea f_x una base de β_x; dada una valoración v centrada en un ideal primo de altura uno de θ_x debemos probar que $v(f_x)$ es mínimo entre los valores de los elementos de $\mathbf{a}_x$: si el ideal es uno de los $(\mathbf{p}_i)_x\, i = 1, \dots, r$, ello se sigue de la elección de H; si el ideal primo es el radical de uno de los $(\mathbf{q}_i)_x\, i = r + 1, \dots, m$, basta observar que localizando en el, el ideal engendrado por $\mathbf{a}_x$ es principal y admite por base a f_x; finalmente, f_x no pertenece a ningún otro ideal primo de altura uno de θ_x y

(1) Utilícese el teorema 6 de [14] para calcular la multiplicidad de intersección.

su valor será cero si la valoración está centrada en algún otro ideal primo de altura uno.

La condición *b*) se verifica trivialmente por construcción y para probar *c*) basta señalar que las fibras de **a** y β en los puntos de $S - C$ coinciden.

Si C' es ahora una curva cualquiera en las condiciones del enunciado anterior, designemos por S' la transformada de S por la dilatación π centrada en C' y por θ' el haz estructural de S'. En virtud de III.3, π será un morfismo finito. Tenemos además:

PROPOSICION III.5. *La transformación π induce un isomorfismo $S' - \pi^{-1}(C) \simeq S - C$. Por otra parte, si y es el punto genérico de una componente de C, los θ'_z para $z \in \pi^{-1}(y)$ son los anillos locales en el primer entorno de θ_y en el sentido de* NORTHCOTT [15].

Demostración. Sabemos que **a** es localmente principal en $S - C$, de ahí el isomorfismo mencionado.

Si y es el punto genérico de una componente C_j de C, sea U un entorno afín de y en las condiciones de III.2; tendremos $\pi^{-1}(U) = Spec\, A[f_i/f]$ donde los f_i forman un sistema de generadores del ideal $a = \mathbf{a}(U)$ y la proyección π viene dada, en $\pi^{-1}(U)$, por la inclusión $A \to A[f_i/f]$. Si p es el ideal primo de altura uno correspondiente a y en A, $\theta_y = A_p$ y $\pi^{-1}(y)$ es el conjunto de ideales primos de $A[f_i/f]$ cuya traza en A es p. Sea $\Sigma = A - p$, tendremos una inyección

$$A_p = \Sigma^{-1} A \to \Sigma^{-1}(A[f_i/f]) = A_p[f_i/f]$$

y los localizados de $A[f_i/f]$ en los elementos de $\pi^{-1}(y)$, anillos locales de las componentes de la antiimagen de C_j, son los localizados de $A_p[f_i/f]$ en sus ideales maximales. Observando que los f_i generan $aA_p = pA_p$ y en virtud de la elección de f, $A_p[f_i/f]$ es el anillo semilocal en el primer entorno de A_p y sus localizados en ideales maximales los anillos locales en el primer entorno de $A_p = \theta_y$ ([15], teorema 10).

3. — LA SUPERFICIE TRANSFORMADA RESPECTO DE C.

A pesar de la hipótesis C. M. en S, es posible que la superficie S' no sea C. M. (véase ejemplo en el apéndice). Designemos por $\overline{S}$ la transformada C. M. de S' y sea $\overline{\pi} : \overline{S} \to S$ la proyección natural, composión de $\bar{S} \xrightarrow{\omega} S' \xrightarrow{\pi} S$. De lo ya establecido resulta que $\bar{S}$ es una superficie birracionalmente equivalente a S y finita sobre S. Es fácil comprobar que $\bar{\pi}$ induce un isomorfismo $\bar{S} - \bar{\pi}^{-1}(C) \simeq S - C$: basta observar que lo mismo ocurría con π con lo que los puntos de $S' - \pi^{-1}(C)$ son $C.\ M.$ y la restricción de ω es isomorfismo.

Llamaremos a $\bar{S}$ transformada de S respecto de C y a $\bar{\pi}$ transformación centrada en C.

La transformada de S respecto de C y la transformación centrada en C vienen caracterizadas por el siguiente teorema que, en particular, libera la definición de $\bar{S}$, $\bar{\pi}$ de la arbitrariedad en la elección de la curva C' como centro de dilatación.

TEOREMA III.6. *La transformada $\bar{S}$ queda caracterizada, como superficie que se proyecta en S, por ser $C.\ M.$, afín sobre S, isomorfa a S salvo en los puntos de C ($\bar{S} - \bar{\pi}^{-1}(C) \simeq S - C$) y tal que los anillos locales en $\bar{S}$ de las componentes de la antiimagen $\bar{\pi}^{-1}(C_j)$ de cada componente C_j de C, son precisamente los anillos locales en el primer entorno del local de C_j en S (identificando los cuerpos de funciones racionales de S, $\bar{S}$ por medio de $\bar{\pi}$).*

Demostración. Hemos observado ya que $\bar{S}$ verifica las condiciones del enunciado, baste observar, con respecto a la última, que lo mismo verificaba S' y que la transformación ω no modifica los anillos locales en puntos de altura uno.

Las condiciones del enunciado aseguran que $\bar{S}$ es un esquema íntegro y bastará, como en la demostración de II.9, probar que están determinados los anillos de un recubrimiento por afines de $\bar{S}$ como subanillos del cuerpo de funciones racionales $k(S) = k(\bar{S})$.

Sean U_i los abiertos afines de un recubrimiento de S, A_i el anillo correspondiente a cada U_i, $\bar{U}_i = \bar{\pi}^{-1}(U_i)$ y $\bar{A}_i$. el anillo afín de $\bar{U}_i$. Para cada ideal primo p de altura uno en $\bar{A}_i$, $(\bar{A}_i)_p$ está determinado: si p no corresponde a una componente de $\bar{\pi}^{-1}(C)$, $(\bar{A}_i)_p$ coincide con el localizado de A_i en $p \cap A_i$; en caso contrario será uno de los anillos en su primer entorno. Por la condición C. M. resulta determinado $\bar{A}_i$ al ser intersección de sus localizados en ideales primos de altura uno.

TEOREMA III.7. *La proyección $\bar{\pi} : \bar{S} \to S$ es un isomorfismo si y solo si C es una curva simple de S (i. e. lo es cada una de sus componentes).*

Demostración. Si C es una curva simple de S, los anillos locales de las componentes de C en S son de valoración discreta, cada uno de ellos aparece como único anillo en su primer entorno ([15], teorema 11) y por ello la propia S, con la identidad como proyección, verifica las condiciones de III.6.

Reciprocamente, si $\bar{\pi}$ es un isomorfismo, el anillo local de cada componente de C tiene un solo anillo local en su primer entorno que coincide con él y es por ello de valoración discreta ([15], teorema 11); de ahí que cada componente de C sea simple en S.

Es inmediato observar, a partir de III.6 y el repetidamente citado teorema 11 de [15], que la superficie S viene de hecho determinada por las componentes de C que son singularidades de S.

En la construcción de $\bar{S}$ ha quedado de manifiesto que $\bar{S}$ es finita sobre S. Procediendo ahora inductivamente, repitiendo la transformación en una curva múltiple de $\bar{S}$, se obtendrá una sucesión de superficies intermedias entre S y su normalizada que por I.1 debe ser estacionaria: ello entraña que tras un número finito de transformaciones se alcance una superficie C. M. carente de curvas múltiples (III.7) que será por ello normal y, por construcción, finita sobre S, coincidiendo en suma con la normalizada de S.

4. — Curvas en los sucesivos entornos de C

Supongamos ahora que C es una curva irreducible de S. A cada una de las componentes reducidas de $\bar{\pi}^{-1}(C)$ la llamaremos curva en el primer entorno de C en S y, definiendo por inducción, las curvas en el enésimo entorno de C en S serán las curvas en el primer entorno de alguna del $(n-1)$-ésimo entorno de C. Se observa inmediatamente que, para n suficientemente alto, todas las curvas en el enésimo entorno de C son simples en la transformada de S correspondiente.

Las curvas en el enésimo entorno de C tienen como anillos locales en la transformada de S correspondiente, los anillos locales en el enésimo entorno del local de C en S. Pueden representarse las curvas en los sucesivos entornos de C por un diagrama en árbol que coincidirá exactamente con el que se asocia, según Northcott [16], al anillo local de C en S.

La transformación $\bar{\pi}$ presenta notables semejanzas con las transformaciones cuadráticas utilizadas en el análisis de singularidades de curvas, hasta el punto de que al proceso de desingularización local de un punto singular de curva corresponde también un árbol de anillos locales en los sucesivos entornos del local del punto y ambos tipos de transformaciones provocan un fraccionamiento similar del proceso de normalización. Ello justifica en parte nuestra definición de curvas en los sucesivos entornos, pero debemos señalar que la propiedad fundamental de los puntos en los sucesivos entornos de un punto de una curva plana, definidos como clases de equivalencia de ramas de curva o por transformaciones cuadráticas ([6], libro 4.º, caps. I y II respectivamente), es la de permitir expresar la multiplicidad de intersección de dos curvas según la conocida fórmula de *Noether*. A la vista de los resultados de [17] y de las propiedades de $\bar{\pi}$, $\bar{S}$, parece posible establecer una fórmula similar para superficies de $P_3(k)$ que justificaría plenamente la definición.

CAPITULO IV

LA VARIACION DE GENERO VIRTUAL

En este capítulo se obtiene una primera determinación de la variación de género virtual de una superficie irreducible sometida a una transformación del tipo de las que hemos definido en capítulos anteriores.

1. — Variacion de genero virtual por proyeccion

Recordemos en primer lugar ([8], III.1.3.2 y III.1.3.3) que el functor imagen directa asociado a un morfismo afín de esquemas es exacto al actuar sobre haces de módulos coherentes por anularse sus derivados por la derecha. En particular el functor imagen directa asociado a un morfismo afín induce isomorfismos entre los grupos de cohomología de un haz coherente de módulos y los de su transformado, de ahí que por tal functor se mantenga invariante la característica de Euler-Poincaré, caso de estar definida.

En nuestro caso, si π es una de las proyecciones definidas en los dos capítulos anteriores (i. e., $\pi = \omega$ o $\pi = \bar{\pi}$), π es un morfismo finito, en particular afín y, designando por χ la característica de Euler-Poincaré y por θ_Z, θ_S los haces estructurales de Z (transformada de S por π) y S, $\chi(\theta_Z) = \chi(\pi_* \theta_Z)$. El morfismo canónico inducido por π, $\theta_S \to \pi_* \theta_Z$ es un monomorfismo, identificaremos θ_S con su imagen en $\pi_* \theta_Z$. De la sucesión exacta de haces de θ-módulos

$$0 \to \theta_S \to \pi_* \theta_Z \to \pi_* \theta_Z/\theta_S \to 0$$

resulta

$$\chi(\theta_Z) = \chi(\pi_* \theta_Z) = \chi(\theta_S) + \chi(\pi_* \theta_Z/\theta_S)$$

es decir, introduciendo los géneros virtuales p_Z, p_S,

$$p_Z = p_S + \chi(\pi_* \theta_Z/\theta_S)$$

2. — La variación de género virtual en la transformación en superficie C. M.

Tratemos en primer lugar el caso en que Z es la transformada C. M. de S, $Z \doteq S_{cm}$, $\pi = \omega$, y sean $x_1, \ldots, x_s$ los puntos no C. M. de S. Si consideramos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \theta \xrightarrow{\ \gamma\ } \omega_* \theta_{cm} \longrightarrow \omega_* \theta_{cm}/\theta \longrightarrow 0 \tag{1}$$

donde θ y θ_{cm} son los haces estructurales de S y S_{cm}, al ser ω un isomorfismo salvo en los puntos $x_1, \ldots, x_s$, la inclusión γ es igualdad en fibra salvo en $x_1, \ldots, x_s$ de donde el haz $\omega_* \theta_{cm}/\theta$ está concentrado en $x_1, \ldots, x_s$. El conductor de ω, anulador de $\omega_* \theta_{cm}/\theta$, tiene como primos asociados los haces de ideales correspondientes a los puntos $x_1, \ldots, x_s$ ya que $(\omega_* \theta_{cm}/\theta)_x$ es no nulo si y solo si x es uno de los x_i.

En particular $\chi(\omega_* \theta_{cm}/\theta) = dim_k\, H^0(\omega_* \theta_{cm}/\theta) = \Sigma_i\, dim_k\, (\omega_* \theta_{cm}/\theta)_{x_i}$ y resulta el

Teorema IV.1. *La diferencia de géneros virtuales $p_{S_{cm}} - p_S$ es siempre no negativa y se anula si y solo si $S = S_{cm}$, es decir, S es* C. M.

Demostración. Hemos observado ya que $p_{S_{cm}} - p_S$ coincide con el entero no negativo $\Sigma_i\, dim_k\, (\omega_* \theta_{cm}/\theta)_{x_i}$. La anulación fuerza $(\omega_* \theta_{cm}/\theta)_{x_i} = 0$ para todo i con lo que $\omega_* \theta_{cm}/\theta = 0$ y ω es la igualdad.

Consideremos ahora una hipersuperficie H cualquiera que corte sin contenerla a S: hemos señalado ya (cap. II) que la traza de H en S no es siempre una variedad pura unidimensional sino que presenta componentes sumergidas de dimensión cero en todos los puntos no C. M. de S por los que pase H. Llamaremos curva cortada por H sobre S a la parte uno-dimensional de la traza de H en S: si Φ es el haz de ideales localmente principal sobre S que determina la traza de H, Φ_1, intersección de los haces primarios correspondientes a primos asociados de altura uno de Φ, es el haz de ideales sobre S de la curva cortada por H.

Si $\mathbf{m}_i$ es el haz de ideales del punto x_i en S, hemos advertido ya que el conductor $\varkappa$ de ω tiene a los $\mathbf{m}_i$ como primos asociados con lo que, para ciertos μ_i, $\bigcap_i \mathbf{m}_i^{\mu_i} \subset \varkappa$. Tomemos la hipersuperficie H con multiplicidad u orden de contacto con S en cada uno de los x_i suficientemente alto como para que $\Phi \subset \mathbf{m}_i^{\mu_i}$ para cada i. Resultará entonces $\Phi \subset \varkappa$ y, multiplicando tensorialmente por θ/Φ la sucesión exacta (1) resulta la sucesión también exacta

$$\theta/\Phi \to \omega_* \theta_{cm}/\Phi\, \omega_* \theta_{cm} \to \omega_* \theta_{cm}/\theta \to 0 \tag{2}$$

Proposición IV.2. $\Phi\, \omega_* \theta_{cm} \cap \theta = \Phi_1$

Demostración. Basta comprobar la igualdad para los abiertos de un recubrimiento afín de S; tomaremos el recubrimiento de modo que las secciones de Φ en cada abierto sean un ideal principal. Sea U uno de los abiertos del recubrimiento y sean $A = \theta(U)$, $fA = \Phi(U)$, $A_{cm} = \Gamma_U\, \omega_* \theta_{cm} = \Gamma_{\omega^{-1}(U)}\, \theta_{cm}$. Es bien sabido que la restricción de $\omega_* \theta_{cm}$ a U es el tildado de A_{cm} como A-módulo y sabemos también que la inclusión $A \to A_{cm}$ induce igualdad entre los localizados en ideales primos de altura uno de A y A_{cm}. Como todos los localizados de A_{cm} son C. M., los primos asociados a fA_{cm} son todos de altura uno y por ello

$$fA_{cm} = A_{cm} \cap \left(\bigcap_P f(A_{cm})_P\right)$$

donde P recorre los primos de altura uno de A_{cm}. De ahí resulta

$$fA_{cm} \cap A = A \cap \left(\bigcap_P f(A_{cm})_P\right) = A \cap \left(\bigcap_p fA_p\right)$$

dada la coincidencia de los localizados en primos de altura uno de A y A_{cm} y suponiendo que en el último término p recorre los ideales primos de altura uno de A. En definitiva $fA_{cm} \cap A$ es la intersección de las componentes primarias de fA con primo asociado de altura uno: $fA_{cm} \cap A = \Phi_1(U)$ de donde la igualdad del enunciado.

COROLARIO IV.3. *La sucesión exacta* (2) *induce la*

$$0 \to \theta/\Phi_1 \to \omega_* \theta_{cm}/\Phi \omega_* \theta_{cm} \to \omega_* \theta_{cm}/\theta \to 0 \tag{3}$$

El primer término de la sucesión exacta es el haz estructural de la que hemos llamado curva cortada por H sobre S. Interpretemos el segundo término:

LEMA IV.4. $\Phi_1 \omega_* \theta_{cm} = \Phi \omega_* \theta_{cm}$.

Demostración. Bastará probar que en cada abierto afín donde Φ sea principal vale la igualdad. Utilizando las mismas notaciones que en IV.2, debemos probar que $\Phi_1(U) A_{cm} = f A_{cm}$; una de las inclusiones es trivial, por otra parte, para cada primo p de altura uno en A, $\Phi_1(U) A_p = f A_p$ ya que las componentes primarias correspondientes a primos de altura uno de $\Phi_1(U)$ y fA coinciden. Resulta así que para cualquier $g \in \Phi_1(U)$, $g/f \in A_p$ cualquiera que sea p de altura uno en A. Recordando que A_{cm} es intersección de sus localizados en primos de altura uno y estos coinciden con los de A, $g/f \in A_{cm}$, es decir, $g \in f A_{cm}$ y se sigue la igualdad.

Tendremos:

$$\Phi \omega_* \theta_{cm} = \Phi_1 \omega_* \theta_{cm} = \omega_* \Phi_1 \theta_{cm}$$

de donde, por la exactitud de ω_* al actuar sobre haces casi-coherentes, el término central de (3) aparece como

$$\omega_* (\theta_{cm}/\Phi_1 \theta_{cm})$$

esto es, la imagen directa del haz estructural de la transformada por ω de la curva cortada por H sobre S. Ello proporciona una primera determinación de la variación de género virtual por transformación de una superficie en superficie C. M.

TEOREMA IV.5. *La diferencia entre el género virtual de la transformada C. M. y el de la propia superficie coincide con la diferencia entre el género virtual de una curva cualquiera cortada sobre S por una hipersuperficie que pase con multiplicidad suficientemente alta por los puntos no C. M. y el género virtual de la transformada de dicha curva en S_{cm}.*

Demostración. Basta calcular a partir de la sucesión (3):

$$\begin{aligned} p_{S_{cm}} - p_S &= \chi(\omega_* \theta_{cm} / \Phi\, \omega_* \theta_{cm}) - \chi(\theta/\Phi_1) = \\ &= \chi(\omega_* (\theta_{cm}/\Phi_1 \theta_{cm})) - \chi(\theta/\Phi_1) = \\ &= \chi(\theta_{cm}/\Phi_1 \theta_{cm}) - \chi(\theta/\Phi_1) = \\ &= 1 - p' - 1 + p = p - p' \end{aligned}$$

designando por p el género virtual de la curva cortada por la hipersuperficie en S y por p' el de su transformada.

Cabe observar que la curva cortada por H sobre S, definida por Φ_1 y su transformada en S_{cm}, definida por $\Phi_1 \theta_{cm} = \Phi \theta_{cm}$, son birracionalmente equivalentes al ser ω isomorfismo salvo en un número finito de puntos.

Consideremos ahora una nueva hipersuperficie que pase por todos los puntos no C. M. de S sin contener a S; sea ψ el haz de ideales localmente principal que determina su traza sobre S. Por hipótesis ψ_{x_i} es un ideal propio de θ_{x_i}, $\psi_{x_i} \subset \mathbf{m}_{x_i}$, de ahí que para n suficientemente alto ψ^n esté contenido en el conductor y ψ^n pueda tomar el papel de Φ en la sucesión (3). La intersección de las componentes primarias correspondientes a primos asociados de altura uno de ψ^n es, por definición, $\psi^{(n)}$ con lo que la sucesión (3) se transforma en la sucesión exacta

$$0 \to \theta/\psi^{(n)} \to \omega_* \theta_{cm}/\psi^n \omega_* \theta_{cm} \to \omega_* \theta_{cm}/\theta \to 0$$

Transformando el término central como hemos hecho anteriormente, tenemos la

$$0 \to \theta/\psi^{(n)} \to \omega_* (\theta_{cm}/\psi^n \theta_{cm}) \to \omega_* \theta_{cm}/\theta \to 0$$

y podemos enunciar:

TEOREMA IV.6. *La diferencia de géneros virtuales* $p_{S_{cm}} - p_S$ *se expresa en la forma*

$$p_{S_{cm}} - p_S = \chi(\theta_{cm}/\psi^n \theta_{cm}) - \chi(\theta/\psi^{(n)})$$

para cualquier n mayor que un cierto n_0, *donde* ψ *es el haz localmente principal de la traza sobre S de una hipersuperficie cualquiera que pasa por todos los puntos de C. M. de S y no contiene a S. También, si* ξ *es el haz de ideales de la curva cortada por la hipersuperficie* *sobre S (i. e., la parte uno-dimensional de la subvariedad definida por ψ)*

$$p_{S_{cm}} - p_S = \chi(\theta_{cm} / \xi^n \theta_{cm}) - \chi(\theta / \xi^{(n)})$$

para $n > n_0$.

Demostración. Asegurada ya la primera parte del enunciado, para comprobar la segunda basta observar que $\psi^{(n)} = \xi^{(n)}$ y $\psi^n \theta_{cm} = \xi^n \theta_{cm}$ ambas igualdades debidas a que en los puntos de altura uno coinciden las fibras de ψ y ξ.

3. — La variación de género virtual en la transformación $S \leftarrow \bar{S}$.

Supongamos ahora, como en el capítulo III, que la superficie S es C. M.: nos ocuparemos de determinar la diferencia entre el género virtual de S y el de su transformada respecto de C, $\bar{S}$. Seguiremos utilizando todas las notaciones del capítulo III, en particular C' será la curva de haz de ideales **a** elegida como centro de la dilatación auxiliar $S \leftarrow S'$.

Lema IV.7. *El conductor $\varkappa$ de la proyección $S \xleftarrow{\bar{\pi}} \bar{S}$ tiene como primos asociados los haces de ideales correspondientes a las componentes de C que son múltiples en S.*

Demostración. Bastará examinar la situación en un abierto afín cualquiera $U \subset S$. Sean $A = \theta(U)$, $\bar{A} = \bar{\pi}_* \bar{\theta}(U) = \bar{\theta}(\bar{\pi}^{-1}(U))$. $\varkappa(U)$ es el conductor de la extensión $A \to \bar{A}$, por II.4 sabemos que los primos asociados a $\varkappa(U)$ son exactamente aquellos ideales p de altura uno en A para los que la extensión $\Sigma^{-1} A \to \Sigma^{-1} \bar{A}$ ($\Sigma = A - p$) no es la igualdad o, lo que es lo mismo, si p corresponde a un punto $x \in U$, $\Sigma^{-1} A = \theta_x$, $\Sigma^{-1} \bar{A} = (\bar{\pi}_* \bar{\theta})_x$ y x es un punto de altura uno en el que $\bar{\pi}$ no induce isomorfismo. Aplicando III.6, estos son los puntos genéricos de las componentes de C cuyos anillos locales en S difieren de su semilocal en su primer entorno lo que equivale a decir que sean no regulares (Northcott [15], teorema 11) y correspondan por tanto a una componente de C múltiple en S.

Sea $\mathbf{b}$ el haz de ideales de una curva de S sujeto a las siguientes condiciones:

a) las componentes de C lo son de la curva definida por $\mathbf{b}$, es decir, la descomposición de $\mathbf{b}$ en primarios es

$$\mathbf{b} = \mathbf{p}_1 \cap \dots \cap \mathbf{p}_r \cap \mathbf{q}_{r+1} \cap \dots \cap \mathbf{q}_h$$

donde los $\mathbf{p}_i$ son los haces de ideales primos correspondientes a las componentes de C y los $\mathbf{q}_j$ son haces de ideales primarios cuyo radical no está entre los $\mathbf{p}_i$.

b) la transformada de la curva en $\overline{S}$, definida por el haz de ideales $\mathbf{b}\,\overline{\theta}$, es localmente principal (en $\overline{S}$).

Se observa inmediatamente que el haz de ideales $\mathbf{a}$ de la curva auxiliar C' verifica las dos condiciones: basta advertir que siendo C' el centro de la dilatación $S \leftarrow S'$, el haz de ideales de su transformada en S' es ya localmente principal y lo propio ocurre en $\overline{S} = S'_{cm}$.

Por el lema IV.7, cualquier potencia $\mathbf{b}^n$ con n suficientemente alto está contenida en el conductor $\varkappa$. De ahí que de la sucesión exacta

$$0 \to \theta \to \overline{\pi}_* \overline{\theta} \to \overline{\pi}_* \overline{\theta}/\theta \to 0$$

podamos deducir, por producto tensorial por $\theta/\mathbf{b}^n$, la sucesión exacta

$$\theta/\mathbf{b}^n \to \overline{\pi}_* \overline{\theta}/\mathbf{b}^n \overline{\pi}_* \overline{\theta} \to \overline{\pi}_* \overline{\theta}/\theta \to 0 \tag{4}$$

suponiendo n lo bastante alto como para que $\mathbf{b}^n \subset \varkappa$.

Proposicion IV. 8. *La traza de* $\overline{\pi}_* \mathbf{b}^n \overline{\theta} = \mathbf{b}^n \overline{\pi}_* \overline{\theta}$ *sobre* θ *es* $\mathbf{b}^{(n)}$ *si* n *es lo suficientemente alto.*

Demostración. Sea x un punto cualquiera de S, probaremos que $\mathbf{b}_x^{(n)} = \mathbf{b}_x^n (\overline{\pi}_* \overline{\theta})_x \cap \theta_x$. Ello es obvio si x es el punto genérico de S, analicemos en caso en que x sea un punto de altura uno: si x corresponde a una de las componentes de C, en virtud de III.6 los anillos locales $\overline{\theta}_y$ con $y \in \overline{\pi}^{-1}(x)$ son los anillos en el primer entorno de θ_x. de ahí que $(\overline{\pi}_* \overline{\theta})_x = \bigcap_y \overline{\theta}_y$ sea el anillo semilocal en el primer entorno de θ_x, $R(\theta_x)$. Teniendo en cuenta que los primos correspondientes a C son componentes primarias de $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_x$ es el ideal maximal de θ_x y un resultado de NORTHCOTT ([15], teoremas 5 y 10) asegura que, para n lo bastante alto,

$$\mathfrak{b}_x^n R(\theta_x) \cap \theta_x = \mathfrak{b}_x^n = \mathfrak{b}_x^{(n)}$$

con lo que vale el enunciado para x. Si x no corresponde a ninguna componente de C, $\bar{\pi}$ es isomorfismo en un entorno de x de donde $\theta_x = (\bar{\pi}_* \bar{\theta})_x$ y $\mathfrak{b}_x^n = \mathfrak{b}_x^n (\bar{\pi}_* \bar{\theta})_x \cap \theta_x$; la hipótesis de que la curva tranformada de la definida por $\mathfrak{b}$ sea localmente principal fuerza que $\mathfrak{b}_x$ sea principal con lo cual $\mathfrak{b}_x^{(n)} = \mathfrak{b}_x^n = \mathfrak{b}_x^n (\bar{\pi}_* \bar{\theta})_x \cap \theta_x$.

Comprobado el resultado en los puntos de altura uno, sea x un punto cerrado de S. θ_x es un anillo local de dimensión dos cuyos localizados en ideales primos de altura uno son los anillos locales de los puntos genéricos de las curvas irreducibles que pasan por x. Es inmediato comprobar que también en este caso $(\bar{\pi}_* \bar{\theta})_x$ es semilocal, sus localizados en ideales maximales son los $\bar{\theta}_{x_i}$ si $\pi^{-1}(x) = \{x_1, \ldots, x_s\}$ Resulta inmediatamente

$$\mathfrak{b}_x^n (\bar{\pi}_* \bar{\theta})_x = \bigcap_i \mathfrak{b}_x^n \bar{\theta}_{x_i}$$

Cada uno de los $\mathfrak{b}_x^n \bar{\theta}_{x_i} = (\mathfrak{b}^n \bar{\theta})_{x_i}$ es principal, todos sus primos asociados son de altura uno y tenemos:

$$\mathfrak{b}_x^n \bar{\theta}_{x_i} = \bigcap_{z_i} \mathfrak{b}_x^n \bar{\theta}_{z_i} = \bigcap_{z_i} (\mathfrak{b}^n \bar{\theta})_{z_i}$$

donde z_i recorre los puntos genéricos (de altura uno) de las curvas irreducibles de S que pasan por x_i, correspondientes a los ideales primos de altura uno de $\bar{\theta}_{x_i}$. Recordando que θ_x es intersección de sus localizados en ideales primos de altura uno,

$$\theta_x \cap \mathfrak{b}_x^n (\bar{\pi}_* \bar{\theta})_x = [\bigcap_y \theta_y] \cap [\bigcap_z (\mathfrak{b}^n \bar{\theta})_z]$$

donde y recorre los puntos genéricos de las curvas irreducibles de S que pasan por x, correspondientes a los ideales primos de altura uno de θ_x, z recorre los puntos genéricos de las curvas irreducibles de $\bar{S}$ que pasan por alguno de los x_i, esto es, las antiimágenes por $\bar{\pi}$ de los puntos y. De ahí que, asociando,

$$[\bigcap_y \theta_y] \cap [\bigcap_y (\bigcap_{z \in \bar{\pi}^{-1}(y)} (\mathbf{b}^n \bar{\theta})_z)] =$$
$$= [\bigcap_y \theta_y] \cap [\bigcap_y (\bar{\pi}_* \mathbf{b}^n \bar{\theta})_y] =$$
$$= \bigcap_y [\theta_y \cap (\bar{\pi}_* \mathbf{b}^n \bar{\theta})_y] = \bigcap_y \mathbf{b}^n_y$$

si n es lo bastante alto, pero

$$\bigcap_y \mathbf{b}^n_y = \bigcap_y \mathbf{b}^n_x \theta_y = \mathbf{b}^{(n)}_x$$

y queda probada para todo $x \in S$ la relación

$$\mathbf{b}^{(n)}_x = \theta_x \cap \mathbf{b}^n_x (\bar{\pi}_* \bar{\theta})_x$$

COROLARIO IV.9. *La sucesión exacta* (4) *induce la*

$$0 \to \theta / \mathbf{b}^{(n)} \to \bar{\pi}_* \bar{\theta} / \bar{\pi}_* \mathbf{b}^n \bar{\theta} \to \bar{\pi}_* \bar{\theta} / \theta \to 0 \qquad (5)$$

para n suficientemente grande.

Deducimos de aquí una expresión de la diferencia entre los géneros virtuales de $\bar{S}$ y S similar a la de IV.6 que alcanzará su versión definitiva en el capítulo V.

TEOREMA IV.10. *Si p_S es el género virtual de S y $p_{\bar{S}}$ el de $\bar{S}$, se tiene*

$$p_S - p_{\bar{S}} = \chi(\theta / \mathbf{b}^{(n)}) - \chi(\bar{\theta} / \mathbf{b}^n \bar{\theta})$$

para n suficientemente alto.

Demostración. Sabemos ya que $p_{\bar{S}} - p_S = \chi(\bar{\pi}_* \bar{\theta} / \theta)$. Basta ahora usar la sucesión (5) observando que, por la exactitud de $\bar{\pi}_*$,

$$\chi(\bar{\pi}_* \bar{\theta} / \bar{\pi}_* \mathbf{b}^n \bar{\theta}) = \chi(\bar{\pi}_* (\bar{\theta} / \mathbf{b}^n \bar{\theta})) = \chi(\bar{\theta} / \mathbf{b}^n \bar{\theta})$$

4. — Necesidad de la condición de finitud de una dilatación

Los resultados obtenidos permiten ahora completar los del capítulo III probando que para una curva reducida C, la existencia en cada punto $x \in C$ de un elemento f en las condiciones de III.1 equivale a que la dilatación de S centrada en C sea finita. Sea S una superficie C. M. y C una curva reducida de S. Designando por $\widehat{\pi}$ la dilatación de S centrada en C y por $\widehat{S}$ la superficie obtenida, tenemos:

Proposición IV.11. *Si $\widehat{\pi}$ es un morfismo finito, la transformada C. M. de $\widehat{S}$, $\widehat{S}_{cm}$, coincide con $\bar{S}$.*

Demostración. Basta ver que $\widehat{S}_{cm}$ verifica las condiciones del teorema III.6. Es obvio que $\widehat{S}_{cm}$ es C. M., afín sobre S al ser finita sobre S y que la proyección $\widehat{S}_{cm} \to S$ induce un isomorfismo entre el complementario de C en S y el de su transformada en $\widehat{S}_{cm}$. Sea y el punto genérico de una de las componentes de C: dado que la fibra en y del haz de ideales de C es el ideal maximal de θ_y, es inmediata la existencia en θ_y de un elemento f que verifica las condiciones de III.1. De ahí que, por III.2, exista un entorno afín U de y de modo que si $\widehat{\theta}$ es el haz estructural de $\widehat{S}$, $\widehat{\theta}(\pi^{-1}(U)) = A[f_i/f]$ donde $A = \theta(U)$ y los f_i generan el ideal de C en A. Basta ahora proceder como en la demostración de III.5 para probar que los anillos locales de los puntos de $\widehat{\pi}^{-1}(y)$ son los anillos locales en el primer entorno de θ_y y lo mismo ocurre en $\widehat{S}_{cm}$ ya que la transformación en superficie C. M. no altera los anillos locales de dimensión uno.

Teorema IV.12. *Si la dilatación de S centrada en C es finita, para cada punto $x \in C$ existe un elemento f en las condiciones de III.1.*

Demostración. Si $\mathbf{c}$ es el haz de ideales de C en S, probemos en primer lugar que el haz de ideales $\mathbf{c}\,\bar{\theta}$ es localmente principal y puede generarse, en cada punto $y \in \bar{\pi}^{-1}(x)$ por un mismo elemento de θ_x. Bastará demostrar que lo mismo ocurre con $\mathbf{c}\,\widehat{\theta}$, teniendo en cuenta que $\bar{S} = \widehat{S}_{cm}$ por IV.11.

Sean $x \in S$ y U un entorno afín de x en S, A el anillo correspondiente y c el ideal de C en A, supuesto generado por elementos $f_1, ..., f_s \in A$, $\widehat{\pi}^{-1}(U) = Proj\ \Delta_c A$. Los puntos $y_1, ..., y_r$ de $\widehat{\pi}^{-1}(x)$

corresponden a r ideales homogéneos de *Proj* $\Delta_c A$ cuya reunión no puede ser $\bigoplus_{n>0} c^n$. Existe pues un elemento $f \in c$ que, interpretado como de grado uno en $\Delta_c A$, no pertenece a ninguno de tales ideales, el abierto afín $D_+(f)$ es un entorno afín de $y_1, ..., y_r$ cuyo anillo es $A[f_i/f]$. Inmediatamente $cA[f_i/f] = fA[f_i/f]$ y lo propio ocurre en los $\widehat{\theta}_{y_i}$ que son localizados de $A[f_i/f]$.

Aplicando ahora IV.8, sabemos que $\bar{\pi}_* \mathbf{c}^n \bar{\theta} \cap \theta = \mathbf{c}^{(n)}$ para n grande, en fibra en un punto cualquiera x,

$$(\bar{\pi}_* \mathbf{c}^n \bar{\theta})_x \cap \theta_x = \mathbf{c}_x^n (\bar{\pi}_* \bar{\theta})_x \cap \theta_x = \mathbf{c}_x^{(n)}$$

Teniendo en cuenta que $(\bar{\pi}_* \bar{\theta})_x$ es un anillo semilocal cuyos localizados en ideales maximales son los $\bar{\theta}_y$ para $y \in \bar{\pi}^{-1}(x)$, es obvio que el generador elegido anteriormente para los $(\mathbf{c}\,\bar{\theta})_y$ genera $\mathbf{c}_x (\bar{\pi}_* \bar{\theta})_x$ y por ello $\mathbf{c}_x^n (\bar{\pi}_* \bar{\theta})_x = f^n (\bar{\pi}_* \bar{\theta})_x$. Sea n_0 de modo que para $n > n_0$ $f^n (\bar{\pi}_* \bar{\theta})_x \cap \theta_x = \mathbf{c}_x^{(n)}$ y además f^n sea del conductor de la extensión $\theta_x \to (\bar{\pi}_* \bar{\theta})_x$, probemos que en estas condiciones $f \mathbf{c}_x^{(n)} = \mathbf{c}_x^{(n+1)}$: si $g \in \mathbf{c}_x^{(n)}$, $fg \in \theta_x$ y $fg \in f^{n+1} (\bar{\pi}_* \bar{\theta})_x$ con lo que $fg \in \mathbf{c}_x^{(n+1)}$. Recíprocamente, si $g \in \mathbf{c}_x^{(n+1)}$, $g = f^{n+1} h$ con $h \in (\bar{\pi}_* \bar{\theta})_x$, por hipótesis f^n es del conductor y tendremos $g = f(f^n h)$ donde $f^n h$ es de θ_x y a la vez de $f^n (\bar{\pi}_* \bar{\theta})_x$, es decir de $\mathbf{c}_x^{(n)}$.

Finalmente, utilizando IV.8, obtenemos la siguiente proposición que determina un caso en el que la superficie S', obtenida de S por dilatación en C', es C. M. y se hace innecesaria la segunda transformación $S' \leftarrow \bar{S}$.

PROPOSICIÓN IV.13. *Si S es una superficie C. M. y C' es la curva auxiliar, de haz de ideales* $\mathbf{a}$, *elegida en* III.4, *la superficie S', obtenida de S por dilatación centrada en C', es C. M. si se cumple* $\mathbf{a}^n = \mathbf{a}^{(n)}$ *para todo n.*

Demostración. Supongamos que S' no es C. M.; si y es un punto en el que S' no es C. M., forzosamente $y \in \pi^{-1}(C)$ ya que $S - C \simeq S' - \pi^{-1}(C)$. Sean U un entorno afín de $\pi(y)$ en las condiciones de III.2, θ' el haz estructural de S', A, A' $(= A[f_i/f])$, $\bar{A}$ los anillos correspondientes a $U, \pi^{-1}(U), \bar{\pi}^{-1}(U)$ y, finalmente, a el ideal $a = \mathbf{a}(U) \subset A$.

Obviamente $A \subset A' \subset \bar{A}$. Si m es el ideal maximal de A' correspondiente a y, $f \in m$ ya que f genera en A' el ideal de la transformada de C'. Sabiendo que $A'_m = \theta'_y$ no es C. M., m es primo asociado de fA', existe pues $g \in A'$ tal que $(fA' : g) = m$; cualquiera que sea n, $m = (f^{n+1}A' : f^n g)$, elegido n lo bastante alto como para que f^n este en el conductor de la extensión $A \to A'$, $f^n g \in A$ y el transportador en A $(f^{n+1}A' \cap A : f^n g)$ coincide con $m \cap A$ que es el ideal maximal de A correspondiente a $\pi(y)$. Resulta pues que $f^{n+1}A' \cap A$ es un ideal de A que tiene un maximal como primo asociado. Obsevando ahora que $aA' = fA'$ y por ello $a^{n+1}A' = f^{n+1}A'$, resulta $a^{n+1} \subset f^{n+1}A'$. Por otro lado hemos probado en IV.8 que $f^{n+1}\bar{A} \cap A = a^{(n+1)}$ para n lo bastante alto, de donde $a^{n+1} \subset \subset f^{n+1}A' \cap A \subset a^{(n+1)}$. Concluimos que debe ser $a^{n+1} \neq a^{(n+1)}$ ya que en caso contrario resultaría $a^{(n+1)} = f^{n+1}A' \cap A$ y este último tiene un ideal maximal como primo asociado.

CAPITULO V

LA FUNCION ASOCIADA A UNA CURVA

En las expresiones obtenidas en el capítulo anterior para las diferencias de géneros virtuales (IV.6 y IV.10) aparecen términos de la forma $\chi(\theta/\mathbf{a}^{(n)})$ donde θ es el haz estructural de una superficie y $\mathbf{a}$ el haz de ideales de una curva sobre ella. Convendremos en llamar a la función $F(n) = \chi(\theta/\mathbf{a}^{(n)})$ función asociada a la curva sobre la superficie. La definición puede, desde luego, generalizarse al caso de una variedad y una subvariedad de dimensiones arbitrarias; en el caso en que la subvariedad sea un punto cerrado se observa inmediatamente que la función asociada coincide con la función de HILBERT-SAMUEL del anillo local del punto en la variedad. Nos ocuparemos ahora del caso de superficie y curva que es el que se relaciona con las diferencias de géneros virtuales.

1. — RESULTADOS AUXILIARES

LEMA V.1. *Si A es un anillo noetheriano íntegro y a y b son dos ideales de A cuyos primos asociados son todos de altura uno y distintos entre si los de uno y otro ideal, las componentes primarias de la* *intersección $a \cap b$ coinciden con las componentes primarias con primo asociado de altura uno del producto ab.*

Demostración. Es obvio que las componentes primarias de la intersección son las de uno y otro ideal. Por otra parte, los primos asociados a ab de altura uno son los primos minimales conteniendo a ab y al tener que contener a a o a b, coinciden exactamente con los primos asociados a a o a b, es decir son los primos asociados a $a \cap b$. Sea p un primo asociado a a: la componente p-primaria de ab será $A \cap (abA_p)$, pero $b \not\subset p$ ya que en caso contrario p sería uno de los primos minimales de b, es decir, primo asociado, contra la hipótesis; así, $bA_p = A_p$ y $abA_p = aA_p$ de donde finalmente $A \cap (abA_p) = A \cap (aA_p)$ y la componente p-primaria de ab coincide con la componente *p-primaria de a*. La misma demostración puede repetirse a partir de un primo asociado a b.

COROLARIO V.2. *Si A es un anillo noetheriano íntegro en el que los ideales primos asociados a cualquier ideal principal propio y no nulo son de altura uno, en particular un anillo local o afín de una superficie C. M., dados a, $b \in A$, si los ideales (a), (b) carecen de primos asociados comunes, $(a) \cap (b) = (ab)$.*

Demostración. Basta aplicar V.1 teniendo en cuenta que todos los primos asociados al producto son de altura uno al ser este principal.

2. — CURVAS LOCALMENTE PRINCIPALES SOBRE UNA SUPERFICIE C. M.

Estableceremos ahora algunos resultados relativos a curvas sobre una superficie C. M. definidas por un haz de ideales localmente principal; tales resultados son bien conocidos en el caso en que la superficie es no singular (caso en que toda curva es localmente principal) y las singularidades de S no introducen dificultades mientras las curvas se supongan localmente principales.

Sean C_1 y C_2 dos curvas localmente principales sobre una superficie C. M. (en particular irreducible) S. Llamemos ξ y ζ a los haces de ideales correspondientes. La curva compuesta por C_1 y C_2, $C_1 + C_2$ será por definición la definida por el haz de ideales $\xi\zeta$, cada ecuación local de $C_1 + C_2$ es producto de ecuaciones locales de C_1 y C_2.

Sea θ el haz estructural de S y supongamos que C_1 y C_2 carecen de componentes en común, i. e., ningún haz de ideales primos es a la vez asociado a ξ y ζ. Aplicando localmente V.2 $\xi\zeta = \xi \cap \zeta$ y se tiene la sucesión exacta de θ-módulos

$$0 \to \theta/\xi\zeta \to \theta/\xi \oplus \theta/\zeta \to \theta/\xi + \zeta \to 0 \qquad (1)$$

El haz $\theta/\xi + \zeta$ está concentrado en el número finito de puntos comunes a C_1 y C_2, por ello

$$\chi(\theta/\xi + \zeta) = dim_k\ H^0(\theta/\xi + \zeta) = \Sigma_{x \in C_1 \cap C_2}\ dim_k\ \theta_x/\xi_x + \zeta_x$$

y llamaremos a este número, como es habitual en superficie no singular, número de intersección de C_1 y C_2, designándolo por $(C_1 \cdot C_2)$; obviamente el número de intersección coincide con el número de puntos de intersección cuando todas las intersecciones son simples, i. e. $dim_k\ \theta_x/\xi_x + \zeta_x = 1$ para todo $x \in C_1 \cap C_2$.

De la sucesión exacta (1) resulta, tomando características de EULER-POINCARÉ, la fórmula bien conocida que relaciona los géneros virtuales de C_1, C_2 y $C_1 + C_2$:

$$1 - p_{C_1 + C_2} = 1 - p_{C_1} + 1 - p_{C_2} - (C_1 \cdot C_2)$$

Sea C una curva localmente principal en S, de haz de ideales ξ, probaremos que existe una hipersuperficie H tal que el haz localmente principal de su traza sobre S tiene a las componentes primarias de ξ entre las suyas; en este caso diremos que C es intersección parcial de S y H. Sean $\theta_1, ..., \theta_r$ los anillos locales en S de cada una de las componentes reducidas de C, fibras del haz estructural de S en los puntos genéricos de dichas componentes; sea U un abierto afín de S que contenga a los mencionados puntos genéricos, $A = \theta(U)$ el anillo correspondiente: el localizado de A en el complementario de la unión de los ideales primos correspondientes a las componentes de C, sea θ_0, es un anillo semilocal de dimensión uno cuyos localizados en ideales maximales son los θ_i, $i = 1, ..., r$. Si $a = \xi(U)$ es el ideal de C en A, por hipótesis cada uno de los $a\,\theta_i$ es principal, de donde, por I.5, $a\,\theta_0$ es principal, sea $a\,\theta_0 = (f)$. Si S está sumergida en un espacio proyectivo de dimensión m, f es la restricción a la superficie de un cociente de dos formas del mismo grado, $F(X_0, ..., X_m)/G(X_0, ..., X_m)$, con G no identicamente nula en ninguna de las componentes de C. La hipersuperficie de ecuación $F = 0$ verifica las condiciones requeridas: basta tomar una referencia de modo que ninguna de las componentes de C esté contenida en alguno de los hiperplanos $X_i = 0$, las $F(X_0, \ldots, X_m)/X_i^\mu$ (μ grado de F) son ecuaciones de la hipersuperficie en cada uno de los abiertos afines $X_i \neq 0$; sus restricciones g_i a la superficie son elementos de θ_0 y difieren entre si y de f por multiplicación por un inversible de θ_0, resulta entondes $g_i\, \theta_j = f\, \theta_j$ y con ello entre las componentes primarias del haz de ideales engendrado por los g_i sobre S están las del haz de ideales de C.

La intersección de las componentes primarias del haz de ideales de la traza de H sobre S que no son componentes primarias del haz de ideales de C es el haz de ideales de una curva C'' en S a la que llamaremos complemento de C respecto de la intersección de S y H.

LEMA V.3. *Si C es una curva localmente principal sobre S, intersección parcial de S con una hipersuperficie H, su complemento C'' respecto de la intersección de S y H es también localmente principal. La traza de H en S es $C + C''$ y C, C'' carecen de componentes comunes.*

Demostración. Basta razonar en un entorno de cada punto x de S. Sea U un entorno afín de x, de anillo A, donde los ideales de C y de la intersección C' de H y S sean principales, engendrados respectivamente por f_1, $g \in A$. Por hipótesis las componentes primarias de $f_1 A$ lo son de gA: sean $f_1 A = q_1 \cap \ldots \cap q_r$, $gA = q_1 \cap \ldots \cap q_r \cap \cap q'_1 \cap \ldots \cap q'_s$ las descomposiciones respectivas en ideales primarios. Al ser $g \in f_1 A$, $g = f_1 f_2$ y teniendo en cuenta que al localizar en *rad* (q_i), $i = 1, \ldots, r$, f_1 y g engendran el mismo ideal, resulta que f_2 es inversible en tales localizados y ninguno de los ideales primos asociados a $f_1 A$ es asociado a $f_2 A$; aplicando V.2, $gA = f_1 A \cdot f_2 A = f_1 A \cap f_2 A$. Descomponiendo $f_2 A$ en primarios, $f_2 A = q''_1 \cap \ldots \cap q''_h$, se tendrá $gA = q_1 \cap \ldots \cap q_r \cap q''_1 \cap \ldots \cap q''_h$ con *rad* $(q_i) \neq$ *rad* (q''_t) para cada i, t; se trata pues de una descomposición reducida de la que se deduce, por la unicidad de las componentes primarias, $h = s$ y los q'_j deben coincidir con los q''_t por lo que $q'_1 \cap \ldots \cap q'_s = f_2 A$ q. e. d.

Sea ahora H' una nueva hipersuperficie del mismo grado que H, elegida de modo que corte a S en una curva que carezca de componentes comunes con la intersección $C + C''$ de S con H. Las trazas de H y H' sobre S son linealmente equivalentes (1) y podemos llamar

(1) Como divisores de CARTIER ([12] lect. 9) y por lo tanto también en sentido clásico. La equivalencia lineal de divisores de CARTIER es más restrictiva que la equivalencia lineal en sentido clásico ([26] cap. 2.º por ejemplo): basta observar que la serie lineal cortada por las rectas del plano sobre una cúbica plana racional es completa en el primer sentido mientras no lo es en sentido clásico.

número de autointersección de C a $(C \cdot C) = (C \cdot C') - (C \cdot C'')$ si C' es la traza de H' sobre S. Puede probarse directamente la independencia de la definición respecto de la elección de H y H' pero ello resultará consecuencia del cálculo de la función asociada a C.

3. — Función asociada a una curva localmente principal sobre una superficie C. M.

Sea C una curva localmente principal sobre una superficie C. M. S: nos ocuparemos ahora del cálculo de la función asociada a C en S; para ello supongamos representada C como intersección parcial de S con una hipersuperficie H, sea ξ el haz de ideales de C en S y ζ el de su complemento C'' respecto de la intersección de S y H que es también localmente principal; $\xi\,\zeta = \xi \cap \zeta$ será el haz de ideales de $C + C''$, traza de H en S. Sea Φ el haz de ideales de la traza C' en S de una hipersuperficie H' que no contenga a ninguna de las componentes reducidas de $C + C''$ y tenga el mismo grado que H: es inmediato que los haces Φ y $\xi\,\zeta$ son isomorfos, el isomorfismo se obtiene multiplicando por el cociente de las ecuaciones homogéneas de H y H'.

Calculando:

$$\begin{aligned} \chi(\theta/\xi^{n+1}\zeta) &= \chi(\theta) - \chi(\xi^{n+1}\zeta) = \chi(\theta) - \chi(\xi^n\,\xi\,\zeta) = \\ &= \chi(\theta) - \chi(\xi^n \otimes_\theta \xi\,\zeta) = \\ &= \chi(\theta) - \chi(\xi^n \otimes_\theta \Phi) \end{aligned}$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que las curvas definidas por ξ^{n+1} y ζ carecen de componentes reducidas comunes,

$$\chi(\theta/\xi^{n+1}\zeta) = \chi(\theta/\xi^{n+1}) + \chi(\theta/\zeta) - \chi(\theta/\xi^{n+1} + \zeta)$$

resulta pues

$$\chi(\theta/\xi^{n+1}) = \chi(\theta) - \chi(\xi^n \otimes_\theta \Phi) - \chi(\theta/\zeta) + \chi(\theta/\xi^{n+1} + \zeta) \quad (1)$$

teniendo en cuenta que $\xi^n \otimes_\theta \Phi \simeq \xi^n \Phi$,

$$\begin{aligned} \chi(\theta) - \chi(\xi^n \otimes_\theta \Phi) &= \chi(\theta/\xi^n \Phi) = \\ &= \chi(\theta/\xi^n) + \chi(\theta/\Phi) - \chi(\theta/\xi^n + \Phi) \end{aligned}$$

y se obtiene de (1) la relación

$$\chi(\theta/\xi^{n+1}) - \chi(\theta/\xi^n) = \chi(\theta/\Phi) - \chi(\theta/\zeta) + \chi(\theta/\xi^{n+1} + \zeta) - \chi(\theta/\xi^n + \Phi) \quad (2)$$

Atendiendo al tercer sumando, $\chi(\theta/\xi^{n+1}+\zeta)=\Sigma_x\, dim_k\, \theta_x/\xi_x^{n+1}+\zeta_x$, extendida la suma a los puntos de $C\cap C''$. Para cada uno de estos puntos se obtiene fácilmente

$$dim_k\, \theta_x/\xi_x^{n+1}+\zeta_x=(n+1)\, dim_k\, \theta_x/\xi_x+\zeta_x$$

de donde

$$\chi(\theta/\xi^{n+1}+\zeta)=(n+1)\,(C\cdot C'')$$

De forma análoga resulta

$$\chi(\theta/\xi^{n}+\Phi)=n\cdot(C\cdot C')$$

Llevadas estas dos últimas relaciones a la (2) y recordando que $\chi(\theta/\Phi)=\chi(\theta/\xi\,\zeta)$ al ser $\Phi\simeq\xi\,\zeta$, se obtiene

$$\begin{aligned}&\chi(\theta/\xi^{n+1})-\chi(\theta/\xi^{n})=\\&=1-p_{C+C''}-1+p_{C''}+(n+1)\,(C\cdot C'')-n\,(C\cdot C')\\&=1-p_C-n\,(C\cdot C)\end{aligned}$$

Basta ahora sumar para obtener la expresión efectiva de la función asociada a C en S ya que al ser ξ localmente principal, sus potencias simbólicas coinciden con las ordinarias (I.3):

$$\chi(\theta/\xi^{(n)})=-\frac{1}{2}(C\cdot C)\,n^2+\left(1-p_C+\frac{1}{2}(C\cdot C)\right)n$$

Del cálculo resulta en particular el carácter polinómico de la función asociada a una curva localmente principal sobre una superficie C. M. Se observa además que la anterior definición de $(C\cdot C)$ queda justificada al aparecer el número de autointersección en la función asociada que por definición no depende más que de la curva y la superficie.

4. — La diferencia $p_S-p_{S_{cm}}$.

Volvamos ahora a los resultados del capítulo IV, supongamos que S es una superficie irreducible no necesariamente C. M.; con la introducción de la función asociada, el teorema IV.6 permite asegurar que la diferencia $p_S-p_{S_{cm}}$ es, para n suficientemente alto, la diferencia entre el valor de la función asociada a una curva cortada sobre S por una hipersuperficie que pasa por todos los puntos no C. M. y el valor de la función asociada a la transformada, en S_{cm}, de dicha curva. La curva transformada en S_{cm} es localmente principal, resulta pues de los cálculos anteriores que su función asociada es un polinomio en n de grado dos carente de término independiente. Dado que, para n alto, la diferencia entre las dos funciones asociadas es constante, podemos enunciar:

TEOREMA V.4. *Sea S una superficie irreducible no necesariamente C. M. y sea en S la curva cortada por una hipersuperficie que pasa por todos los puntos no C. M. de S. La función asociada a dicha curva, $F(n)$, es, para n suficientemente alto, un polinomio en n de grado dos cuyo término independiente es la diferencia $p_S - p_{S_{cm}}$ entre el género virtual de S y el de su transformada C. M., S_{cm}. Los otros dos términos del polinomio coinciden con los correspondientes en la función asociada a la curva transformada en S_{cm}.*

Señalemos que es también asintóticamente polinómica la función asociada a cualquier curva cortada por una hipersuperficie en S. La demostración puede obtenerse utilizando una transformación similar a la $S \leftarrow S_{cm}$ que altere únicamente los puntos no C. M. de S que estén sobre la curva; la variación de género virtual habida por tal transformación coincide con el término independiente del polinomio cuyos valores igualan los de la función asociada para n alto.

5. — LA DIFERENCIA $p_S - p_{\bar{S}}$

Sea ahora S una superficie C. M.: del teorema IV.10 resulta que la diferencia de géneros virtuales $p_S - p_{\bar{S}}$ viene dada también como diferencia de valores, para n suficientemente alto, de dos funciones asociadas: $\chi(\theta / \mathbf{b}^{(n)})$ es la función asociada a la curva definida por $\mathbf{b}$ y $\chi(\bar{\theta} / \mathbf{b}^n \bar{\theta})$ es la función asociada a su transformada por $\bar{\pi}$ ya que, al ser $\mathbf{b}\bar{\theta}$ localmente principal, $\mathbf{b}^n \bar{\theta} = (\mathbf{b}\bar{\theta})^n = (\mathbf{b}\bar{\theta})^{(n)}$; esta última, utilizando de nuevo que $\mathbf{b}\bar{\theta}$ es localmente principal, es un polinomio en n de grado dos carente de término independiente, de ahí el

TEOREMA V.5. *Sea S una superficie C. M., C una curva reducida de S y $\bar{S}$ la transformada de S respecto de C. Si C'' es una curva cualquiera de S entre cuyas componentes se hallan las de C y cuya transformada en $\bar{S}$ es localmente principal, la función asociada a C'' en S*

es, para n suficientemente alto, un polinomio en n de grado dos cuyo término independiente es la diferencia $p_S - p_{\bar{S}}$ entre los géneros virtuales de S y $\bar{S}$. Los otros dos términos del polinomio coinciden con los correspondientes en la función asociada a la transformada de C''.

En particular resulta:

Corolario V.6. *El término independiente del polinomio que corresponde a la función asociada a C'' depende unicamente de C.*

El papel de C'' en el teorema anterior puede desempeñarlo cualquier curva auxiliar C', en las condiciones de III.4, utilizada para definir la transformación intermedia $S \leftarrow S'$.

Los resultados del final del capítulo IV aseguran que si la dilatación de S con centro en C es finita, la propia C puede tomarse en el lugar de C'' puesto que verifica las condiciones de III.4 exigidas a C'.

También puede tomar C el lugar de C'' si su transformada en $\bar{S}$ es localmente principal, en cualquiera de los dos casos resulta que la función asociada a C es, para n suficientemente alto, un polinomio en n cuyo término independiente es la diferencia de géneros virtuales $p_S - p_{\bar{S}}$ (1).

Queda asegurado el carácter asintóticamente polinómico de la función asociada a cualquier curva reducida sobre una superficie C. M. siempre que la dilatación centrada en dicha curva sea finita; el polinomio correspondiente es de grado dos y su término independiente depende tan solo de las componentes de la curva que sean múltiples en S, resultando nulo si estas no existieran.

Hemos observado ya (cap. III) que si S es una superficie irreducible cualquiera (no necesariamente C. M.), tomando primero su transformada C. M., S_{cm}, y efectuando a partir de ella un número finito de transformaciones respecto de curvas múltiples, se alcanza la superficie normalizada $\bar{\bar{S}}$. Los teoremas V.4 y V.5 determinan la variación de género virtual sufrida en cada transformación como el término independiente del polinomio que corresponde a una función asociada a una curva sobre la superficie a transformar.

---

(1) Hemos probado que si la dilatación de S centrada en C es finita, la transformada de C es localmente principal en $\bar{S}$ (demostración de IV. 12); cabe la posibilidad de que el recíproco sea cierto y los dos casos citados se reduzcan a uno sólo.

BIBLIOGRAFÍA

[1] ABHYANKAR, S. S., *Algebraic space curves*, Les Presses de l'Université de Montréal, 1971.

[2] ABYANKAR, S. S., *On Macaulay exemples, Conference on Conmutative Algebra, Lawrence, Kansas, 1972*. Lect. notes in math. n.º 311, Springer Verlag.

[3] CASAS, E. *Sobre el cálculo efectivo del género de las curvas algebraicas*, Coll. Math. XXV, fasc. 1.º, 1974.

[4] DIEUDONNÉ, J., *Cours de Géométrie Algebrique*, Presses Universitaires de France, 1974.

[5] ENRIQUES, F., *Le Superficie Algebriche*, Nicola Zanichelli, Bologna, 1949.

[6] ENRIQUES, F. y CHISINI, O., *Lezioni sulla teoria geométrica delle ecuazioni e delle funzioni algebriche*, Nicola Zanichelli, Bologna, 1915-1924.

[7] GAETA, F., *Nuove ricerche sulle curve sghembe algebriche di residuale finito*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, Serie IV, XXXI, 1950.

[8] GROTHENDIECK, A. *Elements de Géométrie Algebrique*, Publications Matematiques I. H. E. S.

[9] KNESER, M., *Uber die Darstellung algebraisher Raumkurven als Durchschnitte von Flachen*, Arch. Math. 11, 1960.

[10] LANG, S., *Algebra*, Addison Wesley, 1965.

[11] MUMFORD, D., *Introduction to Algebraic Geometry* (versión preliminar), notas ciclostiladas, Harvard, University.

[12] MUMFORD, D., *Lectures on curves on an algebraic surface*, Ann. of Math. Studies n.º 59, Princeton University Press, 1966.

[13] NAGATA, M., *Local Rings*, Tracts in pure and appl. math. n.º 13, Interscience Publishers.

[14] NORTHCOTT, D. G., *A general theory of one-dimensional local rings*, Proc. Glasgow Math. Ass. 2, 1956.

[15] NORTHCOTT, D. G., *The neighbourhoods of a local ring*, Journ. London Math. Soc. n.º 30, 1955.

[16] NORTHCOTT, D. G. *Some contributions to the theory of one-dimensional local rings*, Proc. London Math. Soc. (3) 8, 1958.

[17] NORTHCOTT, D. G., *Abstract dilatations and infinitely near points*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 52, 1956.

[18] NORTHCOTT, D. G., *Ideal Theory*, Cambridge Tracts, Cambridge University Press, 1963.

[19] PERRON, O., *Uber das Vahlenshe Beispiel zu einem Satz von Kronecker*, Math. Zeitsch. 47, 1941.

[20] SAMUEL, P., *Sur les singularités des varietés algébriques*, Bull. Soc. Math. de France 79, 1951.

[21] SAMUEL, P., *La notion de multiplicité en Algébre et en Géométrie algébrique*, J. Math. pures et appl., XXX, 1951.

[22] SAMUEL, P. y ZARISKI, O., *Conmutative Algebra*, Van Nostrand, 1960.

[23] SERRE, J. P., *Faisceaux algebriques coherents*, Ann. of Math. 61, n.º 2, 1955.

[24] Serre, J. P., *Algébre locale et multiplicités*, Lect. Notes in Math. n.º 11, Springer Verlag, 1965.

[25] SERRE, J. P., *Groupes algebriques et corps de classes*, Hermann, París 1959.

[26] SEVERI, F., *Trattato di Geometría Algebrica*, Nicola Zanichelli, Bologna, 1926.

[27] SEVERI, F., *Il concetto generale di moltiplicitá delle soluzioni pei sistemi di ecuazioni algebriche e la teoría dell'eliminazione*, Annali di Mat. Pura et Appl, XXVI, fasc 3-4, 1947.

[28] SEVERI, F., *Il teorema di Riemann-Roch per curve, superficie e varietá. Cuestioni collegate*, Springer Verlag, Berlin, 1958.

[29] ZARISKI, O., *Algebraic Surfaces* (2.ª ed) Springer Verlag, Berlin, 1958

[30] ZARISKI, O , *Pencils on an algebraic variety and a new proof of a theorem of Bertini*, Collected Papers, vol. I, pág. 154, Massachusetts Institute of Technology Press, 1972.

[31] ZARISKI, O , *The theorem of Bertini on the variable singular points of a linear system of varieties*, Collected Papers, vol. I, pág 242, Massachusetts Institute of Technology Press, 1972.

[32] ZARISKI, O , *Introduction to the theory of algebraic surfaces*, Lect. Notes in Math. n.º 83, Springer Verlag, 1969.

[33] ZARISKI, O , *The reduction of the singularities of an algebraic surface* Collected Papers, vol. I, pág 325, Massachusetts Institute of Technology Press, 1972.

Departamento de Geometría
y Topología
Facultad de Matemáticas
Universidad de Barcelona