σ-LOKALTOPOLOGISCHE RAUME UND PROJEKTIVE TENSORPRODUKTE

von

RALF HOLLSTEIN

N. Adasch, B. Ernst [2], [18] entwickelten die Theorie der Klasse der σ-lokaltopologischen Räume, die die Klasse der von B. Ernst [3] eingeführten Ultra-DF-Räume echt enthält. Mit den Eigenschaften der σ-lokaltopologischen Räumen werden wir in der vorliegenden Arbeit die Theorie der von S. O. Iyahen [9], S. Tomášek [15], [16] und R. Hollstein [6], [7] untersuchten linearen prokjetiven Tensorprodukte fortsetzen. In der Kategorie der lokalkonvexen Räume lassen sich dann einige Sätze, die in der grundlegenden Arbeit von A. Grothendieck [5] für DF-Räume bewiesen wurde, für die allgemeinere Klasse der lokalkonvexen σ-lokaltopologischen Räume ableiten.

Herrn Prof. N. Adasch möchte ich für einige Hinweise sehr danken.

1. *σ-lokaltopologische Räume*

Aus der Arbeit von N. Adasch, B. Ernst [2] über lokaltopologische Räume übernehmen wir die folgenden Begriffe:

Sei E (nicht unbedingt separierter) topologischer Vektorraum über den Körper K der reellen oder komplexen Zahlen (wir schreiben hierfür TVR). Eine Folge (U_n) von kreisförmigen absorbierenden Mengen aus E heißt Faden, wenn für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt: $U_{n+1} + U_{n+1} \subset \subset U_n$. Ein Faden (U_n) soll topologisch bezeichnet werden, wenn jedes U_n Nullumgebung in E ist. Ein Faden (U_n) aus E wird lokaltopologisch genannt, wenn für jede beschränkte kreisförmige Menge C aus E und für jedes $n \in \mathbf{N}$, $U_n \cap C$ Nullumgebung in C in der induzierten Topologie ist.

Ein TVR E heißt lokaltopologisch, wenn jeder lokaltopologischer Faden in E topologisch ist.

Eine Menge M von linearen Abbildungen von einem TVR E in einen TVR F heißt lokalgleichstetig, wenn es zu jeder beschränkten Teilmenge C aus E und zu jeder Nullumgebung V aus F eine Nullumgebung U aus E gibt mit $M(U \cap C) \subset V$. Ein TVR E ist genau dann lokaltopologisch, wenn jede lokalgleichstetige Menge von linearen Abbildungen von E in einen beliebigen TVR F gleichstetig ist.

Eine Folge (C_n) von Mengen aus einem TVR E wird Fundamentalfolge von beschränkten Mengen genannt, wenn jedes C_n beschränkt ist und wenn zu jeder beschränkten Menge C aus E ein C_n existiert mit $C \subset C_n$. Ein lokaltopologischer Raum E, der eine Fundamentalfolge von beschränkten Mengen (C_n) besitzt, heißt σ-lokaltopologisch. Wir können annehmen, daß jedes C_n kreisförmig ist und $C_n + C_n \subset \subset C_{n+1}$ für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt.

Lemma: Für eine Folge (U_j) von Nullumgebungen aus einem σ-lokaltopologischen Raum E mit der Fundamentalfolge von beschränkten Mengen (C_n) ist die Menge $W_0 = \bigcap_{j=1}^{\infty} (U_j + C_j)$ Nullumgebung in E.

Beweis: Es sei $C_n = \{0\}$ gesetzt für ganze Zahlen $n < 1$. Zu jedem $j \in \mathbf{N}$ sei ein topologischer Faden $(U_j^{(n)})_n$ mit $U_j \supset U_j^{(1)} + U_j^{(1)}$ gewählt. Nach N. Adasch, B. Ernst [2], Satz 3.1 und 3.2(b) ist dann die Folge (W_n) mit $W_n = \bigcap_{j=1}^{\infty} (U_j^{(n)} + C_{j-n})$ lokaltopologischer Faden in E. Damit ist W_0 Nullumgebung in E.

Später benötigen wir den folgenden Satz:

Satz 1.1: Für einen σ-lokaltopologischen Raum E gilt:

(i) Zu jeder Folge (U_j) von Nullumgebungen aus E gibt es eine Nullumgebung, die von allen U_j absorbiert wird.

(ii) Jede gleichstetige Menge M von linearen Abbildungen von E in einen metrisierbaren Vektorraum G ist gleichmäßig beschränkt, d.h. es existiert eine Nullumgebung U in E, so daß $M(U)$ beschränkt in G ist.

Beweis: (i) Es kann vorausgesetzt werden, daß (U_j) topologischer Faden ist. Sei (C_n) Fundamentalfolge von beschränkten Mengen in E. Dann ist nach dem Lemma

$$W = \bigcap_{j=1}^{\infty} (U_j + C_j)$$

Nullumgebung in E. Zu jedem $j \in \mathbf{N}$ gibt es ein $\varrho_j \geqslant 1$ mit

$$W \subset U_{j+1} + C_{j+1} \subset U_{j+1} + \varrho_j U_{j+1} \subset \varrho_j U_j$$

W ist damit die gesuchte Nullumgebung, die von allen U_j absorbiert wird.

(ii) Nach B. Ernst [3], Satz 2.7, sind die Aussagen (i) und (ii) äquivalent.

2. *Bilineare Abbildungen in σ-lokaltopologischen Räumen*

Seien E, F und G TVRe mit Nullumgebungsbasen $\mathcal{U}(E)$, $\mathcal{V}(F)$ und $\mathcal{W}(G)$. Mit $\mathfrak{B}(E \times F, G)$ ($B(E \times F, G)$) soll der Vektorraum aller (stetigen) bilinearen Abbildungen von $E \times F$ in G bezeichnet werden. $B(E \times F)$ sei der Vektorraum der stetigen Bilinearformen auf $E \times F$.

Sind X und Y beliebige TVRe, so werde mit $\mathfrak{L}(X, Y)$ der Vektorraum der linearen Abbildungen von X in Y und mit $L(X, Y)$ der Teilraum aller stetigen linearen Abbildungen bezeichnet.

Für $x \in E$ und $y \in F$ seien $b_x : y \to b(x, y)$ und $b_y : x \to b(x, y)$ die partiellen Abbildungen zu $b \in \mathfrak{B}(E \times F, G)$.

Eine Teilmenge B aus $\mathfrak{B}(E \times F, G)$ heißt hypogleichstetig, wenn für alle beschränkten Teilmengen C und D aus E bzw. F die Mengen

$$B_C = \{b_x : b \in B,\ x \in C\} \ u. \qquad B_D = \{b_y : b \in B,\ y \in D\}$$

aus $\mathfrak{L}(F, G)$ bzw. $\mathfrak{L}(E, G)$ gleichstetig sind. Eine bilineare Abbildung b heißt hypostetig, wenn die Mengen b_C und b_D gleichstetig sind.

Nach A. Grothendieck [4] ist eine hypogleichstetige Menge gleichstetig, wenn E und F DF-Räume und G lokalkonvexer Raum ist. Da die Klasse der lokalkonvexen σ-lokaltopologischen Räume die Klasse der DF-Räume echt enthält (vgl. [2], [3]), so stellt der folgende Satz eine Verallgemeinerung da:

Satz 2.1: Seien E und F σ-lokaltopologische Räume und G beliebiger TVR. Dann ist jede hypogleichstetige Menge B von bilinearen Abbildungen von $E \times F$ in G gleichstetig.

Beweis: Sei $W \in \mathcal{W}(G)$. Sei dann (W_i) topologischer Faden in G mit $W_1 + W_1 \subset W$. (C_i) und (D_i) seien Fundamentalfolgen von kreisförmigen beschränkten Mengen in E bzw. F. Wegen der Hypogleichstetigkeit von B existieren zu jedem $i \in \mathbf{N}$ Nullumgebungen U_i und V_i aus E bzw. F mit

$$B(U_i, D_i) \subset W_{i+1} \quad \text{und} \quad B(C_i, V_i) \subset W_{i+1}$$

Es gilt dann für jedes $i \in \mathbf{N}$

$$B(U_i + C_i, D_i \cap V_i) \subset W_i \quad \text{bzw.} \quad B\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} (U_j + C_j), D_i \cap V_i\right) \subset W_i$$

Die Menge $U = \bigcap_{j=1}^{\infty} (U_j + C_j)$ ist Nullumgebung in E, da E σ-lokaltopologisch ist.

Sei $G(\mathcal{T})$ der Vektorraum G, versehen mit der Topologie $\mathcal{T}$, die durch den Faden (W_i) erzeugt wird. Wegen

$$B_U(D_i \cap V_i) \subset W_i \quad \text{für alle} \quad i \in \mathbf{N}$$

ist die Menge $B_U \subset L(F, G(\mathcal{T}))$ lokalgleichstetig. B_U ist damit gleichstetig, da F σ-lokaltopologisch ist. Es gibt daher zu der $\mathcal{T}$-Nullumgebung W ein $V \in \mathcal{V}(F)$ mit

$$B(U, V) = B_U(V) \subset W$$

Damit ist die Gleichstetigkeit von B gezeigt.

Ein System γ von Mengen aus einem Vektorraum X heißt gesättigt, wenn gilt: (i) $\bigcup_{S \in \gamma} S = X$, (ii) mit $S \in \gamma$ ist auch $\lambda S \in \gamma$ für alle $\lambda \in \mathbf{K}$ und (iii) zu $S_1, S_2 \in \gamma$ gibt es ein $S_3 \in \gamma$ mit $S_1 \cup S_2 \subset S_3$.

Sind σ und τ gesättigte Systeme von beschränkten Mengen aus E und F, dann bilden die Mengen

$$[C \times D, W] = \{b \in B(E \times F, G) : b(C, D) \subset W\}$$

für alle $C \in \sigma$, $D \in \tau$ und $W \in \mathcal{W}(G)$ eine Nullumgebungsbasis für die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den Mengen $C \times D$. $B(E \times F, G)$, versehen mit dieser Topologie, werde mit $B_{\sigma \times \tau}(E \times F, G)$ bezeichnet. $B_{\sigma \times \tau}(E \times F, G)$ ist separiert, wenn G separiert ist. Sind σ und τ die Systeme aller beschränkten Mengen aus E und F, so schreiben wir $B_\beta(E \times F, G)$.

Für beliebige TVRe X und Y sei $L_b(X, Y)$ der Vektorraum $L(X, Y)$, versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen beschränkten Mengen von X. Ist γ ein gesättigtes System von beschränkten aus X, so besitzt nach N. Adasch [1] die vollständige Hülle von $L_\gamma(X, Y)$ die Darstellung $\bigcap_{S \in \gamma} \bigcap_{Z \in \mathcal{Z}} (L(X, Y) + [S, Z]_{\mathcal{L}})$, wobei $\mathcal{Z}$ die Nullumgebungsbasis in Y ist und unter $[S, Z]_{\mathcal{L}}$ die Menge $\{u \in \mathcal{L}(X, Y) : u(S) \subset Z\}$ zu verstehen ist.

Mit der gleichen Beweismethode läßt sich entsprechend der folgende Satz beweisen:

Satz 2.2: Die vollständige Hülle von $B_{\sigma \times \tau}(E \times F, G)$ besitzt die Darstellung

$$\bigcap_{C \in \sigma} \bigcap_{D \in \tau} \bigcap_{W \in \mathcal{W}(G)} (B(E \times F, G) + [C \times D, W]_{\mathrm{B}})$$

mit $[C \times D, W]_{\mathrm{B}} = \{b \in \mathrm{B}(E \times F, G) : b(C, D) \subset W\}$.

Hieraus kann folgender Satz abgeleitet werden:

Satz 2.3: Seien E und F σ-lokaltopologische Räume und sei G vollständiger TVR. Dann ist $B_\beta(E \times F, G)$ vollständig.

Beweis: Sei b Element der vollständigen Hülle von $B_\beta(E \times F, G)$. Es ist zu zeigen, daß b hypostetig ist. Sei D beschränkte Menge aus F. Zu jeder beschränkten Menge C aus E und zu jedem $W \in \mathcal{W}(G)$ gibt es nach Satz 2.2 ein $b_1 \in B(E \times F, G)$ und ein $b_2 \in [C \times D, W]_{\mathrm{B}}$ mit $b = b_1 + b_2$. Es existiert dann ein $U \in \mathcal{U}(E)$ mit $b_1(U, D) \subset W$. Also gilt

$$b_D(U \cap C) = (b_1)_D(U \cap C) + (b_2)_D(U \cap C) \subset W + W$$

Die Menge b_D aus $\mathcal{L}(E, G)$ ist somit lokalgleichstetig. Daraus folgt die Gleichstetigkeit von b_D, da E lokaltopologisch ist. Analog zeigt man, daß für jede beschränkte Menge $C \subset E$ die Menge $b_C \subset \mathcal{L}(F, G)$ gleichstetig ist. b ist damit hypostetig, also stetig nach Satz 2.1.

Satz 2.4: Sind E und F σ-lokaltopologische Räume und ist G TVR, so ist für jede Nullfolge (b_n) aus $B_\beta(E \times F, G)$ die Menge $\{b_n\}$ gleichstetig.

BEWEIS: Nach Satz 2.1 genügt es zu zeigen, daß $\{b_n\}$ hypogleichstetig ist. Sei dazu D beschränkte Menge in F. Da (b_n) Nullfolge ist, existiert zu jedem $W \in \mathcal{W}(G)$ und zu jeder beschränkten Menge C aus E ein $k \in \mathbf{N}$ und ein $U \in \mathcal{U}(E)$ mit

$$b_n(C, D) \subset W \quad \text{für} \quad n \geqslant k \quad \text{und} \quad b_n(U, D) \subset W \quad \text{für} \quad n < k$$

Hieraus folgt die Beziehung $\{b_n\}(U \cap C, D) \subset W$ bzw. $\{b_n\}_D(U \cap C) \subset W$. Demnach ist die Menge $\{b_n\}_D \subset L(E, G)$ lokalgleichstetig und damit gleichstetig. Entsprechend beweist man, daß für jede beschränkte Menge C aus E die Menge $\{b_n\}_C$ gleichstetig ist.

3. *Das Problem der Topologien*

Sind E und F TVRe und versieht man das algebraische Tensorprodukt $E \otimes F$ mit der feinsten Vektorraumtopologie p, für die die kanonische Abbildung $\varphi\colon E \times F \to E \otimes F$ stetig ist, so bildet das System aller Mengen $\sum_{i=1}^{\infty}{}' U_i \otimes V_i$ für alle topologischen Fäden (U_i) und (V_i) aus E bzw. F eine p-Nullumgebungsbasis, wobei unter der Menge $\sum_{i=1}^{\infty}{}' U_i \otimes V_i$ die Menge $\bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} U_i \otimes V_i$ zu verstehen ist (vgl. S. O. Iyahen [9], S. Tomášek [15]). $E \otimes_p F$ ist der Vektorraum $E \otimes F$ mit der Tensorprodukttopologie p und heißt lineares projektives Tensorprodukt.

Das Problem, ob für separierte RTVe E und F. $E \otimes_p F$ separiert ist, scheint bisher noch ungelöst zu sein. Nach L. Waelbroek [17] besitzt ein TVR E die Tensorprodukt-Eigenschaft, wenn für jeden TVR F auf $E \otimes F$ eine separierte Vektorraumtopologie existiert, für die die kanonische Abbildung $\varphi\colon E \times F \to E \otimes F$ stetig ist. Offenbar ist $E \otimes_p F$ separiert, wenn E die Tensorprodukt-Eigenschaft besitzt und F separiert ist. Es ist leicht zu zeigen, daß ein TVR E mit einem stetigen Dualraum E', der alle Punkte in E trennt, die Tensorprodukt-Eigenschaft besitzt. Jeder TVR E, der die Tensorprodukt-Eigenschaft besitzt, ist separiert, da aus der Separiertheit von $E \otimes_p F$ die Separiertheit von E und F folgt, wie man durch folgenden Widerspruchsbeweis leicht zeigt: Angenommen, E ist nicht separiert. Dann gibt es ein $x \neq 0$ in E, so daß x in jeder Nullumgebung von E liegt. Sei $y \in F$ von o verschieden. Zu jeder Nullumgebung $W = \sum_{i=1}^{\infty}{}' U_i \otimes V_i$ in $E \otimes_p F$ existiert ein $\lambda > 0$ mit $y \in \lambda V_1$, so daß gilt

$$x \otimes y = 1/\lambda x \otimes \lambda y \in U_1 \otimes V_1 \subset W$$

Dies ist aber ein Widerspruch zur Separiertheit von $E \otimes_p F$.

Sind E und F TVRe, so induziert für jeden TVR G der kanonische Isomorphismus $i: u \to \tilde{u}$ von $\mathcal{B}(E \times F, G)$ auf $\mathcal{L}(E \times F, G)$, definiert durch $\sum_{i=1}^{n} u(x_i, y_i) = \tilde{u}(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i)$, einen algebraischen Isomorphismus zwischen $B(E \times F, G)$ und $L(E \otimes_p F, G)$ (vgl. [9], [15]). Gleichstetige Mengen aus $B(E \times F, G)$ entsprechen dabei gleichstetige Mengen aus $L(E \otimes_p F, G)$ und umgekehrt.

Satz 3.1: Sind E und F σ-lokaltopologische Räume und ist G beliebiger TVR, so ist $L_b(E \otimes_p F, G)$ isomorph $B_\beta(E \times F, G)$.

Beweis: Es ist zunächst zu zeigen, daß der kanonische Isomorphismus i: $B_\beta(E \times F, G) \to L_b(E \times F, G)$ stetig ist. Sei $[M, W] = \{u \in L(E \otimes_p F, G) : u(M) \subset W\}$ Nullumgebung in $L_b(E \otimes_p F, G)$, wobei $W \in \mathcal{W}(G)$ und M beschränkte Menge in $E \otimes_p F$ ist. Sei (W_i) topologischer Faden in G mit $W_1 + W_1 \subset W$. k sei die kanonische Abbildung von G auf den Quotientenraun G/N von G nach dem Vektorraum $N = \bigcap_{i=1}^{\infty} W_i$. Auf G/N wird dann durch den Faden $(k(W_i))$ eine metrisierbare Topologie erklärt. Wir zeigen, daß der kanonische Isomorphismus $\hat{i}$: $B_\beta(E \times F, G/N) \to L_b(E \otimes_p F, G/N)$ stetig ist. Da E und F Fundamentalfolgen von beschränkten Mengen besitzen und G/N metrisierbarer TVR ist, so ist $B_\beta(E \times F, G/N)$ metrisierbar. Zum Beweis der Stetigkeit von $\hat{i}$ genügt es daher zu zeigen, daß das Bild jeder Nullfolge aus $B_\beta(E \times F, G/N)$ beschränkt in $L_b(E \otimes_p F, G/N)$ ist.

Sei also (u_n) Nullfolge in $B_\beta(E \times F, G/N)$. Nach Satz 2.4 ist die Menge $\{u_n\}$ gleichstetig. Damit ist ebenfalls die Menge $\{i(u_n)\}$ aus $L(E \otimes_p F, G/N)$ gleichstetig, also beschränkt in $L_b(E \otimes_p F, G/N)$. $\hat{i}$ ist demnach stetig. Es existiert daher zu der Nullumgebung $[M, k(W_1)]$ aus $L_b(E \otimes_p F, G/N)$ eine Nullumgebung $[C \times D, k(W_n)]$, $C \times D$ beschränkt in $E \times F$, aus $B_\beta(E \times F, G/N)$ mit

$$\hat{i}([C \times D, k(W_n)]) \subset [M, k(W_1)]$$

Für die Nullumgebung $[C \times D, W_n]$ in $B_\beta(E \times F, G)$ gilt die gewünschte Inklusion

$$i([C \times D, W_n]) \subset [M, W]$$

Denn für ein $\tilde{u} \in i([C \times D, W_n])$ ist $\tilde{u}(C \otimes D) \subset W_n$ und damit $k\tilde{u}(C \otimes D) \subset k(W_n)$. Daher gilt $k\tilde{u}(M) \subset k(W_1)$, also

$$\tilde{u}(M) \subset k^{-1} k\tilde{u}(M) \subset k^{-1} k(W_1) \subset W_1 + N \subset W$$

Damit ist die Stetigkeit von i gezeigt.

Die Umkehrabbildung $i^{-1}: L_b(E \otimes_p F, G) \to B_\beta(E \times F, G)$ ist ebenfalls stetig, da für jede beschränkte Menge C und D aus E bzw. F die Menge $C \otimes D$ beschränkt in $E \otimes_p F$ ist.

Erklärt man auf $B(E \times F, G)$ und $L(E \otimes_p F, G)$ die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den endlichen Teilmengen von $E \times F$ bzw. $E \otimes_p F$, so sind diese TVRe isomorph, wie man durch Vergleich der Nullumgebungen leicht zeigt.

Nach N. Adasch, B. Ernst [18] ist ein TVR X genau dann σ-lokaltopologisch, wenn für jeden vollständigen metrisierbaren TVR Y $L_b(X, Y)$ metrisierbar und vollständig ist. Nach Satz 2.3 und 3.1 folgt somit

SATZ 3.2: Für σ-lokaltopologische Räume E und F ist das lineare projektive Tensorprodukt $E \otimes_p F$ ebenfalls σ-lokaltopologisch.

Nach R. Hollstein [7] ist für Ultra-DF-Räume E und F $E \otimes_p F$ ultrabornologisch [ultratonneliert, abzählbar ultratonneliert, quasiultratonneliert, abzählbar quasiultratonneliert], sofern E und F von dieser Art sind (Die Theorie dieser TVRe findet sich bei B. Ernst [3], S. O. Iyahen [8], [9] und W. Robertson [13]). Dieser Satz bleibt richtig, wenn E und F σ-lokaltopologisch sind, da die Klasse der ultrabornologischen [(abzählbar-) ultratonnelierten, (abzählbar-) quasiultratonnelierten] σ-lokaltopologischen Räume in der Klasse der Ultra-DF-Räume enthalten ist.

In der Kategorie der lokalkonvexen Räume existieren zu jeder beschränkten Menge M aus dem lokalkonvexen projektiven Tensorprodukt $E \otimes_\pi F$ lokalkonvexer Räume E und F beschränkte Mengen $C \subset E$ und $D \subset F$, so daß M in der abgeschlossenen absolutkonvexen Hülle $\overline{\Gamma C \otimes D}$ liegt, sofern E und F DF-Räume sind. Dieser Satz ist auch richtig, wenn E und F Frechét-Räume sind, wobei einer nuklear ist (vgl. A. Grothendieck [5], «Problème des Topologies»). Im folgenden werden wir untersuchen, wann es zu jeder beschränkten Menge M aus dem linearen projektiven Tensorprodukt $E \otimes_p F$ von TVRen E und F beschränkte Mengen $C_1, \ldots, C_n$ und $D_1, \ldots, D_n$ aus E bzw. F gibt mit $M \subset \overline{\sum_{i=1}^{n} C_i \otimes D_i}$.

Eine Folge (L_n) von kreisförmigen Teilmengen aus einem TVR X heißt absorbierend, wenn $\bigcup_{n=1}^{\infty} L_n = X$ und $L_n + L_n \subset L_{n+1}$ für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt. Nach N. Adasch, B. Ernst [2] ist jede absorbierende Folge $\sigma = (L_n)$ von abgeschlossenen Mengen L_n Fundamentalfolge von beschränkten Mengen in der Topologie $\mathcal{T}_\sigma$, wobei $\mathcal{T}_\sigma$ die feinste Vektorraumtopologie in X ist, für die die Einbettungen von L_n in X im Nullpunkt stetig sind. Ist X mit der Topologie $\mathcal{T}$ separiert und abzählbar ultratonneliert, so gilt $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\sigma$. Es folgt nun

Satz 3.3: Seien E und F TVRe mit absorbierenden Folgen (C_n) und (D_n) und sei $E \otimes_p F$ separiert und abzählbar ultratonneliert. Dann bildet $(\overline{\sum_{k=1}^{n} C_k \otimes D_k})_n$ eine Fundamentalfolge von beschränkten Mengen in $E \otimes_p F$.

Beweis: Es genügt nach obiger Bemerkung zu zeigen, daß die Folge (M_n) mit $M_n = \overline{\sum_{i=1}^{2^n} C_i \otimes D_i}$ absorbierende Folge in $E \otimes_p F$ ist.

Es gilt zunächst die Beziehung

$$M_n + M_n \subset \overline{\sum_{i=1}^{2^n} C_i \otimes D_i + \sum_{i=1}^{2^n} C_i \otimes D_i} \subset \overline{\sum_{i=1}^{2^n} C_i \otimes D_i + \sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} C_i \otimes D_i} = M_{n+1}$$

Wegen der Kreisförmigkeit der C_k und D_k ist jedes M_n kreisförmig. Weiterhin ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = E \otimes F$. Denn zu jedem $z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in E \otimes F$ gibt es ein $m \in \mathbf{N}$ mit $x_i \in C_m$ und $y_i \in D_m$ für $i = 1, \ldots, n$, so daß gilt $z \in \sum_{i=1}^{n \cdot m} C_i \otimes D_i \subset M_{n+m}$. (M_n) ist damit absorbierende Folge.

Unter den Voraussetzungen von Satz 3.3 bilden dann die in der vollständigen Hülle $E \tilde{\otimes}_p F$ (von $E \otimes_p F$) abgeschlossenen Hüllen

$\overline{\sum_{k=1}^{n} C_k \otimes D_k}$ eine Fundamentalfolge von beschränkten Mengen in $E \tilde{\otimes}_p F$ (vgl. [2]).

Die vollständige Hülle eines separierten σ-lokaltopologischen Raumes ist nach N. Adasch, B. Ernst [2] wieder σ-lokaltopologisch. Somit ist nach Satz 3.2 $E \tilde{\otimes}_p F$ σ-lokaltopologisch, sofern E und F separiert und σ-lokaltopologisch sind und E oder F die Tensorprodukt-Eigenschaft besitzt.

Sind E und F abzählbar ultratonnelierte σ-lokaltopologische Räume mit den Fundamentalfolgen von beschränkten Mengen (C_k) und (D_k) und besitzt E oder F die Tensorprodukt-Eigenschaft, so sind die Voraussetzungen von Satz 3.3 erfüllt, und es bildet $(\overline{\sum_{k=1}^{n} C_k \otimes D_k})_n$ eine Fundamentalfolge von beschränkten Mengen in $E \otimes_p F$. Es besteht die Vermutung, daß bereits für σ-lokaltopologische Räume E und F das lineare projektive Tensorprodukt $E \otimes_p F$, das nach Satz 3.2 σ-lokaltopologisch ist, eine Fundamentalfolge von beschränkten Mengen in der Darstellung von Satz 3.3 besitzt.

4. *Lineare induktive Limiten und topologische Produkte von linearen projektiven Tensorprodukten*

Sei $E = \sum_{k=1}^{\infty} v_k (E_k)$ der lineare induktive Limes (im Sinne von S.O. Iyahen [8], J. Köhn [11]) von abzählbar vielen TVRen E_k unter den linearen Abbildungen $v_k : E_k \to E$. Die Mengen $W = \sum_{k=1}^{\infty}{}' v_k (U_k)$ bilden dann eine Nullumgebungsbasis in E, wobei die U_k die Nullumgebungsbasis in E_k durchlaufen. Ist F TVR, so sei $\sum_k v_k \otimes i (E_k \otimes_p F)$ der lineare induktive Limes der linearen projektiven Tensorprodukte $E_k \otimes_p F$ unter den linearen Abbildungen $v_k \otimes i : E_k \otimes F \to E \otimes F$, wobei i die identische Abbildung auf F ist. Für die algebraisch isomorphen Vektorräume $(\sum_k v_k (E_k)) \otimes F$ und $\sum_k v_k \otimes i (E_k \otimes F)$ gilt dann der folgende Satz:

Satz 4.1: Seien $E = \sum_k v_k (E_k)$ und F σ-lokaltopologischer Raum. Dann ist $(\sum_k v_k (E_k)) \otimes_p F$ isomorph $\sum_k v_k \otimes i (E_k \otimes_p F)$.

BEWEIS: Sei $W = \sum_k' v_k \otimes i\,(\sum_n' U_n^k \otimes V_n^k) = \sum_n' \sum_k' v_k\,(U_n^k) \otimes V_n^k$ Nullumgebung in $\sum_k v_k \otimes i\,(E_k \otimes_p F)$, wobei für jedes $k \in \mathbf{N}$ $(U_n^k)_n$ und $(V_n^k)_n$ topologischer Faden in E_k bzw. F ist. Nach Satz 1.1 existieren zu jedem $n \in \mathbf{N}$ eine Nullumgebung V_n aus F und Zahlen $c_n^k > 0$ mit $c_n^k V_n \subset V_n^k$ für alle $k \in \mathbf{N}$. Damit enthält W die Nullumgebung $\sum_n (\sum_k' v_k\,(c_n^k U_n^k)) \otimes V_n$ aus $E \otimes_p F$. Umgekehrt ist die Topologie in $\sum_k v_k \otimes i\,(E_k \otimes_p F)$ feiner als die Topologie in $E \otimes_p F$ da die lineare Abbildung $v_k \otimes i : E_k \otimes_p F \to E \otimes_p F$ für jedes k stetig ist.

Sei $E = \bigoplus_{i=1}^{\infty} E_i$ direkte Summe von TVRen E_i und sei F σ-lokaltopologischer Raum. Erklärt man auf $\bigoplus_{i=1}^{\infty} E_i$ und $\bigoplus_{i=1}^{\infty} (E_i \otimes_p F)$ die lineare induktive Limestopologie, so sind die algebraisch isomorphen Vektorräume $(\bigoplus_{i=1}^{\infty} E_i) \otimes_p F$ und $\bigoplus_{i=1}^{\infty} (E_i \otimes_p F)$ nach Satz 4.1 isomorph.

Für den nächsten Satz benötigen wir

LEMMA: Seien E und F TVRe und sei H dichter Teilraum von E. Dann ist $H \otimes F$ dicht in $E \otimes_p F$.

BEWEIS: Sei $z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in E \otimes F$ und sei $\sum_{i=1}^{\infty}{}' U_i \otimes V_i$ Nullumgebung in $E \otimes_p F$. Es existieren dann Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \neq 0$ und $x'_1, \ldots, x'_n \in H$ mit $\lambda_i y_i \in V_i$ und $x'_i - \frac{1}{\lambda_i} x_i \in U_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Damit ist $\sum_{i=1}^{n} x'_i \otimes \lambda_i y_i - z \in \sum_i^{\infty}{}' U_i \otimes V_i$.

Für topologische Produkte linearer projektiver Tensorprodukte gilt der nun folgende Satz

SATZ 4.2: Ist $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$ eine Familie von separierten TVRen und ist F TVR mit der Tensorprodukt-Eigenschaft, so sind $\prod_{\alpha \in I} (E_\alpha \tilde{\otimes}_p F)$ und $(\prod_{\alpha \in I} E_\alpha) \tilde{\otimes}_p F$ isomorph.

BEWEIS: Die direkte Summe $\bigoplus_{\alpha \in I} E_\alpha$ bzw. $\bigoplus_{\alpha \in I} (E_\alpha \otimes F)$ ist dicht in dem topologischen Produktraum $\prod_{\alpha \in I} E_\alpha$ bzw. $\prod_{\alpha \in I} (E_\alpha \tilde{\otimes}_p F)$. Nach obigem Lemma ist dann auch $(\bigoplus\limits_{\alpha\in I} E_\alpha)\otimes F$ dicht in $(\prod\limits_{\alpha\in I} E_\alpha)\otimes_p F$ bzw. $(\prod\limits_{\alpha\in I} E_\alpha)\tilde{\otimes}_p F$. Die algebraisch isomorphen Vektorräume $(\bigoplus\limits_{\alpha\in I} E_\alpha)\otimes F$ und $\bigoplus\limits_{\alpha\in I}(E_\alpha\otimes F)$, versehen mit der von $(\prod\limits_{\alpha\in I} E_\alpha)\tilde{\otimes}_p F$ bzw. $\prod\limits_{\alpha\in I}(E_\alpha\tilde{\otimes}_p F)$ induzierten Topologie, sind isomorph, wie man durch Vergleich der Nullumgebungen leicht nachweisen kann. Damit ist die Behauptung gezeigt.

Wir werden nun zeigen, daß i.a. das Mengensystem $\left\{\overline{\sum\limits_{k=1}^{n} C_k\otimes D_k}:\right.$ $\left.C_k,\ D_k \text{ beschränkt in } E,\ F\right\}$ kein Fundamentalsystem von beschränkten Mengen in $E\otimes_p F$ bildet. Seien $E=\prod\limits_{l=1}^{\infty} K_l$ und $F=\bigoplus\limits_{m=1}^{\infty} K_m$ abzählbares topologisches Produkt bzw. abzählbare direkte Summe der Räume $K_n = K$. Nach Satz 4.1 und 4.2 sind dann die folgenden Räume isomorph:

$$(\prod_l K_l)\tilde{\otimes}_p(\bigoplus_m K_m)\cong\prod_l(K_l\tilde{\otimes}_p(\bigoplus_m K_m))\cong$$

$$\cong\prod_l\overline{\bigoplus_m(K_l\otimes_p K_m)}\cong\prod_l\bigoplus_m K_{lm},\ K_{lm}=K$$

Jedem Element $(x_l)\otimes(y_m)$ mit $(x_l)\in\prod\limits_l K_l$ und $(y_m)\in\bigoplus\limits_m K_m$ wird dann die Doppelfolge $(x_l y_m)_{lm}$ aus $\prod\limits_l\bigoplus\limits_m K_{lm}$ zugeordnet.

Für beschränkte Mengen $C_i\subset E$ und $D_i\subset F$, $i=1,\dots,n$, entspricht der Menge $\overline{\sum\limits_{i=1}^{n} C_i\otimes D_i}$ aus $E\otimes_p F$ einer Menge von Doppelfolgen $(z_{lm})_{lm}$ aus $\prod\limits_l\bigoplus\limits_m K_{lm}$ mit $|z_{lm}|\leqslant\alpha_{lm}$ und $z_{lm}=0$ für alle m, die größer sind als ein festes m_0. Jedoch ist auch die Menge $\{(z_{lm}):|z_{lm}|\leqslant 1,\ z_{lm}=0 \text{ für } m\geqslant l\}$ beschränkt in $\prod\limits_l\bigoplus\limits_m K_{lm}$.

5. *Lokalkonvexe projektive Tensorprodukte lokalkonvexer σ-lokaltopologischer Raume.*

Für lokalkonvexe Räume E und F sei π die lokalkonvexe projektive Tensorprodukttopologie (in Sinne von A. Grothendieck [5]). Die Vektorräume $L(E\otimes_\pi F,G)$ und $B(E\times F,G)$ sind dann für jeden lokalkonvexen TVR G algebraisch isomorph. Jeder gleichstetigen

Menge aus $B(E \times F, G)$ wird dann eine gleichstetige Menge aus $L(E \otimes_\pi F, G)$ zugeordnet. Setzt man $G = \mathbf{K}$, so gilt der von A. Grothendieck [5] für DF-Räume bewiesene Satz:

SATZ 5.1: Für lokalkonvexe σ-lokaltopologische Räume E und F ist der starke Dualraum $(E \otimes_\pi F)_b'$ isomorph $B_\beta(E \times F)$.

BEWEIS: Der kanonische Isomorphismus $i: B_\beta(E \times F) \to (E \otimes_\pi F)_b'$ ist stetig, da für jede Nullfolge (u_n) aus dem metrisierbaren TVR $B_\beta(E \times F)$ die Menge $\{u_n\}$ nach Satz 2.1 gleichstetig ist und $\{i(u_n)\}$ als gleichstetige Menge beschränkt in $(E \otimes_\pi F)_b'$ ist. i^{-1} ist stetig, da für beschränkte Mengen $C \subset E$ und $D \subset F$ die Menge $C \otimes D$ beschränkt in $E \otimes_\pi F$ ist.

Aus Satz 5.1 und dem Bipolarensatz folgt, daß für separierte lokalkonvexe σ-lokaltopologische Räume E und F es zu jeder beschränkten Menge $M \subset E \otimes_\pi F$ beschränkte Mengen $C \subset E$ und $D \subset F$ gibt mit $M \subset \overline{\Gamma(C \otimes D)}$. Damit läßt sich zeigen, daß für jeden lokalkonvexen Raum G die TVRe $L_b(E \otimes_p F, G)$ und $B_\beta(E \times F, G)$ isomorph sind. Nach Satz 3.1 sind damit $L_b(E \otimes_\pi F, G)$ und $L_b(E \otimes_p F, G)$ isomorph.

Ist $E = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(E_k)$ lokalkonvexe Hülle von lokalkonvexen Räumen E_k unter den linearen Abbildungen $v_k: E_k \to E$ (vgl. G. Köthe [12]), so gilt der folgende Satz:

SATZ 5.2: Für einen lokalkonvexen σ-lokaltoplogischen Raum F ist $(\sum_{k=1}^{\infty} v_k(E_k)) \otimes_\pi F$ isomorph der lokalkonvexen Hülle $\sum_{k=1}^{\infty} v_k \otimes i(E_k \otimes_\pi F)$.

Wie im Beweis von Satz 4.1 zeigt man den Isomorphismus durch Vergleich der Nullumgebungen.

BEMERKUNG: Sind E und F lokalpseudokonvexe (p-konvexe) Räume (vgl. S.O. Iyahen [10], S. Rolewicz [14]), so existiert auf $E \otimes F$ die feinste lokalpseudokonvexe (p-konvexe) Topologie, für die die kanonische Abbildung $\varphi: E \times F \to E \otimes F$ stetig ist. Die Ergebnisse aus Kapitel 2,3 und 4 lassen sich dann auf diese projektiven Tensorprodukte übertragen.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] N. ADASCH: *Über die Vollständigkeit von $L_\sigma(E, F)$*, Math. Ann. 191, 290-292 (1971).

[2] N. ADASCH, B. ERNST: *Lokaltopologische Vektorräume I*, Collectanea Math. XXV - 3º, 255-273 (1974).

[3] B. ERNST: *Ultra-DF-Räume*, J. reine angew. Math. 258, 87-102 (1973).

[4] A. GROTHENDIECK: *Sur les espaces (F) et (DF)*, Summa Bras. Math. 3 (1954), 57-123.

[5] A. GROTHENDIECK: *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. 16 (1955).

[6] R. HOLLSTEIN: *Über die Metrisierbarkeit von projektiven Tensorprodukten*, manuscripta math. 9, 201-209 (1973).

[7] R. HOLLSTEIN: *Topologische Tensorprodukte gewisser topologischer Vektorräume*, Collectanae Math. XXV, 2º, 127-135 (1974).

[8] S. O. IYAHEN: *On certain classes of linear topological spaces I*, Proc. London Math. Soc. (3) 18, 285-307 (1968).

[9] S. O. IYAHEN: *On certain classes of linear topological spaces II*, Journal London Math. Soc. (2) 3 (1971), 609-617.

[10] S. O. IYAHEN: Semi-convex-spaces, Glasgow Math. J. 9 (1968), 111-118.

[11] J. KÖHN: *Induktive Limiten nicht lokalkonvexer topologischer Vektorräume*, Math. Ann. 181, 269-278 (1968).

[12] G. KÖTHE: *Topologische lineare Räume I*, 2. Auflage, Berlin-Heidelberg-New York, Springer 1966.

[13] W. ROBERTSON: *completions of topological spaces*, Proc. London Math. Soc. 8 (1958), 242-257.

[14] S. ROLEWICZ: *Metric linear spaces, Monografie Matematycze*, PWN Warsawa (1972).

[15] S. TOMASEK: *Some remarks on tensorproducts*, Comm. Math. Univ. Carolinae 6, 85-96 (1965).

[16] S. TOMASEK: *Projectively generated topologies on tensor products*, Comm. Math. Univ. Carolinae 11, 745-768 (1970).

[17] L. WAELBROEK: *Summer school on topological vector spaces*, Lecture Notes in Mathematics 331, Springer 1973.

[18] N. ADASCH, B. ERNST: *Lokaltopologische Vektorräume II* (erscheint in Collectanea Math.).

R. Hollstein
Math. Institut D.
Universitat Frankfurt
6 000 Frankfurt A. M.
Robert-Mayer-Str. 10
Br-Deutschland