AXIOMATISCHE DIFFERENTIALRECHNUNG

por

MARTIN WEHRLI

In den letzten Jahren sind die verschiedensten Bemühungen unternommen worden, die Differentialrechnung zu verallgemeinern und neuen Anwendungen zuzuführen.

Als Beispiele seien etwa (1), (2), (3) genannt. In Richtung auf eine Systematisierung geht (4), während (5) die Ansätze von (4) ausbaut und in eine mehr oder weniger definitive Form bringt.
Weil (5) der Natur der Sache gemäss etwas lang ausgefallen ist, ist seine Publikation auf Schwierigkeiten gestossen.

Die vorliegende Arbeit soll nun eine Zusammenfassung von (5) liefern.

Weil das Manuskript lieferbar ist, werden wir hier auf die Wiedergabe einzelner Beweise verzichten.

§1. DIE KLASSISCHE DIFFERENTIALRECHNUNG

$\mathbf{R}$ sei die Menge der reellen Zahlen.

Für jedes $x \in \mathbf{R}$ bedeute $\mathfrak{D}_x(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ die Menge der Abbildungen von $\mathbf{R}$ in sich, welche in x im üblichen Sinn differenzierbar sind.

$\mathfrak{A}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ sei die Menge der $\mathbf{R}$-linearen Abbildungen von $\mathbf{R}$ in sich. Identifiziert man $\mathbf{R}$ und $\mathfrak{A}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ in der bekannten Art, so lässt sich die Differentiation in x als eine $\mathbf{R}$-lineare Abbildung D_x von $\mathfrak{D}_x(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ nach $\mathfrak{A}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ auffassen. Demzufolge nennen wir die Elemente von $\mathfrak{A}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ auch Ableitungen oder Ableitungsoperatoren.

$x \in \mathbf{R}$ sei beliebig. Dann gilt:

1.) $\mathfrak{D}_x(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ ist bei üblicher Definition der Operationen ein $\mathbf{R}$-linearer Raum. Dasselbe gilt für $\mathfrak{A}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$

2.) D_x: $\mathfrak{D}_x(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \to \mathfrak{A}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ ist eine $\mathbf{R}$-lineare Abbildung.

3.) Es gilt die Kettenregel, *d.h.* genauer:

aus $f \in \mathfrak{D}_x(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ mit $f(x) = y$ und $D_x f = A$ und aus $g \in \mathfrak{D}_y(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ mit $D_y g = B$ folgt für die Kompositionsabbildung $\varphi = f \circ g$:

$$\varphi \in \mathfrak{D}_x(\mathbf{R}, \mathbf{R}), D_x \varphi = B \circ A$$

($\circ$ ist hier und auch später das Zeichen für Komposition).

4.) Es gilt die Inklusion $\mathfrak{A}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \subset \mathfrak{D}_x(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ Die Beschränkung von D_x auf $\mathfrak{A}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ ist die Identität.

5.) $\mathfrak{D}_x(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ enthält alle konstanten Abbildungen von $\mathbf{R}$ nach $\mathbf{R}$; diese liegen sogar im Kern von D_x.

6.) $f \in \mathfrak{D}_x(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ ist für die natürliche Topologie $\mathcal{N}$ in $\mathbf{R}$ im Punkte x stetig.

7.) Es sei $f \in \mathfrak{D}_x(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ und U eine beliebige $\mathcal{N}$-Umgebung von x. Für $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ gelte:

$\varphi | U = f | U$ (der vertikale Strich bedeute stets Beschränkung, *d.h.* hier von φ *bzw.* f auf U).

Dann ist $\varphi \in \mathfrak{D}_x(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ und $D_x \varphi = D_y f$

Für 6.) sagen wir lapidar, dass *differenzierbare Abbildungen stetig* (in $\mathcal{N}$) sind, für 7.) dagegen, dass die *Differentiation* (*in* $\mathcal{N}$) *lokal* sei. Unter Verwendung dieser Ausdrucksweise gilt nach (5), Satz 2.1:

Sind in einer Hauptidellimitierung $\mathcal{T}$ in $\mathbf{R}$ die differenzierbaren Abbildungen stetig und ist in $\mathcal{T}$ die Differentiation lokal, so ist $\mathcal{T} = \mathcal{N}$ oder aber $\mathcal{T}$ ist die indiskrete Topologie.

Weiter gibt es nach (5) ausser der diskreten Topologie und den eben genannten keine Hauptideallimitierungen, in denen differenzierbare Abbildungen stetig sind.

Es muss also grundsätzlich möglich sein, die Topologie $\mathcal{N}$ durch die Mengen $\mathfrak{A}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ und $\mathfrak{D}_x(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ zu charakterisieren. Hierauf gehen wir unten ein.

Unter Verwendung der obigen Feststellungen 1.) bis 5.) wollen wir nun zeigen, in wie fern man Differentiation als Aproximation durch lineare Abbildungen betrachten kann:

Es sei $f \in \mathfrak{D}_x(\mathbf{R}, \mathbf{R}), y = f(x), \ A = D_x f$.

Für $z \in \mathbf{R}$, beliebig aber fest, sei

$\varrho_z : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ durch $\varrho_z(h) = z + h$ definiert.

Für alle $u \in \mathbf{R}$ ist offenbar $\varrho_z \in \mathcal{D}_u(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ und $D_u\, \varrho_z = id$, wo id die identische Abbildung von $\mathbf{R}$ in sich bedeutet.

Wie folgt definieren wir $r : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$:

$$r = \varrho_{-y} \circ f \circ \varrho_x - D_x f, \; d.h.$$
$$r(h) = f(x + h) - f(x) - (D_x f)h$$

Offenbar ist $r(0) = 0$ und $r \in \mathcal{D}_0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ mit $D_0\, r = 0$.

Es sei $\mathcal{R}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ die folgende Menge von Abbildungen ϱ von $\mathbf{R}$ in sich:

$$\mathcal{R}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) = \{\varrho \in \mathcal{D}_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \colon \varrho(0) = 0 \text{ und } D_0\, \varrho = 0\}$$

Elemente aus $\mathcal{R}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ nennen wir Restglieder. Wir können nun schreiben:

$$f(x + h) = f(x) + (D_x f)\, h + r(h),$$

beliebig wo r ein Restglied ist.

Wir setzen nun umgekehrt voraus:

Die Abbildung $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ lasse sich in dieser Weise zerlegen, *d.h.* es gelte für $x \in \mathbf{R}$ fest, h beliebig:

$$g(x + h) = g(x) + Ah + r(h) \text{ mit}$$
$$A \in \mathfrak{A}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \text{ und } r \in \mathcal{R}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$$

Man verifiziert:

$$g \in \mathcal{D}_x(\mathbf{R}, \mathbf{R}), \; D_x\, g = A$$

Die Zerlegung ist damit eindeutig.

Etwas ungenau könnte man sagen:

$$f(x + h) - f(x) \text{ ist linear in } h$$

(bis auf den «Ungenauigkeitsterm« r).

§ 2. Algebraische Differentialkalküle [1]

In (5) wird die eben demonstrierte und natürlich wohlbekannte Zerlegbarkeit der differenzierbaren Abbildungen in Ableitung und Restglied als wesentlich betrachtet, obschon sie nicht immer gegeben

---

[1] Infolge eines Irrtums wurde statt einem Index $\mathcal{G}$ fast durchgehend der Index $\mathfrak{G}$ gedruckt. $\mathcal{G}$ und $\mathfrak{G}$ sind also völlig äquivalent.

ist (vgl. etwa das Beispiel der Differentiation von Massen im Sinne des Satzes von Radon Nikodym in (6)).

Allerdings wird im Anhang von (5) auf Probleme dieses Zusammenhanges eingegangen.

Es bezeichne nun auch noch X die Menge der reellen Zahlen. Statt $\mathfrak{A}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, $\mathcal{R}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, ... schreiben wir nun auch $\mathfrak{A}(X, X)$, $\mathcal{R}(X, X)$, ...

Soll nun $f: X \to X$ in $x \in X$ differenzierbar sein, so muss also für alle $h \in \mathbf{R}$ gelten:

$$f(h + X) = (A\,h + r(h)) + f(X)$$

Soll diese Gleichung sinnvoll sein, so ist es nicht wichtig, dass X algebraische Strukturen besitzt. Etwa das folgende reicht aus:

$\mathbf{R}$ operiert als (additive) Gruppe auf X.

$A \in \mathfrak{A}(X, X)$ ist ein Gruppenhomomorphismus von $\mathbf{R}$ nach $\mathbf{R}$

$r \in \mathcal{R}(X, X)$ ist eine Abbildung von $\mathbf{R}$ nach $\mathbf{R}$, die (*u.a.*) das Neutralelement erhält.

Unter diesen Umständen ist die obige Gleichung bereits sinnvoll; Begriffe wie Differenzierbarkeit etc. lassen sich dann auch leicht in einer solchen, verallgemeinerten Situation definieren (vgl. Definition 2 unten).

Zu diesem Zweck wird in (5) der Begriff des allgemeinen algebraischen Differentialkalküls eingeführt, dessen Definition wir nun in spezieller Form wiedergeben (vgl. (5), Def. 2.4. und Def. 4.2.):

Definition 1: Wir sprechen von einem allgemeinen algebraischen Differentialkalkül $\mathcal{G}$ (kurz *ADK*), wenn folgendes gegeben ist:

1. Eine Klasse von Mengen X, Y, Z, ... die wir Objekte von $\mathcal{G}$ nennen.

2. Zu jedem Objekt X von $\mathcal{G}$ eine Gruppe G_X (Transformationsgruppe von X), welche auf X wirkt (das Neutralelement e als Identität; für $g, \gamma \in G_X$ sei stets für alle $x \in X$ $(g\,\gamma)\,x = g\,(\gamma\,x)$).

3. Zu jedem geordneten Objektpaar (X, Y) zwei Mengen $\mathfrak{A}_{\mathcal{G}}(X, Y)$ und $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(X, Y)$ von Abbildungen von G_X nach G_Y. Dabei ist jedes $A \in \mathfrak{A}_{\mathcal{G}}(X, Y)$ ein Gruppenhomomorphismus, während jedes $r \in \mathcal{R}_{\mathcal{G}}(X, Y)$ das Neutralelement erhält. Wir sprechen von Ableitungen und Restgliedern.

   Weiter gelten die unten aufgeführten Axiome 1, 2, 4, 5, 6.

Gilt auch Axiom 3, so sprechen wir von algebraischem Differentialkalkül oder *ADK* mit eindeutiger Differentiation (dieser Name wird unten sofort einleuchten).

In (5) wird noch ein Operatorenbereich betrachtet; die G_X sind dort Monoide, welche noch von je einem $x \in X$ abhängen können.

Vor der Einführung der Axiome gehen wir auf einige zusätzliche Begriffe ein:

$\mathcal{G}$ sei ein *ADK*, X, Y beliebige Objekte von $\mathcal{G}$.

Definition 2: $f\colon X \to Y$ heisst in $x \in X$ algebraisch $\mathcal{G}$-differenzierbar, wenn es $A \in \mathfrak{A}_{\mathcal{G}}(X, Y)$ und $r \in \mathcal{R}_{\mathcal{G}}(X, Y)$ gibt, so dass für alle $g \in G_X$ gilt:

$$f(gx) = (Ag\, r(g))\, f(x)$$

A heisst $\mathcal{G}$-Ableitung von f in x, r das zu A gehörige Restglied.

Unter algebraischer $\mathcal{G}$-Differentiation von f in x verstehen wir die Zuordnung sämtlicher $\mathcal{G}$-Ableitungen von f in x zu f.

$\mathfrak{D}^a_{\mathcal{G}^x}(X, Y)$ sei die Menge der in x algebraisch $\mathcal{G}$-differenzierbaren Abbildungen von X nach Y.

Ist $$f \in \bigcap_{x \in X} \mathfrak{D}^a_{\mathcal{G}^x}(X, Y) = \mathfrak{D}^a_{\mathcal{G}}(X, Y)$$

so nennen wir f überall algebraisch $\mathcal{G}$-differenzierbar.

In naheliegender Weise wird durch die algebraische $\mathcal{G}$-Differentiation in x eine Relation von

$$\mathfrak{D}^a_{\mathcal{G}^x}(X, Y) \text{ nach } \mathfrak{A}_{\mathcal{G}}(X, Y) \text{ vermittelt.}$$

Diese Relation bezeichnen wir mit $D^a_{\mathcal{G}^x}$.

Für $f \in \mathfrak{D}^a_{\mathcal{G}^x}(X, Y)$ ist also $D^a_{\mathcal{G}^x}(f)$ *die Menge der* $\mathcal{G}$-*Ableitungen von* f in x.

Wo keine Gefahr von Verwechslungen besteht, lassen wir Indices und Beiwörter $\mathcal{G}$ weg.

Als Beispiel zu den Definitionen 1 und 2 sei etwa auf die Differentialrechnung in normierten Räumen verwiesen. Bevor wir auf die Axiome eingehen, wollen wir aber noch ein anderes nicht ganz so naheliegendes Beispiel betrachten:

Der ADK $\mathcal{G}$ enthalte als einziges Objekt X die Menge der reellen Zahlen. G_X sei die multiplikative Gruppe, welche aus den Zahlen $+1$ und -1 besteht und welche durch Multiplikation auf X wirke. $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(X, X)$ enthalte nur die Abbildung $r : G_x \to G_x$, die durch

$$r(+1) = r(-1) = +1 \text{ erklärt ist.}$$

$\mathfrak{A}_{\mathfrak{G}}(X, X)$ bestehe aus den beiden einzigen Homomorphismen A und B von G_X nach G_X, *wo* $B = r$ und A die identische Abbildung von G_X in sich sei.

Die unten aufgeführten Axiome des ADK sind hier erfüllt. Soll nun $f: X \to X$ in $x \in X = \mathbf{R}$ algebraisch $\mathcal{G}$-differenzierbar mit Ableitung A *bzw.* B sein, so folgt:

$$f(-x) = -f(x) \ \textit{bzw.} \ f(-x) = f(x)$$

Ueberall mit $\mathcal{G}$-Ableitung A (*bzw.* B) algebraisch differenzierbar sind nur die ungeraden (*bzw.* geraden) Funktionen.
Die Gültigkeit der unten hergeleiteten Kettenregel läuft darauf hinaus, dass die Komposition von geraden Funktionen gerade, von ungeraden ungerade etc. ist. Im Falle von $f(x) = 0$ ist die Ableitung von $f(x)$ in x nicht eindeutig bestimmt; Bedingung zur algebraischen $\mathcal{G}$-Differenzierbarkeit ist dann $f(-x) = 0$. In 0 ist jedes f algebraisch $\mathcal{G}$-differenzierbar.
Wir nennen nun die Axiome. $\mathcal{G}$ sei ein ADK, X, Y, Z beliebige Objekte, $x \in X$ beliebig.

Axiom 1: $\mathfrak{A}_{\mathfrak{G}}(X, Y)$ enthält den trivialen Homomorphismus, der G_X auf das Neutralelement e von G_Y abbildet.

Axiom 2: $\mathcal{R}_{\mathfrak{G}}(X, Y)$ enthält ebenfalls den trivialen Homomorphismus von G_X nach G_Y.

Für $r_1, r_2 \in \mathcal{R}_{\mathfrak{G}}(X, Y)$ ist auch das in üblicher Weise erklärte Produkt $r_1 r_2$ in $\mathcal{R}_{\mathfrak{G}}(X, Y)$

Axiom 3: Sei $f \in \mathfrak{D}^a_{\mathfrak{G}, x}(X, Y)$. Aus $A \in \mathfrak{D}^a_{\mathfrak{G}, x}(f)$ und $B \in \mathfrak{D}^a_{\mathfrak{G}, x}(f)$ folgt stets $A = B$.

Axiom 4: Aus $A \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{G}}(X, Y)$ und $B \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{G}}(Y, Z)$ folgt $B \circ A \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{G}}(X, Z)$

Axiom 5: Aus $A \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{G}}(X, Y)$, $r \in \mathcal{R}_{\mathfrak{G}}(X, Y)$ und $\varrho \in \mathcal{R}_{\mathfrak{G}}(Y, Z)$ folgt $\varrho \circ (Ar) \in \mathcal{R}_{\mathfrak{G}}(X, Z)$.
(Ar das in üblicher Weise erklärte Produkt).

Axiom 6: Aus $B \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{G}}(Y, Z)$, $r \in \mathcal{R}_{\mathfrak{G}}(X, Y)$ folgt $B \circ r \in \mathcal{R}_{\mathfrak{G}}(X, Z)$

Der Name «*ADK*« mit eindeutiger Differentiation ist jetzt wohl sofort verständlich. Die etwas ungeschickt wirkende Numerierung der Axiome (Axiom 3 in der Mitte) rührt daher, dass in (5) unsere Definition in zwei Teile zerlegt worden ist.

Im Uebrigen sind wegen der grösseren Allgemeinheit der Begriffsbildungen in (5) die Axiome dort *z.T.* etwas anders formuliert.

Satz 1: (Kettenregel):

Sei $$f \in \mathfrak{D}^{a}_{\mathfrak{G}x}(X, Y),\ f(x) = y,\ A \in D^{a}_{\mathfrak{G}x}(f)$$

und $g \in \mathfrak{D}^{a}_{\mathfrak{G}y}(Y, Z)$, $B \in D^{a}_{\mathfrak{G}y}(g)$, dann ist $(g \circ f) \in \mathfrak{D}^{a}_{\mathfrak{G}x}(X, Z)$

und $$B \circ A \in D^{a}_{\mathfrak{G}x}(g\,f)$$

Der Beweis ist eine einfache Verifikation.

Zu jedem *ADK* $\mathcal{G}$ kann man einen *ADK* $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ konstruieren, mit gleichen Transformationsgruppen, Ableitungen und Restgliedern, dessen Objekte aber die Transformationsgruppen von $\mathcal{G}$ sind, die auf sich selber wirken. Der Begriff der algebraischen $\mathcal{G}$-Differenzierbarkeit überträgt sich damit auch auf die Transformationsgruppen. Vgl. hierzu (5), *S.* 59.

$\mathcal{G}$ und $\mathcal{G}'$ seien zwei *ADK* mit gleichen Objekten und gleichen (auch gleich wirkenden) Transformationsgruppen. Ist stets

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{G}}(X, Y) \subseteqq \mathfrak{A}_{\mathfrak{G}'}(X, Y) \text{ und } \mathcal{R}_{\mathfrak{G}}(X, Y) \subseteqq \mathcal{R}_{\mathfrak{G}'}(X, Y),$$

so umfasst der $\mathcal{G}'$ entsprechende Differenzierbarkeitsbegriff den $\mathcal{G}$ entsprechenden in einem anschaulichen Sinne.
Wir sagen:

$\mathcal{G}'$ ist algebraische Erweiterung von $\mathcal{G}$. Wenn die Objekte von $\mathcal{G}$ eine Menge bilden, gilt:

Satz 2: Die Menge aller *ADK* $\mathcal{G}'$ mit gleichen Objekten, gleichen und gleich wirkenden Transformationsgruppen wie $\mathcal{G}$ bildet unter dem Gegriff der algebraischen Erweiterung einen vollständigen Verband.

Man vgl. (5), Kapitel 3 und 4.

Auf den Beweis gehen wir hier nicht ein.

§ 3. Gâteux'sche und Fréchet'sche Differentialkalküle

Das Objekt X des *ADK* $\mathcal{G}$ trage eine Limitierung Λ. Hier und auch später bezeichne $\Psi(\Lambda)$ die zu Λ gehörige Hauptideallimitierung.

Liegt eine Menge U in allen Filtern, welche in Λ nach $x \in X$ konvergieren, so wollen wir U eine Λ-Umgebung von x nennen.

Wir werden in Zukunft folgende Ausdrucksweisen gebrauchen:

Definition 3: In Λ ist die algebraische $\mathcal{G}$-Differentiation lokal, wenn für alle Objekte Y und alle $x \in X$ gilt:
Ist $f \in \mathfrak{D}^a_{\mathfrak{G}^x}(X, Y)$ und gilt für die Abbildung $\varphi : X \to Y$ $\varphi|U = f|U$, wo U eine beliebige Λ-Umgebung von x ist, so folgt $\varphi \in \mathfrak{D}^a_{\mathfrak{G}^x}(X, Y)$ und $D^a_{\mathfrak{G}^x}(\varphi) = D^a_{\mathfrak{G}^x}(f)$. Trägt nun jedes Objekt X von $\mathcal{G}$ eine Limitierung Λ und folgt aus $f \in \mathfrak{D}^a_{\mathfrak{G}^x}(X, Y)$ stets, dass f in x für Λ in X und Y stetig ist, so sagen wir:

Algebraisch $\mathcal{G}$-differenzierbare Abbildungen sind in Λ stetig.

Gelten diese beiden Aussagen in Λ, so natürlich auch in $\Psi(\Lambda)$. Λ_σ sei in jedem Objekt X von $\mathcal{G}$ die durch die Transitivitätsgebiete von G_X erzeugte Topologie.

In den Λ_σ ist die algebraische $\mathcal{G}$-Differentiation lokal und algebraisch $\mathcal{G}$-differenzierbare Abbildungen sind stetig.

Diese Aussage gilt auch für die indiskrete Topologie Λ_{ind}. Nach Lemma 2. 23 in (5) gilt:

Satz 3: Jedes Objekt des *ADK* $\mathcal{G}$ trage eine Limitierung Λ_1, in welcher die algebraische $\mathcal{G}$-Differentiation lokal ist.
Weiter trage jedes Objekt von $\mathcal{G}$ eine Limitierung Λ_2, sodass algebraisch $\mathcal{G}$-differenzierbare Abbildungen Λ_2-stetig sind.

Dann gilt:
Wenn nicht $\Psi(\Lambda_2)$ in allen Objekten indiskret ist, so ist $\Psi(\Lambda_1)$ stets gröber oder gleich $\Psi(\Lambda_2)$.
Ist also Λ_σ nicht stets gleich Λ_{ind}, so sind Λ_σ und Λ_{ind} die einzigen Systeme von Hauptideallimitierungen, in welchen algebraisch $\mathcal{G}$-differenzierbare Abbildungen stetig sind und die algebraische $\mathcal{G}$-Differentiation lokal ist.
Es wäre aber verfrüht zu schliessen, dass ein *ADK* nur dann topologisch interessant sei, wenn in seinen Objekten stets $\Lambda_{ind} = \Lambda_\sigma$ gilt.
$\mathcal{G}$ sei ein *ADK*. Das Objekt X von $\mathcal{G}$ trage eine Limitierung Λ.

Definition 4: Wir nennen die algebraische $\mathcal{G}$-Differentiation im erweiterten Sinne lokal in Λ, wenn für jedes $x \in X$ und jedes beliebige Objekt Y das folgende gilt:
Ist $f \in \mathfrak{D}^a_{\mathfrak{G}^x}(X, Y)$, U eine beliebige Λ-Umgebung von x in X und ist $\varphi|U = f|U$, wo $\varphi : X \to Y$ eine Λ_σ stetige Abbildung ist, dann gilt:

$$\varphi \in \mathfrak{D}^a_{\mathfrak{G}^x}(X, Y) \text{ und } D^a_{\mathfrak{G}^x}(\varphi) = D^a_{\mathfrak{G}^x}(f)$$

Diese Definition wird uns helfen, davon loszukommen, dass algebraische $\mathcal{G}$-differenzierbare Abbildungen Transitivitätsgebiete erhalten.

In jedem Objekt X von $\mathcal{G}$ gibt es eine feinste Hauptideallimitierung Λ_L, in welcher die algebraische $\mathcal{G}$-Differentiation im erweiterten Sinne lokal ist.

Mit den üblichen Bezeichnungen sagen wir (in Def. 2 sprachen wir von algebraischer Differenzierbarkeit):

Definition 5: $f : X \to Y$ heisst in $x \in X$ $\mathcal{G}$-differenzierbar, wenn es $\varphi \in \mathfrak{D}^a_{\mathfrak{G}^x}(X, Y)$ gibt und eine Λ_L-Umgebung $U \subset X$ von $x \in X$ mit $f|U = \varphi|U$.

Die Menge der in x $\mathcal{G}$-differenzierbaren Abbildungen von X nach Y sei mit $\mathfrak{D}_{\mathfrak{G}^x}(X, Y)$ bezeichnet.

Jedes $A \in D^a_{\mathfrak{G}^x}(\varphi)$ nennen wir $\mathcal{G}$-Ableitung von f in x. $D_{\mathfrak{G}^x}(f)$ sei die Menge der $\mathfrak{G}$-Ableitungen von f in x.

Diese Menge hängt nicht von φ ab.

$$\mathfrak{D}_{\mathfrak{G}}(X, Y) \text{ sei durch } \bigcap_{x \in X} \mathfrak{D}_{\mathfrak{G}^x}(X, Y) \text{ erklärt.}$$

Die durch $D_{\mathfrak{G}^x}$ vermittelte Relation von $\mathfrak{D}_{\mathfrak{G}^x}(X, Y)$ nach $\mathfrak{A}_{\mathfrak{G}}(X, Y)$ nennen wir $\mathcal{G}$-Differentiation.

Auch hier lassen wir wo möglich Beiwörter und Indizierungen $\mathcal{G}$ weg.

Aussagen, wie «die $\mathcal{G}$-Differentiation ist lokal« oder «$\mathcal{G}$-differenzierbare Abbildungen sind stetig« verstehen wir in Analogie zu den Definitionen 3 und 4.

Nach (5) Satz 5.3 gilt:

Satz 4: Jedes Objekt X von $\mathcal{G}$ trägt eine Hauptideallimitierung Λ_F. In den Λ_F sind $\mathcal{G}$-differenzierbare Abbildungen stetig.

In allen Objekten ist Λ_L nicht feiner als Λ_F.

Sind die $\mathcal{G}$-differenzierbaren Abbildungen stetig für ein System von Limitierungen Λ in den Objekten von $\mathcal{G}$, so ist $\Psi(\Lambda)$ entweder stets indiskret oder aber stets nicht gröber als Λ_F.

Weil Satz 4 auch in $\mathcal{F}(\mathfrak{G})$ gilt (vgl. die Satz 1 folgenden Ausführungen), existieren Λ_L und Λ_F entsprechende Limitierungen Λ_l und Λ_f in den Transformationsgruppen G_X von $\mathcal{G}$; wir beschränken uns hier darauf, deren Existenz festzustellen.

Wir fragen, wann $\Lambda_F = \Lambda_L$ gilt.

Ist diese Gleichung in $\mathcal{G}$ und in $\mathcal{F}(\mathfrak{G})$ richtig, so muss $\mathcal{G}$ (und auch $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$) im Prinzip ein Gâteaux'scher Differentialkalkül sein, an deren Behandlung wir jetzt gehen:

Definition 6: Ein *ADK* $\mathcal{G}$ heisst allgemeiner Gâteaux' scher Differentialkalkül oder *GDK*, wenn die beiden folgenden Axiome 7 und 8 gelten (X, Y, Z,... wie stets, Objekte, beliebig):

Axiom 7: $M \subset G_X$ habe die folgende Eigenschaft:

Für jedes Objekt Y und jedes $c \in G_y$ gibt es $r \in \mathcal{R}_{\mathfrak{G}}(X, Y)$ mit $r \mid M = c$.

Dann existiert zu jedem Z und jeder Abbildung $\psi : M \to G_Z$ ein $\varrho \in \mathcal{R}_{\mathfrak{G}}(X, Z)$ mit $\varrho \mid M = \psi$.

Axiom 8: Es seien r_1, $r_2 \in \mathcal{R}_{\mathfrak{G}}(X, Y)$. Die Abbildung $\varrho : G_X \to G_Y$ habe folgende Eigenschaft:

Aus $g \in G_X$ und $\varrho(g) \neq r_1(g)$ folgt $\varrho(g) = r_2(g)$.

Dann ist $\varrho \in \mathcal{R}_{\mathfrak{G}}(X, Y)$.

In Axiom 8 wird etwas mehr gefordert, als für die Gleichheit $\Lambda_L = \Lambda_F$ in $\mathcal{F}(\mathfrak{G})$ und $\mathcal{G}$ nötig ist.

Die Definition des *GDK* ist in (5) etwas allgemeiner gefasst als hier.

Wenn $\mathcal{G}$ *GDK* und gleichzeitig *ADK* mit eindeutiger Differentiation ist, so nennen wir $\mathcal{G}$ Gâteaux'schen Differentialkalkül oder *GDK* mit eindeutiger Differentiation.

Der gröbste in Λ_l zum Neutralelement von G_X konvergierende Filter sei mit $\mathcal{U}_X$ bezeichnet.

Definition 7: Wir nennen den *GDK* $\mathfrak{G}$ regulär, wenn es mindestens ein Objekt X von $\mathcal{G}$ und ein $x \in X$ gibt, so dass der durch $\mathcal{U}_X x$ erzeugte Filter nicht bereits durch die Menge $G_X x$ erzeugt wird.

Bei gleichen Bezichnungen gilt:

Satz 5: $\mathcal{G}$ sei ein regulärer *GDK*. In $\mathcal{G}$ ist $\Lambda_L = \Lambda_F$ und $\Lambda_l = \Lambda_f$. Der durch $\mathcal{U}_X\, x$ erzeugte Filter ist der gröbste in Λ_L nach x konvergierende Filter.

Man vgl. (5) Satz 5.8.

Es stellt sich die Frage, wann die Λ_l Gruppenlimitierungen (und damit Topologien) und wann die (G_X, Λ_l) auf den (X, Λ_L) stetig operieren.

Definition 8: Wir nennen den regulären *GDK* $\mathcal{G}$ einen allgemeinen Fréchet'schen Differentialkalkül oder *FDK*, wenn die Λ_l stets Gruppentopologien sind.

In (5), Satz 5. 14 werden die *FDK* durch Axiome charakterisiert. Ein *FDK* mit eindeutiger Differentiation ist in naheliegender Weise erklärt.

In einem *FDK* wirkt jeweils (G_X, Λ_l) auf (X, Λ_L) stetig. Λ_L ist Topologie.

Es sei möglich, in die Transformationsgruppen des regulären *GDK* $\mathcal{G}$ je eine Gruppenlimitierung Λ_a einzuführen, sodass in $\mathcal{F}(\mathfrak{G})$ in Λ_a die Differentiation lokal und die $\mathcal{F}(\mathfrak{G})$-differenzierbaren Abbildungen stetig sind. Entweder ist dann in allen Objekten $\Psi(\Lambda_a) = \Lambda_l$ oder aber stets $\Psi(\Lambda_a) = \Lambda_{ind}$.

Definition 9: Im ersten Fall nennen wir $\mathcal{G}$ zusammen mit den Λ_a einen verallgemeinerten *FDK* und schreiben $(\mathfrak{G}, \Lambda_a)$.

In verallgemeinerten *FDK's* kann man Limitierungen Λ in die Objekte einführen, sodass jeweils (G_X, Λ_a) auf (X, Λ) stetig wirkt, in Λ differenzierbare Abbildungen stetig sind und die Differentiation lokal ist. Dabei gilt:

$$\Psi(\Lambda) = \Lambda_L.$$

Betrachtet man alle *FDK* (*bzw.* verallgemeinerte *FDK*) mit gleichen Objekten, gleichen und gleich wirkenden Transformationsgruppen, für welche die Limitierungen Λ_l (*bzw.* Λ_a) übereinstimmen, so bilden diese unter dem Begriff der algebraischen Erweiterung einen vollständigen Verband, sofern die Objekte eine Menge bilden.

Für *GDK* ist diese Aussage im Allgemeinen falsch.

§ 4. Hohere Ableitungen

Wir beschränken uns hier auf die Behandlung zweiter Ableitungen in verallgemeinerten *FDK*. Eine vollständige Darstellung des ganzen Problemkreises findet sich in (5), Kapitel 6.
X, Y seien Objekte des verallgemeinerten *FDK* $(\mathcal{G}, \Lambda_a)$; ebenso sei dies $\mathfrak{A}_{\mathfrak{G}}(X, Y)$.

Definition 10: $f\colon X \to Y$ sei in jedem Punkt einer Λ_L-Umgebung U von $x \in X$ $\mathcal{G}$-differenzierbar.

Weiter existiere $\varphi\colon X \to \mathfrak{A}_{\mathfrak{G}}(X, Y)$ mit $\varphi \in \mathfrak{D}_{\mathfrak{G}^x}(X, \mathfrak{A}_{\mathfrak{G}}(X, Y))$, so dass in jedem $z \in U$ $\varphi(z) \in D_{\mathfrak{G}^z}(f)$ gilt.

Wir nennen dann f in x zweimal oder zweifach $\mathcal{G}$-differenzierbar.

Jede $\mathcal{G}$-Ableitung in x von jedem solchen φ nennen wir zweite $\mathcal{G}$-Ableitung von f in x.

Wo möglich lassen wir Indices und Beiwörter $\mathcal{G}$ weg.

Die Lokalität der zweifachen $\mathcal{G}$-Differentiation sei in Analogie zu Definition 3 erklärt. Dann gilt:

Nach (5), Satz 6.1. ist in Λ_L die zweifache $\mathcal{G}$-Differentiation genau dann lokal, wenn Λ_L Topologie ist.

Ist $\mathfrak{A}_{\mathfrak{G}}(X, Y)$ kein Objekt von $\mathcal{G}$, so entsteht die Aufgabe, es ohne Veränderung des Differenzierbarkeitsbegriffes in $\mathcal{G}$ aufzunehmen.

Auch im klassischen Zusammenhang stellt sich das Problem in dieser Weise:

Die gewöhnlich in $\mathfrak{L}(E, F)$, der Menge der stetigen linearen Abbildungen von E nach F eingeführte Topologie *bzw.* Limitierung ist nur ein Hilfsmittel hierzu. Sobald diese Topologie nicht mehr in kanonischer Weise existiert, wird die klassiche Theorie der höheren Ableitungen unbefriedigend.

Wir analysieren nun die Situation im Spezialfall des *FDK* $\mathcal{G}$ der klassischen Differentialrechnung in endlich dimensionalen reellen Vektorräumen, wo also stets $X = G_X$ gilt und die Wirkungsweise von G_X durch Addition erklärt ist.

E, F seien also zwei endlich-dimensionale, reelle Räume. $\mathfrak{A}(E, F)$ ist hier die Menge der linearen Abbildungen von E nach F. Offenbar ist auch $\mathfrak{A}(E, F)$ Objekt. $\mathcal{R}(E, F)$ ist in naheliegender Weise erklärt. Die Abbildung $f\colon E \to F$ sei nun der Einfachheit halber überall differenzierbar.

Ordnet man jedem $x \in E$ die Ableitung von f in x zu, so definiert dies eine Abbildung f' von E nach $\mathfrak{A}(E, F)$.
Die Abbildung f' sei in $x \in E$ differenzierbar. Es existieren also $B \in \mathfrak{A}(E, \mathfrak{A}(E, F))$ und $\varrho \in \mathfrak{R}(E, \mathfrak{A}(E, F))$, so dass für jedes $h \in E$ die folgende Entwicklung gilt:

$$f'(x+h) = Bh + \varrho(h) + f'(x)$$

$f'(x+h)$, Bh, $\varrho(h)$, $f'(x)$ sind Elemente aus $\mathfrak{A}(E, F)$; man kann sie auf jedes $k \in E$ anwenden und erhält:

$$f'(x+h)\,k = (Bh)\,k + \varrho(h)\,k + f'(x)\,k$$

Für alle $z \in E$ und $k \in E$ ist $f'(z)\,k$ Element von F. Man wird die Definition der zweiten Differenzierbarkeit nur dann als vernünftig betrachten, wenn die (hier natürlich erfüllte) Bedingung gilt:

Wenn f in x zweimal differenzierbar ist, so ist für jedes k die Abbildung $f'(z)\,k$ von E nach F in x differenzierbar. Damit muss folgende Entwicklung gelten:

$$f'(x+h)\,k = A_k(h) + r_k(h) + f'(x)\,k$$

Man verifiziert, dass A_k und r_k linear von k abhängen. Es folgt dann:

$$Bhk + \varrho(h)\,k = A_k(h) + r_k(h)$$

Sinnvollerweise wird man sogar die hier natürlich gegebene Gültigkeit der beiden folgenden Gleichungen erwarten:

$$Bhk = A_k(h)$$

$$\varrho(h)\,k = r_k(h)$$

Damit folgt:
Bhk ist bei fixiertem k Element von $\mathfrak{A}(E, F)$ (bei fixiertem h ist das ohnehin richtig), während $\varrho(h)\,k$ bei festem k zu $\mathfrak{R}(E, F)$ gehört.

Diese Betrachtungen verlieren in einem ADK, etc. jeden Sinn, wenn nicht $G_{\mathfrak{A}(X,Y)} \subset \mathfrak{A}(X, Y)$ ist.

Umgekehrt ermöglicht eine solche Inklusion erst, dass zweifache Differenzierbarkeit überhaupt etwas mit der Regularität einer Abbildung zu tun hat.
$(\mathcal{G}, A_a)$ sei ein (verallgemeinerter) FDK, X, Y, ... Objekte wie stets.

$\mathfrak{Z}_{\mathfrak{G}}(X, Y)$ sei die Menge aller $A \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{G}}(X, Y)$ für welche $A(G_X)$ im Zentrum von G_Y liegt.

$\mathfrak{Z}_{\mathfrak{G}}(X, Y)$ kann nicht leer sein.

Voraussetzung: 1). Unter den in üblicher Weise erklärten Operationen ist $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{G}}(X, Y)$ eine Gruppe.

2.) Für $A \in \mathfrak{Z}_{\mathfrak{G}}(X, Y)$, $B \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{G}}(X, Y)$ gilt für das Produkt AB:

$$AB \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{G}}(X, Y)$$

Diese Voraussetzungen seien bis zum Ende dieses Paragraphen erfüllt.

U, V, W seien Mengen, $\mathcal{F}(V, W)$ eine Menge von Abbildungen von V nach $W, f\colon U \to \mathcal{F}(V, W)$ eine Abbildung.
Für $u \in U, v \in V$ setzen wir

$$\widetilde{f}(u, v) = (f(u))(v) \in W$$

Hierdurch wird eine Abbildung von $U \times V$ nach W erklärt, welche wir die zu f assoziierte Abbildung nennen.
S_1 und S_2 seien Bedingungen, welche für Abbildungen von G_X nach $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{G}}(X, Y)$ sinnvoll sind, wo X und Y Objekte eines verallgemeinerten FDK $(\mathcal{G}, A_a)$ sind und die übrigen Bezeichnungen wie stets aufzufassen sind. S ist das Paar (S_1, S_2). Für Beispiele von S_1 und S_2 vgl. unten.

Definition 11: In $(\mathcal{G}, A_a)$ sind von X nach Y zweite Ableitungen S-kanonisch für $S = (S_1, S_2)$ erklärt, wenn gilt:

1.) $\mathfrak{A}_{\mathfrak{G}}(X, Y)$ ist Objekt von $\mathcal{G}$. Seine Transformationsgruppe ist $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{G}}(X, Y)$, das in natürlicher Weise wirkt.

2.) Die Abbildung $A : G_X \to \mathfrak{Z}_{\mathfrak{G}}(X, Y)$ gehört zu $\mathfrak{A}_{\mathfrak{G}}(X, \mathfrak{A}_{\mathfrak{G}}(X, Y))$, wenn es die Bedingung S_1 erfüllt und wenn die assoziierte Abbildung $\widetilde{A} : G_X \times G_X \to G_Y$ in jedem Argument Element von $\mathfrak{A}_{\mathfrak{G}}(X, Y)$ ist.

3.) Die Abbildung $r : G_X \to \mathfrak{Z}_{\mathfrak{G}}(X, Y)$ ist genau dann Element von $\mathcal{R}_{\mathfrak{G}}(X, \mathfrak{A}_{\mathfrak{G}}(X, Y))$, wenn es die Bedingung S_2 erfüllt und wenn die assoziierte Abbildung $\widetilde{r}$ von $G_X \times G_X \to G_Y$ im ersten Argument Element von $\mathcal{R}_{\mathfrak{G}}(X, Y)$ ist.

Die S-Bedingung $S = (S_1, S_2)$ ist vor allem zur Sicherung von Stetigkeiten wichtig.

Wir nennen Beispiele von S-Bedingungen:

1.) $S_1 = S_2$ heisse Stetigkeit im Neutralelement, wenn $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{G}}(X, Y)$ mit der sogenannten Limitierung der stetigen Konvergenz bzgl. der Λ_a in G_X und G_Y ausgerüstet ist.

2.) S_1 für eine Abbildung A: $G_X \to \mathfrak{Z}_{\mathfrak{G}}(X, Y)$ heisse: Für alle Objekte U von $\mathcal{G}$ und alle $C, E \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{G}}(U, X)$ und alle $r, \varrho \in \mathcal{R}_{\mathfrak{G}}(U, X)$ ist $(A\,(C\,g\,.\,r(g)))\,(E\,g\,\varrho\,(g))$ als Funktion in $g \in G_U$ Element von $\mathcal{R}_{\mathfrak{G}}(U, Y)$.
Im Fall $U = X$ bleibe diese Aussage richtig, wenn man $(Cg\,.\,r(g))$ *bzw.* $Eg\,.\,\varrho(g)$ *bzw.* beide durch g ersetzt.
S_2 stimme mit S_1 überein.
Die Bedingung heisst so etwas wie «quadratische Abbildungen» haben Ableitung 0 im Neutralelement:

3.) S_1 bedeute gleichzeitiges Gelten von den Bedingungen
S_1 in 1.) und in 2.).
S_2 stimme mit S_1 überein.

Es sind noch andere Beispiele denkbar. Man überlege sich insbesondere, zu was für einer S-Bedingung in der klassischen Differentialrechnung höhere Ableitungen S-kanonisch erklärt sind.

Definition 11 ermöglicht nun, die Mengen $\mathfrak{A}_{\mathfrak{G}}(X, Y)$ in einem anschaulichen Sinne an $\mathcal{G}$ zu adjungieren *d.h.* zweite (und dann anschliessend höhere) Ableitungen einzuführen.

Sind in einem verallgemeinerten *FDK* $(\mathcal{G}, \Lambda_a)$ zwischen keinen zwei Objekten zweite Ableitungen erklärt, so kann man *z. B.* für die obige S-Bedingung 1.) *bzw.* 3.) zweite Ableitungen zwischen beliebigen Objekten S-kanonisch einführen.
Dies gilt entsprechend für die hier nicht betrachteten höhern Ableitungen.

Unter einer kleinen Zusatzvoraussetzung ist im Falle der obigen S-Bedingung 3.) die Komposition 2-fach differenzierbarer Abbildungen wieder 2-fach differenzierbar (vgl. (5), Satz 6.2). Diese Aussage ist natürlich auch für die hier nicht betrachteten höhern Ableitungen richtig.

§ 5. Schlussbemerkungen

In (5) werden noch partielle Ableitungen, Differentialgleichungen und Mannigfaltigkeiten betrachtet, auf deren Behandlung wir hier nicht eingehen können.

Die Entwicklung der wichtigsten Begriffe und die Lösung der rein technischen Fragen kann im Wesentlichen als abgeschlossen betrachtet werden. Im Grossen und Ganzen liegt unserm Vorgehen eine weitgehende Zwangsläufigkeit zu Grunde. Wenn Differentialrechnung überhaupt verallgemeinert werden soll, dann muss es sicher in dem Sinn geschehen, wie wir es getan haben.

Unserer Ansicht nach ergibt bereits diese Zwangsläufigkeit eine genügende Motivation für unser Unternehmen.

Natürlich kann man sich auch auf den verständlichen, aber nicht unbedingt fruchtbaren Standpunkt stellen, eine solche Entwicklung verdiene erst Interesse, wenn sie ihre Brauchbarkeit gezeigt habe, etwa dadurch, dass mit ihrer Hilfe ein noch offenes Problem gelöst wird. Dies können wir im Augenblick nicht bieten, obschon wir handfeste Gründe zur Annahme haben, dass sich unsere Theorie als nützlich erweisen wird. Aber leider ist für uns ein weiteres Forschen auf diesem Gebiet nur in sehr beschränktem Umfang möglich.

Wir schliessen nun mit einem kleinen Beispiel ab (vgl. (5), Kap. 8, Abschnitt B, Beispiel 3):

G sei eine Gruppe. Wir betrachten die Menge aller GDK $\mathcal{G}$, welche G als einziges Objekt haben; dabei sei G noch selbst die zugehörige Transformationsgruppe und wirke durch Multiplikation von Links.

Diese Menge bildet unter dem Begriff der algebraischen Erweiterung einen vollständigen Verband $X(G)$. Dasselbe gilt für die Teilmenge $W(G)$ von $X(G)$, die alle GDK $\mathcal{G}$ enthält, für welche $\mathfrak{A}_{\mathfrak{G}}(G, G)$ nur aus einem einzigen Element besteht.

$W(G)$ kann man nun in natürlicher Weise als kontravarianten Funktor von der Kategorie der Gruppen in diejenige der Verbände betrachten.

Für isomorphe Gruppen G und G' folgt *u.a.* damit
$W(G) \cong W(G')$ (was auch an sich klar ist).

$L(G)$ sei der zu G gehörige Verband der Untergruppen. In bekannter Weise kann auch L als kontravarianter Funktor betrachtet werden. Von L nach W existiert dann eine natürliche Transformation, welche L in W einbettet.

G ist natürlich genau dann endlich, wenn $W(G)$ dies ist, was wir jetzt voraussetzen wollen:

Dann folgt aus $W(G) \cong W(G')$:

1.) G und G' haben gleiche Ordnung

2.) Von $L(G)$ nach $L(G')$ existiert ein Verbandsisomorphismus, der Untergruppen von G in solche von G' mit gleicher Ordnung überführt.

3.) Sind G und G' abel'sch, so folgt $G \cong G'$ Wir nehmen an, dass 3.) allgemein gilt.

LITERATURVERZEICHNIS

(1) A. FRÖHLICHER, W. BUCHER: *Calculus in Vector Spaces without Norm.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 30; Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York

(2) H.H. KELLER: *Differenzierbarkeit in topologischen Vektorräumen.* Comm. Math. Helv. 38, 1964

(3) E. BINZ: *Ein Differenzierbarkeitsbegriff in limitierten Vektorräumen.* Comm. Math. Helv. 41, 1966/67

(4) M. WEHRLI: *Differentialrechnung in allg.* linearen Räumen. Rend. Circ. Mat. Palermo, Serie II, Tomo 17, 1968

(5) M. Wehrli: *Axiomatische Differentialrechnung Unveröffentlichtes Manuskript*

(6) P. HALMOS: *Measure theory.* D. van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey, 1950

(7) H.R. FISCHER: *Limesräume.* Math. Ann. 137, 1959