ESPACIOS DE DERIVADOS (*)

por

JOSEP GUIA

Universidad de Valencia

I. ESPACIOS DE DERIVADOS CERRADOS.

I.1. *Introduccion.*

En [1], página 175, se muestra que en un espacio topológico general hay tres únicos tipos de puntos, si nos atenemos a la naturaleza topológica de sus derivados sucesivos:

Tipo (1): $d\{x\}$ cerrado y $d^i\{x\}$ cerrado $(i \geq 2)$
Tipo (2): $d\{x\}$ amorfo y $d^i\{x\}$ cerrado $(i \geq 2)$
Tipo (3): $d\{x\}$ amorfo y $d^i\{x\}$ amorfo $(i \geq 2)$
(por «amorfo» entendemos «ni abierto ni cerrado»)

La ausencia o presencia de algunos de ellos, en un espacio topológico, nos da lugar a tres clases de espacios interesantes.

I.2. *Espacios T_d.*

Los espacios en que no existen puntos de los tipos (2) y (3), si bien han sido considerados durante mucho tiempo como los únicos espacios dignos de ser estudiados — practicamente, todo el mundo aceptaba como *natural* el 5.º axioma de los formulados por Riesz en el IV C. I. M. (Roma, 1904) —, aparecen por vez primera dentro de la moderna literatura topológica — entendiendo que tal «modernidad» arranca de la fijación definitiva del concepto de espacio topológico,

(*) Este trabajo se presentó, como ponencia, en la sección II de las III Jornadas Matemáticas Hispano-Lusitanas, celebradas en Sevilla, en abril de 1974.

en los años cuarenta —, en la obra de Kelley ([2], página 56), quien cita el siguiente resultado de C. T. Yang:

> «El derivado de cada conjunto es cerrado si, y solo si, el derivado de cada punto lo es.» (I.2.1)

Posteriormente, Aull y Thron, en [3], representaron dichos espacios por T_d. A la vista, pues, del resultado *globalizador* de Yang, podemos calificarlos como *espacios de primer derivado cerrado*. Por lo tanto, tanto da definirlos mediante la expresión

$$\forall\, x:\ d\{x\}\ \text{es cerrado} \tag{I.2.2}$$

como por la aparentemente más fuerte

$$\forall\, M:\ dM\ \text{es cerrado} \tag{I.2.3}$$

Así mismo, otras expresiones definitorias, de fácil comprobación, son

$$\forall\, x:\ x \notin d^2\{x\} \tag{I.2.4}$$

$$\forall\, x:\ x \notin d^{2i}\{x\} \qquad (i \geq 1) \tag{I.2.5}$$

$$\forall\, x:\ x \notin \overline{d\{x\}} \tag{I.2.6}$$

$$\forall\, x:\ x \notin \overline{d^i\{x\}} \qquad (i \geq 1) \tag{I.2.7}$$

Si convenimos en denotar por

sM = cjto. de puntos aislados de M.
saM = cjto. de puntos aislados de M, no abiertos.
$sa_1 M$ = cjto. de puntos aislados de M, no abiertos, cuyos entornos cortan a dM.

tendremos que otra caracterización de los T_d vendrá dada por

$$\forall\, M:\ sa_1 M = \emptyset \tag{I.2.8}$$

ya que, como se demuestra en [1], página 165,

$$\overline{dM} = dM \cup sa_1 M \tag{I.2.9}$$

Los espacios T_d constituyen una clase intermedia entre T_1 y T_0.

I.3. *Espacios T_{d^2}.*

Son aquellos en que no existen puntos del tipo (3). Aparecen por vez primera en [1], página 176, y se pueden calificar como *espacios de segundo derivado cerrado*, toda vez que se verifica el siguiente teorema, análogo al de Yang:

«El derivado segundo de cada conjunto es cerrado si, y solo si, el derivado segundo de cada punto lo es.» (I.3.1)

como se demuestra en [1], página 243. Por lo tanto, tanto da definirlos mediante

$$\forall\, x:\ d^2\{x\} \text{ es cerrado} \tag{I.3.2}$$

como por

$$\forall\, M:\ d^2 M \text{ es cerrado} \tag{I.3.3}$$

Así mismo, si denotamos por

$sa_{11}M$ = cjto. de puntos aislados de M, no abiertos, cuyos entornos cortan a dM y algunos de ellos en un solo punto.

tendremos que otra caracterización de los T_{d^2} vendrá dada por

$$\forall\, M:\ sa_{11}M = \varnothing \tag{I.3.4}$$

ya que existe una correspondencia uno a uno entre $sa_1 dM$ y $sa_{11}M$ ([1], página 241).

Por otra parte, el teorema de Yang también es generalizable a los derivados i-ésimos ($i > 2$); sin embargo, los *espacios de derivado i-ésimo cerrado* ($i > 2$) no constituyen nuevas clases de espacios sino que son, exactamente, los espacios T_{d^2}. Por lo tanto, éstos también pueden venir caracterizados por

$$\forall\, x:\ d^i\{x\} \text{ es cerrado } (i > 2) \tag{I.3.5}$$

y por

$$\forall\, M:\ d^i M \text{ es cerrado } (i > 2) \tag{I.3.6}$$

Los espacios T_{d^2} son estrictamente mas generales que los T_0 ([1], página 255).

I.4. *Espacios* T_{did}.

Son aquellos en que no existen puntos del tipo (2). No han sido introducidos hasta el momento y los podremos calificar como *espacios de derivado-interior-del-derivado cerrado*, ya que se verifica el correspondiente teorema análogo al de Yang:

> «El derivado interior del derivado de cada conjunto es cerrado si, y solo si, el derivado interior del derivado de cada punto lo es.» (I.4.1)

en donde el derivado interior es lo que Cantor llamaba «coherencia», es decir, que

$$diM = dM \cap M$$

La demostración de (I.4.1) se obtiene fácilmente basándose en (I.4.7). Y como en los dos casos anteriores, tendremos que los espacios T_{did} se podrán definir, bien por

$$\forall x: \ did\{x\} \ \text{es cerrado} \tag{I.4.2}$$

bien por

$$\forall M: \ didM \ \text{es cerrado} \tag{I.4.3}$$

Así mismo, otras expresiones definitorias, de fácil comprobación, son

$$\forall x: \ x \notin d^3\{x\} \tag{I.4.4}$$

$$\forall x: \ x \notin d^{2i+1}\{x\} \qquad (i \geq 1) \tag{I.4.5}$$

y si convenimos en denotar por

$sa_{12}M$ = cjto. de puntos aislados de M, no abiertos, cuyos entornos cortan a dM y todos ellos en más de un punto.

tendremos que otra caracterización de los T_{did} vendrá dada por

$$\forall M: \ sa_{12}M = \emptyset \tag{I.4.6}$$

ya que, según se demuestra en [1], página 245,

$$\overline{didM} = didM \cup sa_{12}M \tag{1.4.7}$$

Por otra parte, el teorema análogo al de Yang también se verifica para los derivados interiores i-ésimos del derivado ($i > 2$); sin embargo, los correspondientes espacios que caracterizan no constituyen nuevas clases de espacios, sino que son exactamente los T_{did}. Por lo tanto, éstos también pueden venir caracterizados por

$$\forall\, x: \; di^i d\{x\} \text{ es cerrado} \quad (i > 2) \tag{I.4.8}$$

y por

$$\forall\, M: \; di^i dM \text{ es cerrado} \quad (i > 2) \tag{I.4.9}$$

Los espacios T_{did} son, obviamente, más generales que los T_d y esta generalización es estricta, como nos muestra el siguiente

Ejemplo 1.º: El espacio dado por

$$E = N$$
$$\mathfrak{U} = \{\emptyset, \{\{p, p+1, p+2, ...\}\}_{p \in \{\dot{2}+1\}}\}$$

es T_{did} y no T_d.

Tenemos, pues, el esquema siguiente:

$$\begin{tikzcd} & & T_{d^2} \\ T_1 \arrow[r] & T_d \arrow[r] \arrow[d] & T_0 \arrow[u] \\ & T_{did} & \end{tikzcd}$$

y, dadas las definiciones de T_d, T_{d^2} y T_{did}, es inmediato que

$$T_d = T_{d^2} + T_{did} \tag{I.4.10}$$

y como T_0 es un axioma intermedio entre T_d y T_{d^2}, se tendrá también que

$$T_d = T_0 + T_{did} \tag{I.4.11}$$

que es un resultado de una analogía formal evidente con los proporcionados por A. S. Davis [4] respecto a los axiomas de regularidad R_0 y R_1. Dichos axiomas fueron introducidos, originariamente, por N. A. Shanin [5] y C. T. Yang [6] y redescubiertos por el propio

Davis, según datos tomados de Klára Császár [7] y A. R. Singal [8]. En ellos se establece, a partir del esquema

$$\begin{array}{ccccc} R_1 & \longrightarrow & R_0 & & \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ T_2 & \longrightarrow & T_1 & \longrightarrow & T_0 \end{array}$$

que

$$T_1 = T_0 + R_0$$
$$T_2 = T_0 + R_1 = T_1 + R_1$$

Sería muy halagüeño que los nuevos axiomas de derivados cerrados que he introducido — T_{d^2} y T_{did} — merecieran una literatura tan relativamente abundante como la que han motivado recientemente los axiomas de regularidad (K. Morita, N. W. Lodato, B. Banaschewski, K. Császár, G. Murdeshwar, S. A. Naimpally, etc.) y el axioma T_d (K. H. Pahk, R. E. Larson, S. M. Robinson, Y. C. Wu, etc.).

II. Espacios de derivados de puntos vacios.

II.1. Introduccion.

Los espacios T_1 se caracterizan, en función del operador derivado, mediante una cualquiera de las expresiones siguientes:

a) $\forall x: d\{x\} = \varnothing$ (II.1.1)

b) $\forall x \ \forall U_x: U_x \cap d\{x\} = \varnothing$ (II.1.2)

Esto nos permite obtener una familia de espacios mas generales que T_1, mediante la formulación de hipótesis análogas para los derivados sucesivos.

II.2. Espacios T_{m^i}.

Conviniendo en que $T_{m^0} = T_1$, los espacios T_{m^i} vendrán definidos por una cualquiera de las expresiones siguientes:

a) $\forall x: d^{i+1}\{x\} = \varnothing \quad (i \geq 0)$ (II.2.1)

b) $\forall x \ \forall U_x: U_x \cap d^{i+1}\{x\} = \varnothing \quad (i \geq 0)$ (II.2.2) a partir de las cuales es inmediato que:

1. — T_{m^i} implica $T_{m^{i+1}}$ $(i \geq 0)$.

Es inmediato.

2. — T_{m^i} implica T_d $(i \geq 0)$.

Basta comparar (II.2.2) y (I.2.7).

Así, pues, la familia T_{m^i} $(i \geq 1)$ constituye una sucesión de espacios intermedia entre T_1 y T_d:

$$T_1 \longrightarrow T_m \longrightarrow T_{m^2} \longrightarrow \dots T_{m^i} \longrightarrow \dots T_d \qquad \text{(II.2.3)}$$

en donde las implicaciones son estrictas, como nos muestra el siguiente

Ejemplo 2.º: El espacio dado por

$$E = N$$

y la base de cerrados

$$\mathfrak{T}_i = \{N, \{\{p\}, \{p, p+1\}, \dots \{p, p+1, \dots, p+i\}\}_{p \in \{\dot{\widehat{i+1}}+1\}}\}$$

es T_{m^i}, pero no $T_{m^{i-1}}$ $(i \geq 1)$.

III. Espacios de derivados de puntos densos en si mismos.

III.1. Espacios T_{n^i}.

Los espacios T_{n^i} vienen definidos por una cualquiera de las expresiones siguientes:

a) $\forall x: d^i\{x\}$ es denso $(i \geq 1)$ (III.1.1)

b) $\forall x \; \forall U_x: U_x \cap d^i\{x\}$ es denso $(i \geq 1)$ (III.1.2)

cuya equivalencia es de fácil comprobación. Así mismo, otra expresión que nos define los espacios T_{n^i} es

$$\forall x \; \forall U_x: |U_x \cap d^i\{x\}| \neq 1 \qquad (i \geq 1) \qquad \text{(III.1.3)}$$

En efecto, si existiera un elemento $y \in d^i\{x\}$ tal, que

$$\exists U_x: U_x \cap d^i\{x\} = \{y\}$$

entonces y pertenecería a $sad^i\{x\}$ y $d^i\{x\}$ no sería denso. Inversamente, como todos los entornos E_y de los elementos $y \in d^i\{x\}$ son, a su vez, entornos de x, se tendrá que

$$\forall\, y \in d^i\{x\} \quad \forall\, E_y : \ |E_y \cap d^i\{x\}| \geq 2$$

y, por lo tanto,

$$\forall\, y \in d^i\{x\} : \ y \notin sad^i\{x\}$$

luego $d^i\{x\}$ es denso.

Las relaciones entre los espacios T_{n^i} y los conocidos hasta aquí, vienen dadas por:

1. — T_{m^i} implica $T_{n^{i+1}}$ $(i \geq 0)$.

Basta comparar (II.2.2) y (III.1.3).

2. — T_{n^i} implica $T_{n^{i+1}}$ $(i \geq 1)$.

Es fácil comprobar que si un conjunto es denso, su derivado tambien lo es.

3. — T_{n^i} implica T_{d^2} $(i \geq 1)$.

Teniendo en cuenta que los espacios T_{d^2} pueden caracterizarse por la expresión

$$\forall\, x: \ (\exists\, U_x: \ U_x \cap d^i\{x\} = \emptyset) \vee (\forall\, U_x: \ |U_x \cap d^i\{x\}| \neq 1) \ (i \geq 1) \qquad \text{(III.1.4)}$$

basta comparar (III.1.3) y (III.1.4).

Así, pues, incorporando al grafo (II.2.3) la familia de espacios T_{n^i} $(i \geq 1)$, obtendremos

$$\begin{array}{ccccccccc} T_n & \longrightarrow & T_{n^2} & \longrightarrow & T_{n^3} & \longrightarrow \ldots & T_{n^{i+1}} & \longrightarrow \ldots & T_{d^2} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ T_1 & \longrightarrow & T_m & \longrightarrow & T_{m^2} & \longrightarrow \ldots & T_{m^i} & \longrightarrow \ldots & T_d \end{array} \qquad \text{(III.1.5)}$$

en donde las nuevas implicaciones siguen siendo estrictas, ya que, por una parte, el ejemplo 2.º nos da un espacio $T_{n^{i+1}}$, pero no T_{n^i} $(i \geq 1)$ y, por otra, un espacio $T_{n^{i+1}}$, pero no T_{m^i}, nos lo proporciona el

Ejemplo 3.º:

$$E = N$$

y la base de cerrados

$$\mathfrak{T} = \{N, \{\{p, p+1, p+2, p+3\}\}_{p \in \{\hat{4}+1\}}, \{\{p\}\}_{p \in \{\hat{4}\}}\}$$

Digamos, finalmente, que los espacios T_{d^2} también pueden venir caracterizados, mediante el concepto de densidad, por la expresión

$$\forall x \ \exists U_x : \ U_x \cap d^i\{x\} \text{ es denso } (i \geq 1) \qquad \text{(III.1.6)}$$

IV. Espacios de derivados de puntos diseminados.

IV.1. Espacios T_{si}.

Los espacios T_{si} vienen definidos por una cualquiera de las expresiones siguientes:

a) $\forall x: \ d^i\{x\}$ es diseminado $(i \geq 1)$ (IV.1.1)

b) $\forall x \ \forall U_x: \ U_x \cap d^i\{x\}$ es diseminado $(i \geq 1)$ (IV.1.2)

cuya equivalencia es trivial.

Las relaciones entre los espacios T_{si} y los ya conocidos hasta aquí, vienen dadas por:

1. — T_{m^i} implica T_{si} $(i \geq 1)$.

Basta comparar ambas definiciones.

2. — T_{si} implica T_{si+1} $(i \geq 1)$.

Se puede deducir fácilmente que

$$\forall x: \ |ded^i\{x\}| = 1.$$

Por lo tanto, si

$$\forall x: \ did^i\{x\} = \emptyset$$

se tendrá que

$$\forall x: \ |d^{i+1}\{x\}| \leq 1$$

por lo que $d^{i+1}\{x\}$ será diseminado.

3. — T_{n^i} implica T_{did} $(i \geq 1)$.

Teniendo en cuenta que los espacios T_{did} pueden caracterizarse por la expresión

$$\forall x \ \exists U_x : \ U_x \cap d^i\{x\} \text{ es diseminado } (i \geq 1) \qquad \text{(III.1.3)}$$

basta comparar (IV.1.2) y (IV.1.3).

Así, pues, incorporando al grafo (III.1.5) la familia de espacios T_{s^i} $(i \geq 1)$, obtendremos:

$$\begin{tikzcd}
T_n \arrow[r] & T_{n^2} \arrow[r] & T_{n^3} \arrow[r] & \dots T_{m^{i+1}} \arrow[r] & \dots T_{d^2} \\
T_1 \arrow[r] \arrow[u] & T_m \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & T_{m^2} \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & \dots T_{m^i} \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & \dots T_d \arrow[u] \arrow[d] \\
 & T_s \arrow[r] & T_{s^2} \arrow[r] & \dots T_{s^i} \arrow[r] & \dots T_{did}
\end{tikzcd} \tag{IV.1.4}$$

en donde todas las implicaciones son estrictas.

REFERENCIAS

[1] J. GUIA, *Derivados sucesivos de un conjunto. Espacios T*. Rev. Mat. Hisp-Amer., t. 33 (1973), 161-167 & 238-256.

[2] J. L. KELLEY, *General Topology*. New York, D. Van Nostrand Co. (1955).

[3] C. E. AULL & W. J. THRON, *Separation axioms between T_0 and T_1*. Indag. Math., 24 (1962), 26-37.

[4] A. S. DAVIS, *Indexed Systems of neighborhoods for general topological spaces*. Amer. Math. Monthly, 68 (1961), 886-893.

[5] N. A. SHANIN, *On separation in topological spaces*. Dokl. Akad. Nank. SSSR, 38 (1943), 110-113.

[6] C. T. YANG, *On paracompect spaces*. Proc. Amer. Math. Soc., 5 (1954), 185-189.

[7] K. CSÁSZÁR, *Untersuchungen über Trennungsaxiome*. Publ. Math. Debrecen, 14 (1967), 353-364.

[8] A. R. SINGAL, *Remarks on separation axioms*. Proc. of the Kanpur Topological Conference, 1968.