ALGUNOS RESULTADOS SOBRE COMPLETITUD EN ESPACIOS LOCALMENTE CONVEXOS (*)

por

M. VALDIVIA

Los espacios vectoriales que utilizamos aquí están definidos sobre el cuerpo K de los números reales o de los números complejos. En lo que sigue la palabra «espacio» significará «espacio localmente convexo separado». Dado un espacio E representaremos por E' su dual topológico y por $\sigma(E, E')$, $\beta(E, E')$ y $\mu(E, E')$ las topologías débil, fuerte y de MACKEY sobre E, respectivamente. Si consideramos E sumergido en su bidual E'' y A es un conjunto de E, entonces A^σ es la clausura de A en E'' para la topología $\sigma(E'', E')$. Si B es un conjunto de E, acotado absolutamente convexo y cerrado, representaremos por E_B la envoltura lineal de B con la norma asociada a B. Sea $\mathcal{B}$ una clase de conjuntos de E, acotados, absolutamente convexos y cerrados; decimos que $\mathcal{B}$ es saturada si se cumplen las siguientes condiciones: 1) Si $B \in \mathcal{B}$ y A es un subconjunto de B, absolutamente convexo cerrado, entonces A pertenece a $\mathcal{B}$. 2) Si $B \in \mathcal{B}$ entonces $\lambda B \in \mathcal{B}$ para cada $\lambda \in K$. 3) Si B_1 y B_2 pertenecen a $\mathcal{B}$, existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $B_1 \cup B_2 \subset B$.

En ([3], p. 249) se demuestra que si A es la envoltura absolutamente convexa cerrada de una sucesión debilmente convergente al origen en un espacio sucesionalmente completo E, entonces A es débilmente compacto. En nuestro Lema 1 damos una propiedad más general que el resultado anterior.

LEMA 1. *Sea* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión débilmente convergente en el espacio* E. *Sea* A *la envoltura absolutamente convexa cerrada de* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Es condición necesaria y suficiente para que* A *sea débilmente compacto que* E_A *sea un espacio de Banach.*

(*) Subvencionado en parte por el «Patronato para el Fomento de la Investigación en la Universidad».

Demostración: Si A es débilmente compacto entonces A es completo y, por lo tanto E_A es un espacio de BANACH. Supongamos, ahora, que E_A es un espacio de BANACH. Sea x_0 el límite débil de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Sea

$$B = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (x_n - x_0) : \quad \alpha_n \in K, \quad n = 1, 2, \ldots, \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \leqslant 1 \right\}$$

Veamos, primero que B es débilmente compacto. Si $\|\cdot\|$ es la norma en E_A. entonces

$$\left\| \sum_{n=p}^{m} \alpha_n (x_n - x_0) \right\| \leqslant \sum_{n=p}^{m} |\alpha_n| \cdot \|x_n - x_0\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=p}^{m} |\alpha_n| (\|x_n\| + \|x_0\|) \leqslant 2 \sum_{n=p}^{m} |\alpha_n|,$$

de donde se deduce que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (x_n - x_0)$ está bien definido.

Sea l^1 el espacio de las sucesiones $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ de K tales que $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < \infty$ con la norma $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$. Sea φ la aplicación de l^1 en E tal que

$$\varphi (\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (x_n - x_0)$$

Si U es la bola unidad cerrada de l^1 es inmediato que $\varphi(U) = B$. Si c_0 es el espacio de las sucesiones $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ de K tales que $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a cero, con la norma sup $\{|\beta_n| : n = 1, 2, \ldots\}$ entonces l^1 es el dual fuerte de c_0. Veamos que φ es continua de $l^1 [\sigma(l^1, c_0)]$ en $E [\sigma(E, E')]$. En efecto, sea $\{\{\alpha_n^{(i)}\}_{n=1}^{\infty} : i \in I, \geqslant\}$ una red en $l^1 [\sigma(l^1, c_0)]$ que converge al origen. Si v es un elemento de E' se tiene

$$\langle v, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(i)} (x_n - x_0) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(i)} \langle v, x_n - x_0 \rangle.$$

Puesto que $\{x_n - x_0\}_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente al origen se tiene que $\{\langle v, x_n - x_0 \rangle\}_{n=1}^{\infty}$ pertenece a c_0 y, por lo tanto,

$$\lim \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(i)} \langle v, x_n - x_0 \rangle : i \in I, \geqslant \right\} = 0.$$

Puesto que U es $\sigma(l^1, c_0)$-compacto resulta que B es débilmente compacto.

Sea $M = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (x_n - x_0) : \alpha_n \geqslant 0,\, n = 1, 2, \ldots, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1\right\}$. Entonces $\overline{M}$ es un conjunto cerrado en B y, por lo tanto, $\overline{M}$ es débilmente compacto. De aquí

$$x_0 + \overline{M} = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n : \alpha_n \geqslant 0,\, n = 1, 2, \ldots, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1\right\}$$

es débilmente compacto. Obviamente A es la envoltura absolutamente convexa cerrada de $x_0 + \overline{M}$, y, puesto que $x_0 + \overline{M}$ es convexo, resulta, ([3], p. 242-243), que A es débilmente compacto. c. q. d.

TEOREMA 1. *Dado un espacio E sea $\mathfrak{B}$ una familia saturada de conjuntos absolutamente convexos, acotados y cerrados en $E'[\sigma(E', E)]$, de manera que $E' = \bigcup\{B : B \in \mathfrak{B}\}$ y, para cada $B \in \mathfrak{B}$, E'_B es un espacio de Banach. Sea $\mathcal{F}$ la topología sobre E de la convergencia uniforme sobre los conjuntos de $\mathfrak{B}$. Sea S la topología sobre E de la convergencia uniforme sobre los conjuntos $\sigma(E', E)$-compactos de E' que pertenecen a $\mathfrak{B}$. Supongamos que existe en E una clase numerable de conjuntos absolutamente convexos y débilmente compactos, cuya unión es densa en $E[\mathcal{F}]$. Si $E[\mathcal{F}]$ es completo, entonces $E[S]$ es completo.*

Demostración: Supongamos que $E[S]$ no es completo. Sea x un punto de la compleción de $E[S]$ que no esté en E. Puesto que $E[\mathcal{F}]$ es completo aplicamos el teorema de Grothendieck, ([3], p. 270), y obtenemos un B en $\mathfrak{B}$ tal que $x^{-1}(0) \cap B$ no es cerrado en $E'[\mu(E', E)]$. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión expansiva de conjuntos débilmente compactos y absolutamente convexos, de E, cuya unión es un subespacio G denso en $E[\mathcal{F}]$ y sea u un punto de B que pertenezca a la $\mu(E, E)$-clausura de $x^{-1}(0) \cap B$, tal que $u \notin x^{-1}(0)$. Si A_n^0 es el conjunto polar de A_n en E', tenemos que $(u + A_n^0) \cap B \cap x^{-1}(0) \neq \phi$. Tomamos u_n en $(u + A_n^0) \cap B \cap x^{-1}(0)$. La sucesión $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a u para la topología $\sigma(E', G)$. Si F es el dual topológico de $E[\mathcal{F}]$ entonces E' es un subespacio denso de $F[\sigma(F, E)]$. Si $\bar{B}$ es la clausura de B en $F[\sigma(F, E)]$ se tiene que $\bar{B}$ es $\sigma(F, E)$-compacto y, por lo tanto, las topologías $\sigma(F, E)$ y $\sigma(F, G)$ coinciden en $\bar{B}$, de aquí la sucesión $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a u para la topología $\sigma(E', E)$.

En $E'[\sigma(E', E)]$ sea M la envoltura absolutamente convexa cerrada de $\{u'_n\}_{n=1}^{\infty}$. Puesto que E'_B es un espacio de BANACH, aplicamos el Lema 1 y obtenemos que M es $\sigma(E', E)$-compacto. Por otra parte, $x^{-1}(0) \cap M$ no es cerrado en M para la topología $\sigma(E', E)$ y, por lo tanto, x no pertenece a la complección de $E[S]$, y llegamos a una contradicción. c. q. d.

COROLARIO 1.1. *Dado un espacio E sea $\mathcal{B}$ la familia de todos los conjuntos $\beta(E', E)$-acotados absolutamente convexos $\sigma(E', E)$-cerrados. Supongamos que para cada $B \in \mathcal{B}$, E'_B es un espacio de Banach. Si $E[\beta(E, E')]$ es separable y completo entonces $E[\mu(E, E')]$ es completo.*

Demostración: Puesto que en $E'[\beta(E', E)]$ existe un sistema fundamental de entornos del origen, que son cerrados en $E'[\sigma(E', E)]$, entonces, si A es un conjunto acotado en $E'[\beta(E', E)]$ y $\bar{A}$ es su clausura en $E'[\sigma(E', E)]$ se tiene que $\bar{A}$ es $\beta(E', E)$-acotado, de aquí que $\beta(E, E')$ es la topología sobre E de la convergencia uniforme sobre cada elemento de $\mathcal{B}$. Basta, ahora, aplicar el Teorema 1 para tener la conclusión. c. q. d.

Nota. En [1] se demuestra que si E es un espacio tal que $E'[\beta(E', E)]$ es completo y $E[\beta(E, E')]$ es completo y separable, entonces $E[\mu(E, E')]$ es casi-completo. Dicho resultado se puede obtener de nuestro Corolario 1.1.

TEOREMA 2. *Sea E un espacio completo que posee una familia numerable se subconjuntos absolutamente convexos y débilmente compactos con unión densa en E. Sea G un subespacio de E'' que contiene a E. Sea $\mathcal{F}$ la topología sobre G de la convergencia uniforme sobre los conjuntos absolutamente convexos $\sigma(E', G)$-compactos de E' que son equicontinuos en E. Si E es de codimensión finita en G, entonces $G[\mathcal{F}]$ es completo.*

Demostración: En E' sea $\mathcal{B}$ la familia de todos los conjuntos absolutamente convexos, $\sigma(E', E)$-cerrados, que son equicontinuos en E. Para cada $B \in \mathcal{B}$, E_B es un espacio de BANACH y, puesto que G está contenido en E'', los elementos de $\mathcal{B}$ son $\sigma(E', G)$-acotados. Aplicando el Teorema 1, la demostración quedará concluida si mostramos que G es completo para la topología S de la convergencia uniforme sobre cada elemento de $\mathcal{B}$ y que G tiene una familia numerable de conjuntos absolutamente convexos, $\sigma(G, E')$-compactos, cuya unión es densa en $G[S]$. Puesto que E es un subespacio completo, de codimensión finita, de G, se verifica que $G[S]$ es completo. Sea M la envoltura absolutamente convexa de una cobase de E en G. Para cada par de números naturales m y n sea $P_{mn} = nM + A_m$, siendo $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos absolutamente convexos y débilmente compactos de E, cuya unión es densa en E. Ahora es inmediato que $\{P_{mn} : m, n = 1, 2, \ldots\}$ es una familia de conjuntos absolutamente convexos, $\sigma(G, E')$-compactos, de G, cuya unión es densa en $G[S]$. c. q. d.

TEOREMA 3. *Sea E un espacio que tiene una familia numerable de conjuntos absolutamente convexos y débilmente compactos, cuya unión es densa en E. Sea G un subespacio de E'' que contiene E. Si $E[\mu(E, E')$ es completo, entonces $G[\mu(G, E')]$ es el límite inductivo de una familia de espacios de Mackey completos.*

Demostración: Sea $\mathcal{F}$ la familia de los subespacios vectoriales de G tales que $F \in \mathcal{F}$ si, y sólo si, la codimensión de E en F es finita. Sea

$$\mathcal{G} = \{F[\mu(F, E')] : F \in \mathcal{F}\}$$

Los espacios de $\mathcal{G}$ son completos, de acuerdo con el Teorema 2, y es inmediato que $G[\mu(G, E')]$ es el límite inductivo de la familia G. c. q. d.

Para la demostración del Lema 2 necesitamos el siguiente resultado que hemos dado en [4]: a) *Sea F un subespacio de codimensión uno del espacio E. Sea $\mathcal{B}$ una familia de conjuntos de E que satisface las siguientes condiciones:* 1) *Si $B \in \mathcal{B}$ entonces B es acotado, cerrado y absolutamente convexo.* 2) *Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $B_1 \cup B_2 \subset B$.* 3) *Si $B \in \mathcal{B}$ entonces $\lambda B \in \mathcal{B}$, para cada $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$.* Si en E *existe un conjunto $M \in \mathcal{B}$ tal que $M \cap F$ no es cerrado, entonces dado cualquier $P \in \mathcal{B}$ existe un $Q \in \mathcal{B}$ tal que P está en la clausura de $Q \cap F$.*

LEMA 2. *Dado un espacio E sea G un subespacio de E'' que contiene E, tal que E es de codimensión finita en G. Si A es un conjunto acotado de $G[\sigma(G, E')]$ existe un conjunto acotado B en E, tal que la clausura de B en $G[\sigma(G, E')]$ contiene A.*

Demostración: Sea $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ una cobase de E en G. Puesto que M está contenido en E'' existe en E un conjunto P, acotado y absolutamente convexo, cuya $\sigma(E'', E')$-clausura $\overline{P}$ contiene M. Ponemos $G_0 = E$ y G_p la envoltura lineal de $E \cup \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$, $p = 1\ 2, \ldots, n-1$. Puesto que G_p es de codimensión uno en G_{p+1} y $\overline{P} \cap G_p$ no es $\sigma(G_{p+1}, E')$-cerrado en G_{p+1}, $p = 0, 1, \ldots, n-1$, aplicamos el resultado a) y obtenemos un conjunto A_1 en G_{n-1}, $\sigma(E'', E')$-acotado cuya $\sigma(E'', E')$-clausura contiene A. También obtenemos un conjunto A_2 en G_{n-2}, $\sigma(E'', E')$-acotado, cuya $\sigma(E'', E')$-clausura contiene A_1. Siguiendo así obtenemos en E un conjunto acotado B cuya $\sigma(E'', E')$-clausura contiene A_{n-1}. Obviamente la $\sigma(G, E')$-clausura de B en G contiene A. c. q. d.

LEMA 3. *Sea E un espacio que tiene una familia numerable de conjuntos absolutamente convexos y débilmente compactos, cuya unión es densa en E. Sea G un subespacio de E'' que contiene E, de manera que la codimensión de E en G es finita. Sea $\mathcal{F}$ la topología sobre G de la convergencia uniforme sobre los conjuntos de $E'[\sigma(E', G)]$ absolutamente convexos y compactos, que son equicontinuos en E. Si u es una forma lineal sobre E' y $\widehat{E}$ es la complección de E, entonces u pertenece a la complección de $G[\mathcal{F}]$ si, y sólo si, u pertenece a $\widehat{E} + G$.*

Demostración: Sea $\mathcal{B}$ la familia de los conjuntos absolutamente convexos y compactos de $E'[\sigma(E', G)]$, que son equicontinuos en E. Ponemos $G_1 = \widehat{E} + G$. Si $B \in \mathcal{B}$ entonces es equicontinuo en E y, por lo tanto, B es $\sigma(E', G_1)$-compacto. Sea $\mathcal{U}$ la topología sobre G_1 de la convergencia uniforme sobre los elementos de $\mathcal{B}$. De acuerdo con el Teorema 3 resulta que $G_1[\mathcal{U}]$ es completo. Aplicamos el teorema de GROTHENDIECK, ([3], p. 270), y obtenemos que u pertenece a la complección de $G[\mathcal{F}]$ si, y sólo si $u^{-1}(0) \cap B$ es $\sigma(E', G)$-cerrado para cada $B \in \mathcal{B}$. De aquí es obvio que $G_1[\mathcal{U}]$ es la complección de $G[\mathcal{F}]$. c. q. d.

TEOREMA 4. *Sea E un espacio que tiene una familia numerable de conjuntos absolutamente convexos y débilmente compactos, cuya unión es densa en E. Sea G un subespacio de E'' que contiene E de manera que la codimensión de E y G es finita. Sea $\mathcal{F}$ la topología sobre G de la convergencia uniforme sobre los conjuntos de $E'[\sigma(E', G)]$ absolutamente convexos y compactos, que son equicontinuos en E. Si E es casi-completo entonces $G[\mathcal{F}]$ es casi-completo.*

Demostración: Supongamos que $G[\mathcal{F}]$ no es casi-completo. Sea x un punto de la compleción $\widehat{G}$ de $G[\mathcal{T}]$ tal que x no está en G. Supongamos que hay un conjunto acotado A en $G[\mathcal{F}]$ tal que x está en la clausura en $\widehat{G}$ de A. De acuerdo con el Lema 2 podemos encontrar un conjunto acotado B en E de manera que su $\sigma(G, E')$-clausura contenga A y, por lo tanto, x pertenece a la $\sigma(E'', E')$-clausura de B y así x pertenece a E''. Si $\widehat{E}$ es la compleción de E, x pertenece a $\widehat{E} + G$, de acuerdo con el Lema 3. Si $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ es una cobase de E en G tenemos que

$$x = z + \sum_{p=1}^{n} a_p x_p, \quad z \in \widehat{E}, \ a_p \in K, \ p = 1, 2, ..., n,$$

y por lo tanto $z \in E''$, y puesto que $x \notin G$ tenemos que $z \notin E$. Así z no pertenece a la $\sigma(\widehat{E}, E')$-clausura de un conjunto acotado de E, puesto que E es casi-completo. Por lo tanto, z no pertenece a E'' y llegamos a una contradicción. c. q. d.

COROLARIO 1.4. *Sea E un espacio separable. Sea G un subespacio de E'' que contiene E, de manera que la codimensión de E en G es finita. Si $E[\mu(E, E')]$ es completo entonces $G[\mu(G, E')]$ es completo.*

NOTA 2. En [2] F. C. JAMES da un ejemplo de un espacio de BANACH E, de codimensión uno en E''. Dado un número entero n, no negativo, un espacio E es casi-semi-reflexivo de orden n si E es de codimensión n en E''. Un espacio E es casi-reflexivo si es casi-semi-reflexivo y tonelado. Dado un entero positivo n es fácil construir un espacio de FRECHET E casi-reflexivo de orden n, que no sea un espacio de BANACH, para lo cual es suficiente tomar $E = \Pi\{E_j : j = = 1, 2, ..., n, n + 1\{$ de manera que $E_1, E_2, ..., E_n$ son espacios de BANACH iguales al ejemplo dado por JAMES, [2], y E_{n+1} es un espacio de FRECHET reflexivo que no es espacio de BANACH. En el Teorema 5 daremos un método para construir espacios casi-semi-reflexivos de cualquier orden.

TEOREMA 5. *Sea E un espacio tonelado completo. Sea n un entero positivo. Si E no es casi-reflexivo existe en E' una topología $\mathcal{F}$ más fina que $\mu(E', E)$ tal que $E'[\mathcal{T}]$ es un espacio casi-semi-reflexivo de orden n.*

Demostración: Tomamos en E'' los vectores $x_1, x_2, ..., x_n$ tales que la codimensión de E en la envoltura lineal G de $E \cup \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ es n. Ponemos $\mathcal{T} = \mu(E', G)$ y veamos que $E'[\mathcal{F}]$ es un espacio casi-semi-reflexivo de orden n. Consideramos los elementos de E' como formas lineales continuas sobre $G[\sigma(G, E')]$. Si p es un número entero positivo tal que $p \leqslant n$, sea u_p la forma lineal sobre G tal que $u_p(x_p) = 1$, $u_p(x_q) = 0$, $q = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n$, $u_p(x) = 0$, $x \in E$. Puesto que E es un subespacio cerrado de $G[\beta(G, E')]$ tenemos que u_p pertenece al espacio F dual topológico de $G[\beta(G, E')]$. Si $u \in F$ existe un elemento $v \in E'$ que coincide con u sobre E. Si $\langle u - v, x_p\rangle = a_p$. entonces $u = v + \sum_{p=1}^{n} a_p u_p$ y, por lo tanto, $u_1, u_2, \dots, u_n$ es una cobase de E' en F. c. q. d.

TEOREMA 6. *Si E es une spacio casi-semi-reflexivo, entonces $E'[\beta(E', E)]$ es tonelado.*

Demostración: Si A es un conjunto acotado de $E''[\sigma(E'', E')]$ entonces aplicamos el Lema 2 y vemos que existe un conjunto acotado B en E tal que la $\sigma(E'', E')$-clausura de B en E'' contiene A y, por lo tanto, A es equicontinuo en $E'[\beta(E', E)]$. c. q. d.

BIBLIOGRAFIA

1. DE VITO C. L.: *A completeness theorem for locally spaces and some applications.* Math. Ann. *177*, 221-229 (1968).

2. JAMES, R. C.: *Bases and reflexivity of Banach spaces.* Ann. of Math. *52* 518-527 (1950).

3. KÖTHE, G.: *Topological Vector Spaces I.* Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1960.

4. VALDIVIA, M.: *On subspaces of countable codimension of a locally convex space.* J. reine angew. Math. *256*, 185-189 (1972).