UNA PROPIEDAD DE LA ORTOGONALIDAD DE BIRKHOFF Y UNA CARACTERIZACION DE ESPACIOS PREHILBERTIANOS*

CARLOS BENÍTEZ

Departamento de Análisis Matemático
Universidad de Santiago de Compostela

INTRODUCCION

Sea N un espacio vectorial normado sobre el cuerpo real $\mathbf{R}$. Un punto $f \in N$ se dice ortogonal a otro $g \in N$, en el sentido de Birkhoff, $f \perp g$, si $||f|| \leqslant ||f + \lambda g||$, $\forall \lambda \in \mathbf{R}$.

Es fácil probar que, cuando N es un espacio prehilbertiano, f es ortogonal a g en el sentido de Birkhoff, si y solo si lo es en el sentido usual.

Son conocidas las siguientes propiedades de la B-ortogonalidad:

i) Homogeneidad: $f \perp g \Rightarrow \lambda f \perp \mu g, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}$

ii) «Existencia» por la derecha: $\forall f, g \in N, \quad \exists a \in \mathbf{R}: f \perp af + g$

por la izquierda: $\forall f, g \in N, \quad \exists b \in \mathbf{R}: bf + g \perp f$

iii) $f \perp g$, si y sólo si existe un funcional lineal continuo $\phi \in N^* \setminus \{0\}$, tal que $|\phi(f)| = ||\phi|| \, ||f||$, $\phi(g) = 0$

$f \perp H$, donde H es el hiperplano cerrado $\{h \in N : \phi(h) = 0\}$, $\phi \in N^* \setminus \{0\}$, si y sólo si $|\phi(f)| = ||\phi|| \, ||f||$

La B-ortogonalidad no tiene, en general, las siguientes propiedades:

i') Simetría: $f \perp g \Rightarrow g \perp f$

ii') Aditividad por la derecha: $f \perp g, \ f \perp h \Rightarrow f \perp g + h$

por la izquierda: $f \perp g, \ h \perp g \Rightarrow f + h \perp g$

(*) Trabajo presentado por el autor en el Colloque d'Analyse Numerique celebrado en Gourette (Francia), en el mes de Mayo de 1974, y publicado en estracto por los organizadores del mismo.

La B-ortogonalidad es simétrica en espacios de dimensión $\geqslant 3$, si y sólo si es aditiva por la izquierda, o, si y sólo si N es un espacio prehilbertiano. La B-ortogonalidad es aditiva por la derecha si y sólo si la norma es Gateaux-diferenciable en cada punto distinto de cero, o, si y sólo si es «única» por la derecha, es decir, si para todo par $f, g \in N$, $f \neq 0$, solo existe un número real a para el que se verifica ii.

Todos estos resultados son debidos a Birkhoff y James [4], [7].

Es también sobradamente conocida la estrecha relación que existe entre la ortogonalidad de Birkhoff y la teoría de la aproximación lineal óptima, que viene expresada por el siguiente hecho: si L es un subespacio vectorial de N y f es un punto de N, entonces $g_0 \in L$ es aproximación óptima de f, relativa a L, si y sólo si g_0 es proyección ortogonal, en el sentido de Birkhoff, de f sobre L, es decir, $f - g_0 \perp L$.

El objeto de esta nota consiste en la demostración de la siguiente propiedad de la B-ortogonalidad, a la que se ha dado un nombre que responde a su evidente interpretación geométrica:

iv) «Existencia y unicidad de diagonales ortogonales»: Para todo par de puntos $f, g \in N \setminus \{0\}$, existe un número real $\alpha > 0$, y sólo uno, tal que $f + \alpha g \perp f - \alpha g$, y se verifica:

a) $3^{-1} \|f\| \leqslant \alpha \|g\| \leqslant 3 \|f\|$

b) La aplicación

$$\alpha : (f, g) \in (N \setminus \{0\}) \times (N \setminus \{0\}) \longrightarrow \alpha(f, g) \in \mathbf{R}$$

donde $\alpha = \alpha(f, g)$ es el único número real positivo que corresponde al par (f, g), es continua, si se considera en el espacio original la topología producto.

c) El conjunto $A = \{\alpha(f, g) : \|f\| = \|g\| \neq 0\}$ es un intervalo de extremos a^{-1}, a, donde $1 \leqslant a \leqslant 3$.

d) N es un espacio prehilbertiano si y sólo si $A = \{1\}$, es decir, $\|f\| = \alpha(f, g) \|g\|$, $\forall f, g \in N \setminus \{0\}$.

LEMAS PREVIOS

LEMA 1. Sea $\|\ \|$ una norma en $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Un punto $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ es solución de las ecuaciones:

$$(1) \qquad 2\,|\alpha\beta| = \text{máx}\,\{|\beta a + \alpha b| : \|(a, b)\| \leqslant 1\}, \quad \|(\alpha, \beta)\| = 1$$

si y sólo si es solución de la ecuación:

$$(2) \qquad |\alpha\beta| = \text{máx}\, rlt\,\{|a b| : \|(a, b)\| \leqslant 1\}$$

es decir, (α, β) es un punto en el que la función $(a, b) \longrightarrow |a b|$, definida en el espacio métrico compacto $\{(a, b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : \|(a, b)\| \leqslant 1\}$, alcanza un máximo relativo.

DEMOSTRACION. Es evidente que (1) y (2) tienen solución y que toda solución de (2) tiene norma 1.

Sea (α, β) una solución de (2), pero no de (1). Existe entonces un punto (a_0, b_0), tal que

$$\text{máx}\,\{|\beta a + \alpha b| : \|(a, b)\| \leqslant 1\} = |\beta a_0 + \alpha b_0| < 2\,|\alpha\beta|$$

Supongamos que $\alpha\beta(\beta a_0 + \alpha b_0) > 0$, (bastaría considerar, si no, el punto $(-a_0, -b_0)$ en lugar del dado). Se tiene entonces que la función

$$F : t \in \mathbf{R} \longrightarrow |t a_0 + (1 - t)\alpha| \cdot |t b_0 + (1 - t)\beta| \in \mathbf{R}$$

verifica

$$F(0) = |\alpha\beta| > 0, \quad F'(0) = \frac{\alpha\beta}{|\alpha\beta|}(\beta a_0 + \alpha b_0) - 2|\alpha\beta| > 0$$

de donde se sigue, para $t \in (0, \varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, que

$$|t a_0 + (1 - t)\alpha| \cdot |t b_0 + (1 - t)\beta| > |\alpha\beta|$$
$$\|(t a_0 + (1 - t)\alpha,\ t b_0 + (1 - t)\beta)\| \leqslant 1$$

lo que contradice la hipótesis,

Recíprocamente, sea (α, β) una solución de (1), pero no de (2). Entonces, para todo número natural n se puede encontrar un punto (a_n, b_n) de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, tal que

$$||(a_n, b_n)|| \leqslant 1, \qquad ||(\alpha - a_n, \beta - b_n)|| < \frac{1}{n},$$
$$|\beta a_n + \alpha b_n| \leqslant 2\,|\alpha \beta| < 2\,|a_n b_n|$$

Si n es suficientemente grande para que $\alpha a_n > 0$, $\beta b_n > 0$, la relación anterior se puede escribir en la forma contradictoria

$$|\beta a_n| + |\alpha b_n| \leqslant 2\,|\alpha \beta| < 2\,|a_n b_n|$$

LEMA 2.— Si (α_1, β_1), (α_2, β_2), son soluciones de (2), tales que $\alpha_1 \alpha_2 > 0, \beta_1 \beta_2 > 0$, entonces $(\alpha_1, \beta_1) = (\alpha_2, \beta_2)$.

DEMOSTRACION. Sea, por ejemplo, $|\alpha_2 \beta_2| \leqslant |\alpha_1 \beta_1|$. Si es $\alpha_1 \neq \alpha_2$, entonces

$$|\alpha_1\ \beta_2| + |\alpha_2\, \beta_1| = |\alpha_2\ \beta_2|\, \frac{\alpha_1}{\alpha_2} +$$
$$+ |\alpha_1\ \beta_1|\, \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \geqslant |\alpha_2\ \beta_2|\, \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{\alpha_1\ \alpha_2} > 2\,|\alpha_2\ \beta_2|$$

que contradice el lema precedente.

COROLARIO. — Hay una solución y sólo una de cada una de las siguientes ecuaciones

(3) $\quad \alpha \beta = \text{máx}\, rlt\{ab : ||(a, b)|| \leqslant 1,\ a \geqslant 0,\ b \geqslant 0\}$

(4) $\quad \alpha \beta = \text{máx}\, rlt\{ab : ||(a, b)|| \leqslant 1,\ a \leqslant 0,\ b \leqslant 0\}$

(5) $\quad -\alpha \beta = \text{máx}\, rlt\,\{-ab : ||(a, b)|| \leqslant 1,\ a \geqslant 0,\ b \leqslant 0\}$

(6) $\quad -\alpha \beta = \text{máx}\, rlt\,\{-ab : ||(a, b)|| \leqslant 1,\ a \leqslant 0,\ b \geqslant 0\}$

Estas son todas las soluciones de (2). Si (α, β) es la solución de (3) (ó de (5)), $(-\alpha, -\beta)$ es la solución de (4) (resp. (6)).

RESULTADOS

Sea N un espacio vectorial normado real y N^* su dual topológico.

DEMOSTRACION de la propiedad (iv) de la B-ortogonalidad, enunciada en la introducción:

Por lo que respecta a la existencia y unicidad, para todo par $f, g \in N \setminus \{0\}$, del número real $\alpha > 0$, tal que $f + \alpha g \perp f - \alpha g$, se verifica lo siguiente:

Si $f = \lambda g$, entonces $\alpha = |\lambda|$

Sean, pues, f y g linealmente independientes, y sea L el subespacio bidimensional de N engendrado por ellos.

La existencia y unicidad del mencionado α es trivialmente equivalente a la de dos números reales positivos α y β, tales que

$$\alpha f + \beta g \perp \alpha f - \beta g, \; ||\alpha f + \beta g|| = 1$$

A su vez, la existencia de estos números es equivalente (propiedad iii) a la de un funcional lineal continuo $\phi \in L^* \setminus \{0\}$, tal que

$$|\phi(\alpha f + \beta g)| = ||\phi|| \, ||\alpha f + \beta g|| = ||\phi||, \quad \phi(\alpha f - \beta g) = 0$$

La segunda relación es válida si y sólo si ϕ es el funcional definido por

$$\phi(af + bg) = \beta a + \alpha b$$

o cualquier otro proporcional a él.

Por definición

$$||\phi|| = \text{máx} \{|\beta a + \alpha b| : ||af + bg|| \leqslant 1\}$$

y, en consecuencia, la primera relación es válida si y sólo si

$$2\,|\alpha \beta| = \text{máx} \{|\beta a + \alpha b| : ||af + bg|| \leqslant 1\}$$

o (Lema 1) si y sólo si

$$|\alpha \beta| = \text{máx}\; r l t \; \{|ab| : ||af + bg|| \leqslant 1\}$$

de donde se sigue (Corolario del Lema 2) la existencia y unicidad de α y β.

a) Por definición, $f + \alpha g \perp f - \alpha g$, $\alpha > 0$, significa que $||f + \alpha g|| \leqslant ||f + \alpha g + \lambda(f - \alpha g)||$, $\forall \lambda \in \mathbf{R}$

de donde se sigue, para $\lambda = 1$

$$\alpha||g|| - ||f|| \leqslant 2||f||$$

y, para $\lambda = -1$

$$||f|| - \alpha\, ||g|| \leqslant 2\alpha\, ||g||$$

b) Sea $\{(f_n, g_n)\}$ una sucesión que converge al punto $(f, g) \in \in (N \setminus \{0\}) \times (N \setminus \{0\})$, en este espacio. De a) se sigue que la sucesión de números reales $\{\alpha(f_n, g_n)\}$ es acotada, por lo que bastará de mostrar que toda subsucesión convergente de la misma converge a $\alpha(f, g)$. Sea γ el límite de una de tales subsucesiones; por continuidad habrá de ser $f + \gamma g \perp f - \gamma g$, y, por la ya probada unicidad de α, se obtiene que $\gamma = \alpha(f, g)$.

c) La conexión del conjunto A se sigue de la continuidad de α y de la conexión del conjunto $S \times S$, donde $S = \{h \in N : ||h|| = 1\}$

Por otra parte, el hecho de que el intervalo A tiene extremos a^{-1}, a, se sigue de la relación

$$\alpha(f, g) = [\alpha\, (g, f)]^{-1}$$

d) Bastará probar que en un espacio N tal que $A = \{1\}$, es decir, tal que

$$||g||\, f + ||f||\, g \perp ||g||\, f - ||f||\, g, \quad \forall f, g \in N$$

las ortogonalidades de Birkhoff e isósceles son equivalentes [7, Th. 4.7]:

Si f es isósceles-ortogonal a g, es decir, si $||f + g|| = ||f - g||$, entonces, como por hipótesis se tiene

$$||f - g||(f + g) + ||f + g||(f - g) \perp ||f - g||(f + g) - ||f + g||(f - g)$$

resulta que $f \perp g$.

Recíprocamente, si es $f \perp g$, entonces es evidente que

$$\lambda(f + g) + \lambda(f - g) \perp \lambda(f + g) - \lambda(f - g), \; \forall \lambda \in \mathbf{R}$$

y de aquí se sigue, dada la hipótesis, que para $\lambda = ||f - g||$, ha de ser $\lambda = ||f + g||$, es decir, f isósceles-ortogonal a g.

EJEMPLO. Es fácil probar que en $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, dotado de la norma $||(a, b)|| = |a| + |b|$, ó de la $||(a, b)|| = \text{máx}\ \{|a|, |b|\}$, el conjunto A del teorema anterior es, precisamente, el intervalo más grande posible, $[3^{-1}, 3]$.

Por otra parte, si en $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ se considera una norma euclídea, se tiene, como ya se dijo, $A = \{1\}$.

Ambos hechos inducen a pensar que el número a, o el diam $A = a - a^{-1}$, que son *constantes asociadas al espacio*, «miden, en algún sentido, lo próxima que está la norma del espacio a derivar de un producto escalar».

BIBLIOGRAFÍA

1. C. BENÍTEZ. *Normas en espacios producto que conservan propiedades de aproximación*. Rev. Mat. Hisp. Amer. T. XXXIV, N.º 4-5, 163-175, (1974).

2. C. BENÍTEZ. *Una propiedad de algunas ortogonalidades* (*Roberts, Isósceles, Pitagórica*) *en espacios normados*. II Jornadas Matemáticas Hispano-Lusitanas. Madrid (1973).

3. C. BENÍTEZ. *Circunferencias en espacios normados*. III Jornadas Matemáticas Hispano-Lusitanas. Sevilla (1974).

4. G. BIRKHOFF. *Orthogonality in linear metric spaces*. Duke Math. J. 1, 169-172 (1935).

5. M. M. DAY. *Normed Linear Spaces*. Springer-Verlag. Berlin (1962).

6. R. C. JAMES. *Orthogonality in normed linear spaces*. Duke Math. J. 12, 291-301 (1945).

7. R. C. JAMES. *Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces*. Trans. Amer. Math. Soc. 61, 265-292 (1947)

8. R. C. JAMES. *Inner products in normed linear spaces*. Bull. Amer. Math. Soc. 53, 559-566 (1947).

9. I. SINGER. *Best approximation in normed linear spaces by elements of linear subspaces*. Springer-Verlag. Berlin (1970).