UNA CONJETURA DE MAURIN SOBRE OPERADORES NUCLEARES EN EL ESPACIO DE HILBERT

por

PEDRO J. BURILLO LÓPEZ

ABSTRACT

K. Maurin (v. [5]) (*) gives a characterization of nuclear operators in Hilbert space $\mathcal{H}$, as those ones making $\sum_1^\infty ||Ae_i|| < \infty$ for every orthonormal base $\{e_n \mid n \in N\}$ in $\mathcal{H}$. Our aim in this paper is to show that such operators do not exist, i.e. «Let T a nuclear operator in $\mathcal{H}$, then there are infinitely many orthonormal bases $\{e_n \mid n \in N\}$ such that $\sum_1^\infty ||Te_n|| < \infty$, and also infinitely many orthonormal bases for which $\sum_1^\infty ||Te_n||$ is not bounded».

En el conjunto de operadores completamente continuos definidos en el espacio de Hilbert separable (real o complejo) $\mathcal{H}$, destacan por su interés los ideales $\mathcal{G}_2$ y $\mathcal{G}_1$ constituidos respectivamente por los operadores de Hilbert-Schmidt (de doble norma finita) y los operadores nucleares, (v. [6]).

Un operador lineal A definido en $\mathcal{H}$ pertenece a $\mathcal{G}_2$ si y sólo si para una determinada base ortonormal $\{e_n \mid n \in N\}$ de $\mathcal{H}$ es

$$|||A|||^2 = \sum_1^\infty ||Ae_i||^2 < \infty \tag{1}$$

verificándose además (1) independientemente de la base ortonormal elegida.

(*) Los números entre corchetes hacen referencia a la bibliografía.

K. Maurin (v. [5], pág. 160, Th 2 y 3) conjetura que los operadores nucleares *son, y solo ellos, los* que verifican

$$\sum_1^\infty ||Ae_i|| < \infty$$

para toda base ortonormal $\{e_n \mid n \in N\}$ de $\mathcal{H}$.

Recientemente, J. R. Holub (v. [4]) prueba que la conjetura de Maurin es falsa, construyendo un operador nuclear T para el que $\sum_1^\infty ||T\varphi_i|| = \infty$, siendo $\{\varphi_n \mid n \in N\}$ una determinada base ortonormal. En esta línea, Holub prueba que «$A \in \mathcal{S}_1 \Leftrightarrow \sum_1^\infty ||Ae_i|| < \infty$ para al menos una base ortonormal $\{e_n \mid n \in N\}$ de $\mathcal{H}$».

El propósito de este trabajo es demostrar que los operadores conjeturados por Maurin no existen: utilizando una idea de Ghoberg y Markus (v. [2]) demostramos el

THEOREMA 1. — Sea A un operador lineal acotado no nulo definido en $\mathcal{H}$. Existe una infinidad de bases ortonormales $\{u_n \mid n \in N\}$ para las que

$$\sum_1^\infty ||Au_i|| = \infty. \tag{2}$$

Demostración: Si A no es completamente continuo, para cualquier base ortonormal $\{u_n \mid n \in N\}$ de $\mathcal{H}$ es $\sum_1^\infty ||Au_i||^2 = \infty$ y por consiguiente se verifica (2).

Si A es completamente continuo, su descomposición polar (v. [6]) nos permite escribir

$$A = U \cdot H \tag{3}$$

donde U es isométrico parcial, $H = (A^* A)^{1/2}$ es autoadjunto positivo y además $D_U = \overline{H(\mathcal{H})}$. (Es posible tambien elegir Ker U = Ker H, con lo que la expresión (3) está unívocamente determinada). Al ser H autoadjunto y completamente continuo, consideremos su espectro de puntos $\sigma_P(H) = \{\lambda_n \in \mathbf{R}^+ \mid n \in N\}$ y sea $S = \{e_n \mid n \in N\}$ la sucesión ortonormal de vectores propios correspondientes.

Si H es biunívoco, $0 \notin \sigma_P(H)$, el espectro de puntos de H es espectro puro, es decir S es base ortonormal. Si

$$\bar{e}_i = Ue_i \qquad i \in N,$$

el desarrollo en serie de Schmidt para el operador A conduce a que

$$Ax = \sum_{1}^{\infty} \lambda_j (x \mid e_j) \bar{e}_j \qquad \forall\, x \in \mathcal{H}.$$

Se tendrá con esto

$$||Ax||^2 = \sum_{1}^{\infty} \lambda_j^2 \, |(x \mid e_j)|^2 \geq \lambda_1^2 \, |(x \mid e_1)|^2$$

o bien

$$||Ax|| \geq \lambda_1 \, |(x \mid e_1)|.$$

Consideremos ahora una base ortonormal cualquiera $\{c_n \mid n \in N\}$ y sea el vector $a = \sum_{1}^{\infty} \frac{\sqrt{6}}{n\pi} c_n \wedge ||a|| = 1$. Si V es un operador unitario definido en $\mathcal{H}$ y tal que $Ve_1 = a$, la consideración de la base ortonormal $u_n = V^* c_n$ $(n \in N)$ permite escribir

$$||Au_n|| \geq \lambda_1 \, |(u_n \mid e_1)| = \lambda_1 \, |(V^* c_n \mid e_1)| = \lambda_1 \, |(c_n \mid Ve_1)| =$$
$$= \lambda_1 \, |(c_n \mid a)| = \lambda_1 \frac{\sqrt{6}}{n\pi}$$

y por consiguiente

$$\sum_{1}^{\infty} ||Au_n|| = \infty \qquad \text{c. q. d.}$$

Si H no es biunívoco, $0 \in \sigma_p(H)$, el proceso es análogo estudiando el operador restricción $H_1 = H\Big|_{\mathcal{H} \ominus \operatorname{Ker} H}$, siendo además que las sumas (2) no modifican su valor para vectores base del núcleo de H.

Es evidente pues a partir de este Teorema que los operadores conjeturados por Maurin no existen.

Situándonos en el caso de un operador nuclear T, si $\sigma_p((T^* T)^{1/2}) = \{\lambda_n \mid n \in N\}$ y $S = \{e_n \mid n \in N\}$ es la base ortonormal de vectores propios (en el caso de que T no sea biunívoco se podrá completar la sucesión ortonormal de vectores propios a una base ortonormal de $\mathcal{H}$ sin más que adjuntar una base ortonormal del núcleo de T), es sabido que

$$\sum_{1}^{\infty} ||Te_i|| = \sum_{1}^{\infty} \lambda_i < \infty$$

obteniéndose pues sumabilidad de normas de imágenes por T de al menos una base ortonormal de $\mathcal{H}$, como Holub asegura. Probaremos en lo que sigue que existe una infinidad de bases ortonormales para las que se presenta sumabilidad. Necesitamos para ello el

LEMA 1. — Dada una base ortonormal $\{\varphi_n \mid n \in N\}$, se pueden construir infinitas bases ortonormales $\{\psi_n \mid n \in N\}$ de $\mathcal{H}$ tales que

$$\sum_1^\infty \|\psi_n - \varphi_n\| < \infty. \tag{4}$$

Demostración: Consideremos los subespacios $E_2^{(n)} = [\varphi_{2n-1}, \varphi_{2n}]$ y sea $\sum_1^\infty \varepsilon_i$ una serie convergente cualquiera de números reales positivos. Elegimos los vectores

$$\begin{aligned} \psi_{2n-1} &= \cos \alpha_n \cdot \varphi_{2n-1} + \operatorname{sen} \alpha_n \cdot \varphi_{2n} \\ \psi_{2n} &= -\operatorname{sen} \alpha_n \cdot \varphi_{2n-1} + \cos \alpha_n \cdot \varphi_{2n} \qquad n \in N \end{aligned}$$

para los que es evidente que

$$\|\psi_{2n-1}\| = \|\psi_{2n}\| = 1 \wedge (\psi_{2n-1} \mid \psi_{2n}) = 0 \qquad n \in N.$$

Si tomamos ahora el valor angular α_n tal que $0 < \alpha_n \leq \frac{\pi}{2}$ verificando

$$\cos \alpha_n > \frac{2 - \varepsilon_n^2}{2},$$

es claro que

$$\sum_1^\infty \|\psi_i - \varphi_i\| = \sum_1^\infty (2 - 2 \cos \alpha_i)^{1/2} < \sum_1^\infty \varepsilon_i < \infty \qquad \text{c.q.d.}$$

Este lema admite una sencilla generalización en cuanto al proceso demostrativo, pudiendo tomar subespacios $E_p^{(n)}$ p-dimensionales y aun elegirlos de dimensiones distintas.

La relación de equivalencia entre bases reflejada en (4) no es trivial, pues K. I. Babenko (v. [1]) ha construido una base (ortonormal) $\{\psi_n \mid n \in N\}$ para la que se verifica

$$\sum_1^\infty \|\psi_n - \varphi_n\|^2 = \infty$$

para toda base ortonormal $\{\varphi_n \mid n \in N\}$ distinta de la $\{\psi_n \mid n \in N\}$.

Sea ahora la base ortonormal de vectores propios $S = \{e_n \mid n \in N\}$ del operador $(T^* T)^{1/2}$ y designemos por $\mathfrak{B}_S$ la clase no vacia

$$\mathfrak{B}_S = \left\{ S' = \{u_n \mid n \in N\} \mid S' \text{ es base ortonormal y } \sum_1^\infty \|u_n - e_n\| < \infty \right\}.$$

Teorema 2. — Si $S' = \{u_n \mid n \in N\} \in \mathfrak{B}_S$, entonces $\sum_1^\infty \|Tu_n\| < \infty$.

Demostración: A partir de

$$\|Tu_n\| = \|Tu_n - Te_n + Te_n\| \leq \|T\| \cdot \|u_n - e_n\| + \|Te_n\|$$

se sigue fácilmente el aserto. Notemos que no se ha hecho uso de la condición de ortogonalidad para la base S'. En realidad basta con que S' sea una base de Bari de vectores unitarios verificando $\sum \|u_n - e_n\| < \infty$ para que el Teorema anterior se verifique.

El teorema recíproco del anterior no es cierto en general para operadores nucleares: aparte de la base trivial $\{-e_n \mid n \in N\}$ para la que es

$$\sum_1^\infty \|-e_n - e_n\| = \infty \quad \text{y} \quad \sum_1^\infty \|T(-e_n)\| < \infty$$

construiremos una base no trivial que actúe de forma análoga. Volviendo al Lema 1 y suponiendo ahora que $\{\varphi_n \mid n \in N\}$ es la sucesión de vectores propios del operador $(T^* T)^{1/2}$ se tiene

$$\begin{aligned} Tu_{2n-1} &= \cos \alpha_n \lambda_{2n-1} e_{2n-1} + \operatorname{sen} \alpha_n \lambda_{2n} e_{2n} \\ Tu_{2n} &= -\operatorname{sen} \alpha_n \lambda_{2n-1} e_{2n-1} + \cos \alpha_n \lambda_{2n} e_{2n} \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \sum_1^\infty \|Tu_{2n-1}\| &\leq \sum_1^\infty (\lambda_{2n-1}^2 + \lambda_{2n}^2)^{1/2} \\ \sum_1^\infty \|Tu_{2n}\| &\leq \sum_1^\infty (\lambda_{2n-1}^2 + \lambda_{2n}^2)^{1/2} \end{aligned}$$

y al ser T un operador de Hilbert-Schmidt $\left(\sum_1^\infty \lambda_n^2 < \infty\right)$ es claro que

$$\sum_1^\infty \|Tu_i\| < \infty.$$

Pero tomando en éste caso el valor angular α_n verificando $\cos \alpha_n = \frac{2n^2 - 1}{2n^2}$ se tiene

$$\sum_1^\infty ||u_n - e_n|| = \sum_1^\infty \frac{1}{n} = \infty.$$

RESUMEN: No existe ningún operador lineal acotado A no nulo definido en $\mathcal{H}$ para el que $\sum_1^\infty ||Ae_i|| < \infty$, cualquiera que sea la base ortonormal elegida $\{e_n \mid n \in N\}$. Para un operador nuclear cualquiera T existe siempre una infinidad de bases ortonormales $\{e_n \mid n \in N\}$ para las que $\sum_1^\infty ||Te_i|| < \infty$, y una infinidad de bases ortonormales que hacen la serie anterior divergente.

BIBLIOGRAFÍA

[1] K. I. BABENKO: *Sur les fonctions conjuguées*. Doklady Akademii Nauk 62, n.º 2 (1948) 157-160.

[2] G.I. GOHBERG-M.G. MARKUS: *Introduction à la théorie des opérateurs linéaires non auto-adjoints dans un espace hilbertien*. Dunod, París 1971.

[3] P.R. HALMOS: *A Hilbert space problem book*. Van Nostrand, London 1967.

[4] J.R. HOLUB: *Characterization of nuclear operators in Hilbert space*. Rev. Roum. Math. Pures et Appl. XVI, n.º 5 (1971).

[5] K. MAURIN: *Methods of Hilbert space*. Polish Scientific Publishers, Warsaw 1967.

[6] R. SCHATTEN: *Norm Ideals of Completely continuous Operators*. Springer, Berlin 1960.

Departamento de Geometría y Topología
Facultad de Ciencias
Zaragoza.