COBORDISMENOPERATIONEN IN $\Omega^*(- ; Z_p)$

ROLF KULTZE

Uchida hat in [3] die Cohomologie-Operationen der komplexen Cobordismentheorie mod p untersucht. Die in [3] benutzten Methoden sind auf die orientierte Cobordismentheorie mod p $\Omega^*(- ; Z_p)$ nicht mehr anwendbar. In der vorliegenden Note soll jedoch gezeigt werden, daß durch Modifikation der in [3] verwandten Methoden und durch eine Abschwächung der dort gemachten Voraussetzungen auch Aussagen über die Cohomologie-Operationen von $\Omega^*(- ; Z_p)$ möglich sind.

$f: S^1 \to S^1$ sei eine Abbildung vom Grad $p > 0$. Dann bezeichne L_p den Abbildungskegel von f. $\pi: L_p \to S^2$ sei die Projektion von L_p auf S^2, die das 1-Gerüst zu einem Punkt identifiziert. Nach [2], S. 34 gilt

LEMMA 1: *$p > 0$ sei ungerade. Dann gibt es eine natürliche Zahl r und eine Abbildung m: $S^{r+2} L_p \to S^r (L_p \wedge L_p)$ mit den folgenden Eigenschaften:*

1) *Die Abbildungen $[S^r(1 \wedge \pi)]\, m$, $1: S^{r+2} L_p \to S^{r+2} L_p$ sind zueinander homotop.*

2) *Die Abbildungen m, $(S^r T)\, m: S^{r+2} L_p \to S^r (L_p \wedge L_p)$ sind zueinander homotop, wobei T: $L_p \wedge L_p \to L_p \wedge L_p$ die Faktoren vertauscht.*

$\Omega^*(-)$ sei die orientierte Cobordismentheorie; weiter bezeichne $\Omega^*(- ; Z_p)$ die orientierte Cobordismentheorie mod p (p eine ungerade Primzahl). Ist ξ ein n-dimensionales, orientiertes Vektorraumbündel über dem CW-Komplex B, so seien

$$\Phi_\xi : \Omega^k(B) \to \widetilde{\Omega}^{n+k}(T(\xi))$$

$$\Phi_\xi^{(p)} : \Omega^k(B ; Z_p) \to \widetilde{\Omega}^{n+k}(T(\xi) ; Z_p)$$

die zugehörigen Thom-Isomorphismen. Für jedes reelle Vektorraumbündel ξ über B sind außerdem die Pontrjaginschen Klassen $p_i(\xi) \in \Omega^{4i}(B; Z_p)$ erklärt. γ^k sei das kanonische Vektorraumbündel über $BSO(k)$.

$O^*(SO)$ sei die graduierte Algebra der natürlichen, stabilen Cohomologie-Operationen von $\Omega^*(-)$ in sich für die Kategorie der Paare endlicher CW-Komplexe. Entsprechend bezeichne $O^*(SO; Z_p)$ die graduierte Algebra über Z_p der Cohomologie-Operationen von $\Omega^*(-; Z_p)$ in sich. Für $\Theta \in O^i(SO)$ ist

$$\Theta_p : \widetilde{\Omega}^k(X; Z_p) = \widetilde{\Omega}^{k+2}(X \wedge L_p) \xrightarrow{\Theta} \widetilde{\Omega}^{k+i+2}(X \wedge L_p) = \widetilde{\Omega}^{k+i}(X; Z_p)$$

ein Element aus $O^i(SO; Z_p)$ und heißt mod p Reduktion von Θ. Die mod p Reduktionen bilden eine Unteralgebra $R^*(SO; Z_p)$ von $O^*(SO; Z_p)$.

Eine charakteristische Klasse c vom Grad i $(i \in Z)$ ordnet jedem orientierten Vektorraumbündel ξ über dem endlichen CW-Komplex B eine Cohomologieklasse $c(\xi) \in \Omega^i(B)$ zu, so daß gilt:

1) c verhält sich natürlich gegenüber Bündelabbildungen; 2) c ist stabil, d. h. $c(\xi \oplus o^1) = c(\xi)$. $C^i(SO)$ bezeichne die abelsche Gruppe der charakteristischen Klassen vom Grad i, und es sei $C^*(SO) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} C^i(SO)$. Analog definiert man den graduierten Z_p-Modul $C^*(SO; Z_p)$ der charakteristischen Klassen orientierter Vektorraumbündel mit Werten in $\Omega^*(-; Z_p)$. Beispiele dafür sind die oben erwähnten Pontrjaginschen Klassen.

Nach [1], S. 96 sind $C^*(SO)$ und $O^*(SO)$ zueinander isomorph. Ein Isomorphismus

$$\chi : C^*(SO) \to O^*(SO)$$

läßt sich wie folgt konstruieren: Ist $c \in C^*(SO)$ und $f: S^{k-n} X \to MSO(k)$ ein Repräsentant von $\beta \in \widetilde{\Omega}^n(X)$, so sei

$$\chi(c)(\beta) = (S^{k-n})^{-1} f^* \Phi_{\gamma^k}(c(\gamma^k)).$$

Im folgenden stellen wir eine Beziehung zwischen $O^*(SO; Z_p)$ und $C^*(SO; Z_p)$ her Da wir mit Koeffizienten in Z_p arbeiten, ist nicht zu erwarten, daß $O^*(SO;\, Z_p)$ und $C^*(SO;\, Z_p)$ zueinander isomorph sind. Wir konstruieren zunächst einen Homomorphismus

$$\chi_p : C^*(SO;\, Z_p) \to O^*(SO;\, Z_p).$$

$\beta \in \widetilde{\Omega}^n(X;\, Z_p)$ werde durch $f: S^{k-n-2}(X \wedge L_p) \to MSO(k)$ repräsentiert. $\chi_p(c)(\beta)$ sei dann das Bild von $c(\gamma^k)$ bei der Abbildung

$$\Omega^i(BSO(k);\, Z_p) \xrightarrow{\Phi_{\gamma^k}^{(p)}} \widetilde{\Omega}^{i+k}(MSO(k);\, Z_p) \xrightarrow{f^*} \widetilde{\Omega}^{i+k}(S^{k-n-2}(X \wedge L_p);\, Z_p) =$$
$$= \widetilde{\Omega}^{i+k+2}(X \wedge L_p \wedge S^{k-n-2} \wedge L_p) \xrightarrow{T^*} \widetilde{\Omega}^{i+k+2}(X \wedge L_p \wedge L_p \wedge S^{k-n-2}) \xrightarrow{(1 \wedge m)^*}$$
$$\xrightarrow{(1 \wedge m)^*} \widetilde{\Omega}^{i+k+2}(X \wedge L_p \wedge S^{k-n}) \xrightarrow{(S^{k-n})^{-1}} \widetilde{\Omega}^{i+n+2}(X \wedge L_p) = \widetilde{\Omega}^{i+n}(X;\, Z_p);$$

dabei ist $c \in C^i(SO;\, Z_p)$ und T die Vertauschungsabbildung

$$T: X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \wedge X_4 \to X_1 \wedge X_2 \wedge X_4 \wedge X_3.$$

Satz 2: *χ_p ist ein Monomorphismus und Bild χ_p direkter Summand von $O^*(SO;\, Z_p)$.*

Beweis: $$\bar{\chi}_p : O^*(SO;\, Z_p) \to C^*(SO;\, Z_p)$$

werde wie folgt erklärt: Ist ξ ein orientiertes Vektorraumbündel, so sei $\bar{\chi}_p(\Theta)(\xi) = (\Phi_\xi^{(p)})^{-1}\, \Theta\, \Phi_\xi^{(p)}(1)$ $(\Theta \in O^*(SO;\, Z_p))$. Unter Benutzung von Lemma 1 zeigt man sofort, daß $\bar{\chi}_p \chi_p = 1$. Hieraus ergibt sich die Behauptung.

Unser Ziel ist es zunächst, Bild χ_p zu bestimmen. $\varrho_p : \Omega^*(-) \to \Omega^*(-;\, Z_p)$ bezeichne die Reduktion mod p. Unter Verwendung der in [3], S. 104 benutzten Methoden sieht man dann, daß $\varrho_p : \widetilde{\Omega}^*(MSO) \to \widetilde{\Omega}^*(MSO;\, Z_p)$ surjektiv ist (die Ergebnisse von [3] bleiben richtig, wenn man die Voraussetzung «$h^*(E_{k,k})$ frei» durch die Forderung «$h^*(E_{k,k})$ ohne p-Torsion» ersetzt).

$$\varrho_p' : C^*(SO) \to C^*(SO;\, Z_p)$$

sei definiert durch $\varrho_p'(c)(\xi) = \varrho_p(c(\xi))$ für $c \in C^*(SO)$. Weiter hat man Isomorphismen

$$\omega : C^*(SO) \xrightarrow{\cong} \widetilde{\Omega}^*(MSO);\ \omega_p : C^*(SO;\, Z_p) \xrightarrow{\cong} \widetilde{\Omega}^*(MSO;\, Z_p).$$

LEMMA 3: *ϱ'_p ist surjektiv.*

BEWEIS: Die Behauptung folgt aus der Gleichung

$$\omega_p \varrho'_p = \varrho_p \omega,$$

da $\varrho_p : \widetilde{\Omega}^* (MSO) \to \widetilde{\Omega}^* (MSO; Z_p)$ surjektiv ist.
Damit sind wir in der Lage, Bild χ_p zu bestimmen.

SATZ 4: *$\chi_p : C^* (SO; Z_p) \to O^* (SO; Z_p)$ bildet $C^* (SO; Z_p)$ isomorph auf $R^* (SO; Z_p)$ ab.*

BEWEIS: $\varrho''_p : O^* (SO) \to O^* (SO; Z_p)$ sei der Homomorphismus, der jedem $\Theta \in O^* (SO)$ die mod p Reduktion $\Theta_p \in O^* (SO; Z_p)$ zuordnet. Wir zeigen zunächst, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} C^* (SO) \arrow[r, "\chi", "\cong"'] \arrow[d, "\varrho'_p"'] & O^* (SO) \arrow[d, "\varrho''_p"] \\ C^* (SO; Z_p) \arrow[r, "\chi_p"'] & O^* (SO; Z_p) \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. $f : S^{k-n-2} (X \wedge L_p) \to MSO (k)$ sei ein Repräsentant von $\beta \in \widetilde{\Omega}^n (X; Z_p)$. Unter Berücksichtigung von Lemma 1 erhält man dann für alle $c \in C^* (SO)$

$$\begin{aligned} \chi_p \varrho'_p (c) (\beta) &= (S^{k-n})^{-1} (1 \wedge m)^* T^* f^* \Phi^{(p)}_{\gamma^k} \varrho_p (c (\gamma^k)) = \\ &= (S^{k-n})^{-1} (1 \wedge m)^* T^* f^* \varrho_p \Phi_{\gamma^k} (c (\gamma^k)) = \\ &= (S^{k-n})^{-1} (1 \wedge m)^* T^* \varrho_p f^* \Phi_{\gamma^k} (c (\gamma^k)) = \\ &= (S^{k-n-2})^{-1} f^* \Phi_{\gamma^k} (c (\gamma^k)) = \varrho''_p \chi (c) (\beta). \end{aligned}$$

Da ϱ'_p nach Lemma 3 surjektiv ist, ergibt sich aus dem obigen Diagramm

$$\text{Bild } \chi_p = \text{Bild } (\chi_p \varrho'_p) = \text{Bild } \varrho''_p = R^* (SO; Z_p).$$

Satz 4 gestattet es nun, $O^* (SO; Z_p)$ zu berechnen. $\Lambda_p (\delta_p)$ bezeichne die von dem Bockstein-Homomorphismus $\delta_p \in O^* (SO; Z_p)$ erzeugte äußere Algebra.

SATZ 5: *Ist p eine ungerade Primzahl, so gibt es einen Isomorphismus von Z_p-Moduln*

$$O^*(SO;\ Z_p) \cong \Omega^*(*;\ Z_p)[[p_1, p_2, \ldots]] \otimes \Lambda_p(\delta_p).$$

BEWEIS: Nach [3], Theorem 3.6 gilt

$$O^*(SO;\ Z_p) \cong R^*(SO;\ Z_p) \otimes \Lambda_p(\delta_p).$$

Nun ist aber nach Satz 4

$$R^*(SO;\ Z_p) \cong C^*(SO;\ Z_p) \cong \Omega^*(BSO;\ Z_p) \cong \Omega^*(*;\ Z_p)[[p_1, p_2, \ldots]].$$

Hieraus ergibt sich die Behauptung.

LITERATUR

[1] P.S. LANDWEBER, *Cobordism operations and Hopf algebras*, Trans. A.M.S. 129, 94-110 (1967).

[2] C.R.F. MAUNDER, *Mod p cohomology theories and the Bockstein spectral sequence*, Proc. Camb. Phil. Soc. 63, 23-43 (1967).

[3] F. UCHIDA, *Stable operations in mod p cohomology theories*, Osaka J. Math. 6, 93-106 (1969).

ROLF KULTZE
Math. Seminar der
J.W. Goethe-Universität
6 Frankfurt a.M.