TOPOLOGIA GRASSMANIANA SOBRE LOS IDEALES CERRADOS DE CODIMENSION FINITA DE UN ALGEBRA DE BANACH CONMUTATIVA

por

JOAQUÍN M.ª ORTEGA ARAMBURU

INTRODUCCION

Glaeser en su artículo «L'interpolation des fonctions differentiables de plusieurs variables» (2), en el contexto de construir un cálculo diferencial multipuntual, introduce en el conjunto de los ideales cerrados de codimensión n de $C^r(K, R)$, K cubo compacto de un espacio euclídeo y $n \leqslant r + 1$, una topología que hace del mismo un espacio compacto. La construcción se hace utilizando, en forma esencial, un sistema de coordenadas sobre el espacio euclídeo.

El objeto de esta nota es el de dar una construcción natural de una topología para el conjunto de los ideales cerrados de codimensión n de un álgebra de Banach conmutativa, dando una condición necesaria y suficiente para que el mismo sea compacto. En el caso del álgebra $C^r(K, R)$ se obtendrá la topología mencionada (2). En el caso de los ideales de codimensión 1 da lugar al espectro de Gelfand. Si el álgebra es topológicamente finito generada existe una inmersión del mismo en un espacio proyectivo de dimensión adecuada, que, en el caso de codimensión 1 lleva a la conocida inmersión en un espacio afín de dimensión la del número de generadores topológicos.

Introducción de una topología grassmaniana sobre el conjunto de los ideales cerrados de codimensión n de un álgebra de Banach conmutativa

Sea A un álgebra de Banach conmutativa, con elemento unidad, sobre el cuerpo real o complejo. Sea X el conjunto de los ideales cerrados de A de codimensión n. Si a A' lo dotamos en forma natural de estructura de A-módulo $(aw)(x) = w(ax)$, la correspondencia que asocia a cada I de X, su incidente $I^{\perp} \subset A'$, que es un espacio de dimensión n, es una biyección de X sobre el conjunto de los subespacios invariantes de A' de dimensión n.

Vamos a dotar al espacio X de una topología mediante una construcción análoga a la utilizada para la definición de coordenadas grassmanianas de subespacios vectoriales de espacios vectoriales de dimensión finita.

Denotemos por $E = \mathcal{L}(A x \overset{n}{\dots} x A, C)$ el espacio de aplicaciones multilineales contínuas de $A x \overset{n}{\dots} x A$ en el cuerpo de escalares;

$\mathcal{A}(A x \dots x A, C)$ el subespacio del anterior de las que sean alternadas.

$\mathcal{L}(A x \overset{n}{\dots} x A, C)$ es isomorfo a $L(A \underset{\pi}{\otimes} \overset{n}{\dots} \underset{\pi}{\otimes} A, C)$ y la topología débil de este último coincide con la de la convergencia puntual en $\mathcal{L}(A x \overset{n}{\dots} x A, C)$. Denotemos por $\mathcal{B}$ la bola unidad, cerrada que es débilmente compacta en $L(A \underset{\pi}{\otimes} \overset{n}{\dots} \underset{\pi}{\otimes} A, C)$. Observamos que la proyectivización de $E \sim \{0\}$, y por tanto la de $\mathcal{B} \sim \{0\}$, con las respectivas topologías cociente (que denotaremos respectivamente $\pi(E)$ y $\pi(\mathcal{B})$) es un espacio de Hausdorff. En efecto, si $\langle w \rangle$ y $\langle \theta \rangle$ son dos puntos de $\pi(E)$ distintos, los elementos w y θ admiten entornos débiles saturados disjuntos; por ejemplo

$$\{\overline{w} \neq 0\,;\ \overline{w}(x_1) > 0,\ \overline{w}(x_2) < 0\} \cup \{\overline{w} \neq 0\,;\ \overline{w}(x_1) < 0,\ \overline{w}(x_2) > 0\}$$

$$\text{y}\ \ \{\overline{w} \neq 0\,;\ \overline{w}(x_1) < 0,\ \overline{w}(x_2) < 0\} \cup \{\overline{w} \neq 0\,;\ \overline{w}(x_1) > 0,\ \overline{w}(x_2) > 0\}$$

donde $w(x_1)$ y $\theta(x_1)$ tienen distinto signo y $w(x_2)$ tiene distinto signo que $-\theta(x_2)$.

La aplicación identidad $\pi(\mathcal{B}) \to \pi(E)$ es trivialmente contínua. Sea I de X y sea $w_1, \dots, w_n$ una base de $I^{\perp} \subset A'$; le podemos hacer corresponder un elemento de $\pi(E)$ de representante $w_1 \wedge \dots \wedge w_n$ que denotaremos $\langle w_1 \wedge \dots \wedge w_n \rangle$; es decir

$$w_1 \wedge \dots \wedge w_n (a_1, \dots, a_n) = H (w_1 \otimes \dots \otimes w_n) (a_1, \dots, a_n)$$

donde H significa la hemisimetrización del tensor $w_1 \otimes \dots \otimes w_n$.

Es inmediato observar que el elemento $\langle w_1 \wedge \dots \wedge w_n \rangle$ es independiente de la base de I y que la aplicación de X en $\pi(E)$ es inyectiva. El ideal I puede reencontrarse a partir de $\langle w_1 \wedge \dots \wedge w_n \rangle$ como el conjunto de los elementos x de A tales que

$$w_1 \wedge \dots \wedge w_n (x, v_2, \dots, v_n) = 0 \quad \text{para todo} \quad v_2, \dots v_n \quad \text{de } A.$$

Definición

Llamaremos topología grassmaniana sobre X a la topología inducida sobre X por $\pi(B)$.

Es más cómodo tomar la topología inducida por la cociente de $B - \{0\}$ que la de E, puesto que $B - \{0\}$ es localmente compacto. Por otra parte si se verifica la condición que posteriormente impondremos, condición necesaria y suficiente para que X con la topología grassmaniana sea compacto, entonces automáticamente la topología de X coincidirá con la inducida por $\pi(E)$.

Vamos a dar dos proposiciones que caracterizan los elementos de $\pi(\mathcal{A}(A \overset{n}{x \dots x} A, C)) \subset \pi(E)$ que son imágenes de los elementos de X; lo que permitirá estudiar la compacidad de la topología grassmaniana.

Proposición 1

Un punto $\langle W \rangle \in \pi(\mathcal{A}(A \overset{n}{x \dots x} A, C))$ proviene de un subespacio de A' de dimensión n si y sólo si para todo $e_1, \dots, e_n, v_1, \dots, v_n$ de A se verifica:

$$W(e_1, \dots, e_n) W(v_1, \dots, v_n) =$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{n} W(e_1, \dots, e_{s-1}, v_\lambda, e_{s+1}, \dots, e_n) W(v_1, \dots, v_{\lambda-1}, e_s, v_{\lambda+1}, \dots, v_n).$$

De hecho este teorema es el análogo al que nos expresa las relaciones cuadráticas que verifican las coordenadas grassmanianas de un subespacio de un espacio de dimensión finita.

Supongamos que $W = w_1 \wedge \dots \wedge w_n$, y sea el subespacio de A engendrado por $e_1, \dots, e_n, v_1, \dots, v_n$. Consideremos la restricción de W al producto cartesiano de n veces este subespacio. La demostración de que se verifican las relaciones cuadráticas se reduce entonces al caso de espacios de dimensión finita (3).

Recíprocamente supongamos que W verifica las condiciones del enunciado.

Consideremos $e_1, \dots, e_n$ tales que $W(e_1, \dots, e_n) = 1$ y sean los elementos de A'

$$w_i(x) = W(e_1, \dots, e_{i-1}, x, e_{i+1}, \dots, e_n)$$

Se trata de ver que $W = w_1 \wedge \dots \wedge w_n$.

Desde luego se verifica $w_i(e_j) = \delta_{ij}$, de donde:

$$W(e_1, \dots, e_n) = w_1 \wedge \dots \wedge w_n(e_1, \dots, e_n)$$

Si sustituimos uno de los $e_1, \dots, e_n$, por $v \in A$, se verifica:

$$W(v, e_2, \dots, e_n) = w_1(v) = w_1 \wedge \dots \wedge w_n(v, e_2, \dots, e_n)$$

Probemos por inducción sobre t que:

$$W(v_1, \dots, v_t, e_{t+1}, \dots, e_n) = w_1 \wedge \dots \wedge w_n(v_1, \dots, v_t, e_{t+1}, \dots, e_n)$$

Apliquemos las relaciones de la hipótesis a $e_1, \dots, e_n, v_1, \dots, v_t, e_{t+1}, \dots, e_n$ para $s = t$:

$$W(e_1, \dots, e_n)\, W(v_1, \dots, v_t, e_{t+1}, \dots, e_n) = \sum_{\lambda=1}^{t} W(e_1, \dots, e_{t-1}, v_\lambda, e_{t+1}, \dots, e_n) \cdot$$
$$W(v_1, \dots, v_{\lambda-1}, e_t, v_{\lambda+1}, \dots, v_t, e_{t+1}, \dots, e_n)$$

Aplicando la hipótesis de inducción y el teorema directo, tenemos que la expresión anterior es igual a

$$w_1 \wedge \dots \wedge w_n(v_1, \dots, v_t, e_{t+1}, \dots, e_n)$$

y por ser $W(e_1, \dots, e_n) = 1$ se sigue lo que queríamos demostrar.

Proposición 2

Sea $\langle W \rangle \in \pi (\mathcal{A} (A \overset{n}{x \dots x} A, C)$ un punto correspondiente a un subespacio de dimensión n de A'; dicho subespacio es invariante si y sólo si, tomando $e_1, \dots, e_n$ con $W (e_1, \dots, e_n) = 1$, para cada a de A existen λ_{ij} de C tales que

$$W (e_1, \dots, e_{i-1}, ax, e_{i+1}, \dots, e_n) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} W (e_1, \dots, e_{j-1}, x, e_{j+1}, \dots, e_n)$$

para todo x de A.

En efecto, es la traducción inmediata de $aw_i = \sum_j \lambda_{ij} w_j$, para $w_i (x) = W (e_1, \dots, e_{i-1}, x, e_{i+1} \dots, e_n)$. Obsérvese que las λ_{ij} dependen de a y de W.

Proposición 3

El espacio X con la topología grassmaniana es un espacio compacto si y sólo si existen un número finito de elementos de $A \overset{n}{x \dots x} A$, $e^i = (e_1^i, \dots, e_n^i)$, tales que para cada W con $\langle W \rangle$ de la imagen de X en $\pi (\mathcal{B})$ existe algún e^i con $| W (e^i) | \geqslant || W ||$, donde $|| W ||$ es la norma natural de W en $(A \underset{\pi}{\otimes} \overset{n}{\dots} \underset{\pi}{\otimes} A)'$.

Obsérvese que la condición anterior no depende de la particular norma si inducen la misma topología en $(A \underset{\pi}{\otimes} \overset{n}{\dots} \underset{\pi}{\otimes} A)'$. La condición equivale a decir que existe un entorno débil abierto de 0, U en E' tal que cada elemento de la imagen de X en $\pi (\mathcal{B})$ tiene algún representante en $\mathcal{B} \sim U$. En efecto, podemos suponer sin pérdida de generalidad que el entorno viene dado por un número finito de e^i y esta última condición dice que para cada $\langle W \rangle$ de la imagen de X existe un λ con $|| \lambda W || \leqslant 1$ y $| \lambda W (e^i)| \geqslant 1$.

Demostremos la parte directa del teorema. $\mathcal{B} \sim U$ es un compacto. Consideremos la aplicación $\bar{\pi}$ restricción de la proyectivización a $\mathcal{B} \sim U$, y sea $\bar{\pi}^{-1} (X)$, donde X lo consideramos ya inyectado en $\pi (\mathcal{B})$.

Probemos que $\bar{\pi}^{-1} (X)$ es un cerrado de $\mathcal{B} \sim U$ con lo que será compacto. La imagen por $\bar{\pi}$ será un compacto que es precisamente X.

Sea entonces W de $\mathcal{B} \sim U$ adherente a $\bar{\pi}^{-1}(X)$. Veamos, en primer lugar, que W es una aplicación multilineal alternada.

Dados $e_1, ..., e_n$ de A, y $\varepsilon > 0$, existe un θ de $\bar{\pi}^{-1}(X)$ con:

$$|W(e_1, ..., e_i, e_{i+1} ..., e_n) - \theta(e_1, ..., e_i, e_{i+1}, ..., e_n)| < \varepsilon$$
$$|W(e_1, ..., e_{i+1}, e_i, ..., e_n) - \theta(e_1, ..., e_{i+1}, e_i, ..., e_n)| < \varepsilon$$

Puesto que los elementos de $\bar{\pi}^{-1}(X)$ son aplicaciones alternadas se sigue que:

$$|W(e_1 \; ... \; e_{i+1}, e_i \; ..., e_n) + W(e_1 \; ..., e_i, e_{i+1}, ..., e_n)| < 2\varepsilon$$

y puesto que la relación es válida para cada ε se verifica que W es alternada.

Veamos que W proviene de un subespacio de A de codimensión n. Se deberán verificar las condiciones de la proposición 1.

Fijados $e_1, ..., e_n, v_1, ..., v_n$ de A y $\varepsilon > 0$, existe $\theta \in \bar{\pi}^{-1}(X)$ que verifica:

$$|W(e_1, ..., e_n) - \theta(e_1, ..., e_n)| < \varepsilon$$
$$|W(v_1, ..., v_n) - \theta(v_1, ..., v_n)| < \varepsilon$$
$$|W(e_1, ..., e_{s-1}, v_\lambda, e_{s+1}, ..., e_n) - \theta(e_1, ..., e_{s-1}, v_\lambda, e_{s+1}, ..., e_n)| < \varepsilon$$
$$|W(v_1, ..., v_{\lambda-1}, e_s, v_{\lambda+1}, ..., v_n) - \theta(v_1, ..., v_{\lambda-1} \; e_s, v_{\lambda+1}, ..., v_n| < \varepsilon$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} |W(e_1, ..., e_n) W(v_1, ..., v_n) - \theta(e_1, ..., e_n) \theta(v_1, ..., v_n)| &\leqslant \\ \leqslant |W(e_1, ..., e_n) - \theta(e_1, ..., e_n)| \, |W(v_1, ..., v_n)| &+ \\ + |W(e_1, ..., v_n) - \theta(v_1, ..., v_n)| \, |\theta(e_1, ..., e_n)| &\leqslant \\ \leqslant \varepsilon |W(v_1, ..., v_n)| + \varepsilon ||e_1 \otimes ... \otimes e_n|| & \end{aligned}$$

y expresiones análogas para:

$$\begin{aligned} &| W(e_1, ..., e_{s-1}, v_\lambda, e_{s+1}, ..., e_n) W(v_1, ..., v_{\lambda-1}, e_s, v_{\lambda+1}, ..., v_n) - \\ &- \theta(e_1, ..., e_{s-1}, v_\lambda, e_{s+1}, ..., e_n) \theta(v_1, ..., v_{\lambda-1}, e_s, v_{\lambda+1}, ..., v_n)| \end{aligned}$$

Se deduce de aquí que:

$$|W(e_1, \ldots, e_n)\, W(v_1, \ldots, v_n) - \sum_{\lambda=1}^{n} W(e_1, \ldots, e_{s-1}, v_\lambda, e_{s+1}, \ldots, e_n) \cdot$$
$$\cdot W(v_1, \ldots, v_{\lambda-1}, e_s, v_{\lambda+1}, \ldots, v_n)| < \varepsilon K$$

donde K es fijo, y esto es válido para todo ε, de donde W corresponde a un subespacio de A' de dimensión n.

Veamos que W proviene de un ideal, es decir que verifica las condiciones de la proposición 2.

Consideremos $e_1, \ldots, e_n$ tales que $W(e_1, \ldots, e_n) = 1$, y sea a de A; llamemos

$$\lambda_{ik} = W(e_1, \ldots, e_{i-1}, ae_k, e_{i+1}, \ldots, e_n)$$

Se trata de probar que

$$W(e_1, \ldots, e_{i-1}, ax, e_{i+1}, \ldots, e_n) = \sum_{i} \lambda_{ij}\, W(e_1, \ldots, e_{j-1}, x, e_{j+1}, \ldots, e_n).$$

Consideremos $\theta \in \bar{\pi}^{-1}(X)$ con:

$$|W(e_1, \ldots, e_{i-1}, ae_k, e_{i+1}, \ldots, e_n) - \theta(e_1, \ldots, e_{i-1}, ae_k, e_{i+1}, \ldots, e_n)| < \varepsilon$$
$$|W(e_1, \ldots, e_n) - \theta(e_1, \ldots, e_n)| < \varepsilon < \tfrac{1}{2}$$
$$|W(e_1, \ldots, e_{i-1}, ax, e_{i+1}, \ldots, e_n) - \theta(e_1, \ldots, e_{i-1}, ax, e_{i+1}, \ldots, e_n)| < \varepsilon$$
$$|W(e_1, \ldots, e_{j-1}, x, e_{j+1}, \ldots, e_n) - \theta(e_1, \ldots, e_{j-1}, x, e_{j+1}, \ldots, e_n)| < \varepsilon$$

Se verifica:

$$\left| W(e_1, \ldots, e_{i-1}, ae_k, e_{i+1}, \ldots, e_n) - \frac{\theta(e_1, \ldots, e_{i-1}, ae_k, e_{i+1}, \ldots, e_n)}{\theta(e_1, \ldots, e_n)} \right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|W(e_1, \ldots, e_{i-1}, ae_k, e_{i+1}, \ldots, e_n)\, \theta(e_1, \ldots, e_n) - \theta(e_1, \ldots, e_{i-1}, ae_k, e_{i+1}, \ldots, e_n)|}{|\theta(e_1, \ldots, e_n)|} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{|\theta(e_1, \ldots, e_n)|} (|1 - \theta(e_1, \ldots, e_n)|\, |W(e_1, \ldots, e_{i-1}, ae_k, e_{i+1}, \ldots, e_n)| +$$
$$+ |W(e_1, \ldots, e_{i-1}, ae_k, e_{i+1}, \ldots, e_n) - \theta(e_1, \ldots, e_{i-1}, ae_k, e_{i+1}, \ldots, e_n)|) \leqslant$$
$$\leqslant 2(\varepsilon\, |W(e_1, \ldots, e_{i-1}, ae_k, e_{i+1}, \ldots, e_n)| + \varepsilon) = \varepsilon k.$$

Obsérvese, por otra parte, que:

$$\theta(e_1, \ldots, e_{i-1}, ax, e_{i+1}, \ldots, e_n) = \sum_{j} \lambda_{ij}(\theta)\, \theta(e_1, \ldots, e_{j-1}, x, e_{j+1}, \ldots, e_n)$$

para todo x. Haciendo entonces $x = e_k$, obtenemos:

$$\lambda_{ij}(\theta) = \frac{\theta(e_1, \ldots, e_{i-1}, a e_k, e_{i+1}, \ldots, e_n)}{\theta(e_1, \ldots, e_n)}$$

luego las relaciones anteriores expresan

$$|\lambda_{ik} - \lambda_{ik}(\theta)| < \varepsilon\, k.$$

Tendremos entonces:

$$|\lambda_{ij} W(e_1, \ldots, e_{j-1}, x, e_{j+1}, \ldots, e_n) - \lambda_{ij}(\theta)\, \theta(e_1, \ldots, e_{j-1}, x, e_{j+1}, \ldots, e_n)| \leqslant$$
$$\leqslant \lambda_{ij}\, |W(e_1, \ldots, e_{j-1}, x, e_{j+1}, \ldots, e_n) - \theta(e_1, \ldots, e_{j-1}, x, e_{j+1}, \ldots, e_n)| +$$
$$+ |\theta(e_1, \ldots, e_{j-1}, x, e_{j+1}, \ldots, e_n)|\, |\lambda_{ij}(\theta) - \lambda_{ij}| < \varepsilon\, k_1$$

De aquí se sigue:

$$|W(e_1, \ldots, e_{i-1}, ax, e_{i+1}, \ldots, e_n) - \Sigma \lambda_{ij} W(e_1, \ldots, e_{j-1}, x, e_{j+1}, \ldots, e_n)| < \varepsilon\, k_2$$

y como es válido para todo ε se sigue la igualdad.

Esto acaba la demostración directa.

Recíprocamente, supongamos que no se verifica la condición. Existe un conjunto fundamental de entornos U_i de 0 y para cada uno de ellos un punto $\langle W_i \rangle$ tales que los únicos representantes de éstos en la bola unidad están en U_i; sean, por ejemplo, W_{u_i}. La proyectivización de esta sucesión generalizada $\langle W_{u_i} \rangle$ no tiene punto de acumulación pues si $\langle \theta \rangle$ lo fuese en cada entorno débil de $\theta \in \mathcal{B}$ y cada U_i debería existir algún representante de algún W_{u_j} con $U_j \subset U_i$. Tomando el entorno de θ y U_i disjuntos llegamos a contradicción. Luego X no es compacto para la topología grassmaniana.

Ejemplo 1

Sea A un álgebra de Banach y consideremos los ideales de codimensión 1. El elemento unidad sirve para verificar la condición de la proposición 3. Se cumple que para todo $w \in A'$ correspondiente a un ideal de codimensión 1, $|w(e)| = \|w\|$ y el espectro, que es el de Gelfand, es naturalmente compacto.

Para las álgebras de Banach regulares se tiene la siguiente proposición:

Proposición 4

Sea A un álgebra de Banach sobre C, semisimple, regular, cuyo espectro de Gelfand sea K y cuyo conjunto de ideales de codimensión n con la topología grassmaniana sea X. La aplicación definida sobre el subespacio de $K x \overset{n}{\ldots} x K$ formado por las n-plas de puntos distintos de K que asocia a $(x_1, \ldots, x_n)$ el punto $\langle \delta_{x_1} \wedge \ldots \wedge \delta_{x_n} \rangle$ establece un homeomorfismo del mismo con su imagen.

En efecto la aplicación definida es continua pues puede factorizar en las aplicaciones

$$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto 1/n!\ \delta_{x_1} \wedge \ldots \wedge \delta_{x_n} \longmapsto \langle \delta_{x_1} \wedge \ldots \wedge \delta_{x_n} \rangle$$

con $1/n!\ \delta_{x_1} \wedge \ldots \wedge \delta_{x_n} \in B$ y ambas son contínuas.

Puesto que la aplicación es evidentemente inyectiva basta comprobar que la aplicación inversa es continua.

Sean $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$ entornos disjuntos de $x_1, \ldots, x_n$ respectivamente. Sea $a_i \in A$ que tome el valor 0 en $\complement\, U_{x_i}$ y 1 en x_i. Entonces

$$(\delta_{x_1} \wedge \ldots \wedge \delta_{x_n})\,(a_1, \ldots, a_n) = 1.$$

Consideremos el entorno de $\langle \delta_{x_1} \wedge \ldots \wedge \delta_{x_n} \rangle$ formado por aquellos $\langle \delta_{y_1} \wedge \ldots \wedge \delta_{y_n} \rangle$ tales que para algún λ verifican que:

$$|\lambda\,(\delta_{y_1} \wedge \ldots \wedge \delta_{y_n})\,(a_1, \ldots, a_n) - (\delta_{x_1} \wedge \ldots \wedge \delta_{x_n})\,(a_1, \ldots, a_n)| < \tfrac{1}{2}$$

Entonces $(\delta_{y_1} \wedge \ldots \wedge \delta_{y_n})\,(a_1, \ldots, a_n)$ debe ser no nulo, luego cada y_i estará en algún U_{x_j}. Esto acaba la demostración.

Ejemplo 2

Sea A el álgebra de todas las funciones continuas sobre un comparto K dotado de la topología de la convergencia uniforme. Los ideales cerrados de codimensión n están formados por las funciones nulas en n puntos distintos. Según la proposición 4, X con la topología grassmaniana es homeomorfo al subespacio de $K x \overset{n}{\ldots} x K$ formado por las n-plas de puntos distintos que, en general, no es compacto. Si $n > 1$ no se verificará en este caso la condición de la proposición 3.

Ejemplo 3

Sea A el álgebra $C^r(K, R)$ con K cubo compacto de R^n. Haciendo uso de la teoría de los esquemas de interpolación de Glaeser (2) para cada ideal cerrado I de codimensión N ($N \leqslant r + 1$) existe un proyector $S_I : C^r(K, R) \rightarrow P_N$, donde P_N son los polinomios en n variables de grado menor o igual a N, tal que para $f \in C^r(K, R)$ $f - S_I(f) \in I$ y el conjunto S_I es equicontínuo es decir existe un k tal que $\|S_J(f)\|_K^r \leqslant k \|f\|_K^r$ con k independiente de S_J. En particular los coeficientes de $S_J(f)$ son en módulo menores o iguales que $k \|f\|_K^r$.

Sea entonces $W = \langle w_1 \wedge \ldots \wedge w_n \rangle$ correspondiente al ideal $J \in X$:

$$|W(f_1 \ldots, f)| = |W(S_J(f_1), \ldots, S_J(f_n))| \leqslant$$
$$\leqslant k^n \|f_1\|_K^r \ldots \|f_n\|_K^r k_1 \; (\mathrm{Sup} \; |W(e^i)|)$$

donde $e^i = (e_1^i, \ldots, e_n^i)$ recorren las n-plas de elementos de la base de P_N formada por los monomios $x_1^{j_1} \ldots x_n^{j_n}$.

Expresiones de un tipo análogo encontraremos al aplicar W a elementos de la forma $\Sigma \lambda_{i_1, \ldots, i_n} f_{i_1} \otimes \ldots \otimes f_{i_n}$, de donde:

$\|W\| \leqslant k^n k_1$ (Sup $|W(e^i)|$), luego esta álgebra cumple las condiciones de la proposición 3 y por tanto X con la topología grassmaniana es un espacio compacto.

Para el caso de ser K un intervalo de R sería suficiente el uso de las fórmulas de interpolación de Lagrange para llegar al mismo resultado.

Inmersión del espectro en un espacio proyectivo en el caso de álgebras topológicamente finito generadas.

En primer lugar hagamos algunas observaciones sobre la estructura de A/I, donde A es un álgebra de Banach sobre C e I es un ideal cerrado de codimensión n. $A/I = \bar{A}$ es un anillo artiniano, luego tiene sólo un número finito de ideales maximales, de donde I está contenido en sólo un número finito de ideales maximales. Se tiene que $I \subset m_1 \cap \ldots \cap m_\alpha$. En todo anillo de Artin el radical es nilpotente. De aquí que $(m_1 \cap \ldots \cap m_\alpha)^k \subset I$ para algún k.

Los ideales m_i^k $i = 1, \ldots, \alpha$ son primos entre sí de donde $\cap m_i^k =$

$= \Pi m_i^k \subset (m_1 \cap \ldots \cap m_\alpha)^k \subset I$ y análogamente $\overline{\Pi m_i^k} = \bigcap \overline{m_i^k} \supset \overline{\bigcap m_i^k}$ pero $\Pi \overline{m_i^k} \subset \overline{\Pi m_i^k} \subset \bigcap \overline{m_i^k}$ de donde todos estos términos coinciden y están contenidos en I.

La aplicación natural $\widetilde{A} \to \prod_1^\alpha \widetilde{A} / \widetilde{m}_i^k$ es un isomorfismo y $\widetilde{A} / \widetilde{m}_i^k = A / (I + m_i^k)$ son anillos de Artin locales, y álgebras de Banach. Del lema de Nakayama se deduce que la cadena de potencias del ideal maximal $\widetilde{m}_i / \widetilde{m}_i^k$ en $\widetilde{A} / \widetilde{m}_i^k$ debe ser a lo sumo de longitud la dimensión de $\widetilde{A} / \widetilde{m}_i^k$. De aquí que podemos tomar k_i con: $A / I \simeq \Pi A / (I + m_i^{k_i})$ con $\sum_{i=1}^{a} k_i \leqslant n = \dim A / I$ y se verifica $\overline{m_1^{k_1} \cap \ldots \cap m_\alpha^{k_\alpha}} \subset I$.

Supondremos a partir de ahora que A está topológicamente finito generada por $x_1, \ldots, x_\gamma$. Las dos proposiciones siguientes son enunciadas por Glaeser (2) para el álgebra $C^r(K)$.

Proposición 5

Sea P_{n-1} los elementos de A expresables polinómicamente en $x_1, \ldots, x_\gamma$ hasta el grado $n - 1$. Se verifica que si I es un ideal cerrado de codimensión n, $P_{n-1} + I = A$.

Será suficiente probar, tras las observaciones anteriores, que $P_{n-1} + \overline{m_1^{k_1} \cap \ldots \cap m_\alpha^{k_\alpha}} = A$ para $\Sigma k_i \leqslant n$.

La demostración se hará por recurrencia sobre el número de ideales maximales que contienen a I.

Sea dicho número uno, sea m y sea $k \leqslant n$.

Veamos que $\overline{m^s} / \overline{m^{s+1}}$ está generado como espacio vectorial por $\prod_{i=1}^{s} \overline{(x_{j_i} - x_{j_i}(m))}$.

En efecto, veámoslo en primer lugar para $m / \overline{m^2}$. El espacio engendrado es siempre finito generado, luego cerrado. Hay que ver que es denso. Sea f de m, existe una sucesión de expresiones polinómicas P_j tales que $\|f - P_j\| \to 0$, donde puede suponerse que $P_j(m) = 0$ pues si previamente no lo es sustituyendo P_j por $P_j - P_j(m)$ también se verifica la relación $\|f - P_j\| \to 0$. Se tiene que cada $P_j = \sum_{i=1}^{\alpha} \lambda_i^j (x_i - x_i(m)) + a_j$ con a_j de m^2. Tendremos entonces:

$$\|\overline{f - \sum_{i=1}^{\alpha} \lambda_i^j (x_i - x_i(m))}\|_{m/\overline{m^2}} \leqslant \|f - \Sigma \lambda_i^j (x_i - x_i(m)) - a_j\| \to 0$$

luego se verifica la densidad de las expresiones $\overline{\Sigma \lambda_i^j (x_i - x_i(m))}$ en $m/\overline{m^2}$.

Veámoslo para $\overline{m^s}/\overline{m^{s+1}}$.

Sea $f \in \overline{m^s}$, existe una sucesión g_k con $||f - g_k|| \to 0$, $g_k \in m^s$ $g_k = \sum_i g_{ki\,1} \dots g_{kis}$ con $g_{kij} \in m$, luego cada uno de éstos se puede expresar como $\sum_t \lambda_{kij}^t (x_t - x_t(m)) + h_{kij}$; éste último de $\overline{m^2}$.

De aquí que puesto que

$$\overline{m^2}\, m^{s-1} \subset \overline{m^2\, m^{s-1}} = \overline{m^{s+1}}$$

se sigue la densidad que buscábamos.

Tendremos entonces que para un punto $A = P_{n-1} + \overline{m^k}$, $k \leqslant n$.

Para proceder por inducción sobre el número de puntos, tengamos en cuenta que existe un elemento de P_{n-k_α} que toma el valor 1 en m_α y pertenece a $m_1^{k_1} \cap \dots \cap m_{\alpha-1}^{k_{\alpha-1}}$; basta tomar elementos $\lambda_{j_i}(x_{j_i} - x_{j_i}(m_i))$ $i = 1, \dots, \alpha - 1$ tal que en m_α valgan 1, y multiplicar $k_1 + \dots + k_{\alpha-1}$ elementos adecuados de este tipo. Llamemos Q a dicho elemento; podemos ahora ya seguir la demostración de Glaeser:

Por hipótesis de inducción:

$$P_{n-k_\alpha-1} + \overline{m_1^{k_1} \cap \dots \cap m_{\alpha-1}^{k_{\alpha-1}}} = A$$

y según hemos probado $P_{k_\alpha-1} + \overline{m_\alpha^{k_\alpha}} = A$.

Al hacer el producto por Q, que es invertible en $A/\overline{m_\alpha^{k_\alpha}}$, tenemos:

$$Q\, P_{k_\alpha-1} + \overline{m_\alpha^{k_\alpha}} = A \qquad (*)$$

Dado f de A, existe por hipótesis de inducción $P' \in P_{n-k_\alpha-1}$ tal que

$$f - P' \in \overline{m_1^{k_1} \cap \dots \cap m_{\alpha-1}^{k_{\alpha-1}}} \quad \text{y de } (*)\text{, existe} \quad P'' \in P_{k_\alpha-1} \quad \text{tal que}$$

$$f - P' - P''\,Q \in \overline{m_\alpha^{k_\alpha}}$$

Tendremos $f - P' - P''\,Q \in \overline{m_1^{k_1} \cap \dots \cap m_{\alpha-1}^{k_{\alpha-1}}} \cap \overline{m_\alpha^{k_\alpha}} \subset \overline{m_1^{k_1} \cap \dots \cap m_\alpha^{k_\alpha}}$

y $P' - P''\,Q \in P_{n-k_\alpha-1} + P_{k_\alpha-1}\, P_{n-k_\alpha} \subset P_{n-1}$.

Proposición 6

En las condiciones de la proposición 5 todo ideal cerrado I de codimensión n es la adherencia de un ideal engendrado por elementos de P_n.

Observemos en primer lugar que $m = \overline{(x_1 - x_1(m), ..., x_n - x_n(m))}$. En efecto, si $f \in m$ $\|f - P_i(x_1, ..., x_\gamma)\| \to 0$ con $P_i(m) = 0$, de donde $P_i(x_1, ..., x_\gamma)$ son del ideal engendrado por $(x_i - x_i(m))$ $i = 1, .., \gamma$, luego vale la observación.

Sea I un ideal cerrado de codimensión n. Según la proposición 5 cada uno de sus elementos se expresará como una suma de un elemento de P_{n-1} más un elemento de $\overline{m_1^{k_1} \cap ... \cap m_\alpha^{k_\alpha}} \subset I$. Ambos elementos son de I.

Consideremos ahora el ideal $\overline{m_1^{k_1} \cap ... \cap m_\alpha^{k_\alpha}} = \overline{\Pi m_i^{k_i}}$. Puesto que el ideal engendrado por las expresiones $(x_{r_1} - x_{r_1}(m_j)) \ldots (x_{r_{k_j}} - x_{r_{k_j}}(m_j))$ es denso en $m_j^{k_j}$ como se deduce de la primera observación, se sigue que el ideal $\overline{\Pi m_i^{k_i}}$ está engendrado topológicamente por elementos de $I \cap P_n$. Esto acaba la demostración.

Proposición 7

Sea A un álgebra de Banach topológicamente finito generada y verificando la condición de la proposición 3. El espacio X de ideales cerrados de codimensión n con su topología grassmaniana puede sumergirse en un espacio proyectivo cuya dimensión depende sólo de n y del número de generadores de A.

En efecto, Consideremos la aplicación de X en el conjunto de los subespacios de P_n de codimensión n, que asigna a $I \longmapsto I \cap P_n$. Esta aplicación es inyectiva por la proposición 6. La misma puede también establecerse así:

Consideremos la aplicación continua restricción

$$E \to L(P_n \otimes ... \otimes P_n;\ C),$$

que por composición con la aplicación proyectivización da una aplicación continua

$$E - \{0\} \to \Pi(L(P_n \otimes ... \otimes P_n;\ C))$$

que factoriza a una aplicación continua

$$\Pi(E) \to \Pi(L(P_n \otimes \ldots \otimes P_n;\ C))$$

la restricción de dicha aplicación a X es una aplicación inyectiva y continua. De la compacidad de X sigue la inmersión buscada.

Obsérvese que en el caso de codimensión 1 el teorema de inmersión es el ya conocido. En este caso $P_n = [1, x_1, \ldots, x_\gamma]$. Dado $\langle w \rangle \in X$, tomando como representante el morfismo w multiplicativo, sus coordenadas son $w(e) = 1$, $w(x_1), \ldots, w(x_\gamma)$. De aquí que la inmersión puede hacerse en un espacio afín de dimensión γ.

REFERENCIAS

(1) GELFAND, RAIKOV, CHILOV. *Les anneaux normés commutatifs*. Gauthier-Villars. Paris.

(2) GLAESER G. *L'interpolation des fonctions differentiables de plusieurs variables*. Lectures Notes in Math. 209.

(3) HODGE and PEDOE. *Methods of algebraic geometry*. Cambridge University Press 1953.