REPRESENTACION DE INF-SEMIRRETICULOS EN LAS PARTES DE UN ESPACIO TOPOLOGICO

por

B. RODRÍGUEZ-SALINAS y F. BOMBAL GORDÓN

INTRODUCCION

El teorema de STONE sobre la representación de un álgebra de Boole de conjuntos como álgebra de los conjuntos abiertos-compactos de un espacio localmente compacto separado y totalmente disconexo, es esencial para la demostración del teorema de KAKUTANI, que establece la existencia de un isomorfismo isométrico entre los espacios $L^p(\Omega, \mu)$, siendo μ una medida abstracta sobre el conjunto Ω, y $L^p(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mu})$, en donde $\widetilde{\Omega}$ es un cierto espacio localmente compacto y $\widetilde{\mu}$ es una medida de Radon sobre $\widetilde{\Omega}$. Este teorema sirve de unión entre la teoría de la medida «abstracta» y la de medidas de Radon sobre un espacio localmente compacto. En las obras de DINCULEANU [1] y DUNFORD-SCHWARTZ [2] se pueden ver sendas demostraciones del citado teorema de STONE que, aunque distintas, consisten en último término en sumergir el álgebra de BOOLE E_0 en cuestión en un conjunto de partes de E_0 (ultrafiltros en [1]; ideales máximales de E_0 en [2]), al que se dota de una topología adecuada.

En el presente trabajo, se da en primer lugar un método general de representación de un inf-semirretículo como familia de partes de un conjunto. Posteriormente, se introduce la noción de ϱ-inf-semirretículo y se utilizan las técnicas anteriores para obtener condiciones necesarias y suficientes para la representación de un ϱ-inf-semirretículo en las partes compactas de un espacio topológico. Como consecuencia se obtienen, entre otros resultados, el citado teorema de STONE, el teorema de compactación de WALLMAN, y un teorema general de inmersión de un retículo de partes de un conjunto X en un cierto retículo de compactos de un espacio localmente compacto separado E, que contiene a X, y tal que $\overline{X} = E$ (Proposición 26 de § 2). Se estudia el caso de retículos completos y se dan condiciones necesarias y suficientes para que las representaciones conserven supremos e ínfimos de familias arbitrarias. Finalmente, se discute el problema de la unicidad de la representación.

§ 1. REPRESENTACION DE INF-SEMIRRETICULOS EN LA COLECCION DE PARTES DE UN CONJUNTO

1. Definición. Sea E_0 un inf-semirretículo con primer elemento 0 y no reducido a éste. Entonces una *base de ideal* (propio) en E_0 es un subconjunto a de E_0 que satisface:

1.1. a es no vacío.

1.2. $0 \notin a$.

1.3. Para todo par x, y de elementos de a, existe un $z \in a$ tal que $z \leqslant x \wedge y$.

Una base de ideal a en E_0 se dice un *ideal* (propio) cuando cumple:

1.4. Si $x \leqslant y$ y $x \in a$, se tiene $y \in a$.

Denotaremos por Φ la colección de las bases de ideal en E_0.

2. Proposición. *Para toda base de ideal existe un ideal mínimo que le contiene.*

Demostración. En efecto, si b es una base de ideal es fácil comprobar que

$$a = \{x \in E_0 : \exists\, y \in b \ni x \geqslant y\}$$

es un ideal que contiene a b. Además, si a' es un ideal que contiene a b, resulta que $a \subset a'$ en virtud de 1.4.

3. Proposición. *La colección Φ tiene las siguientes propiedades:*

3.1. *Si $x \in E_0$, el conjunto $\{x\}$ pertenece a Φ si y sólo si $x \neq 0$.*

3.2. *Φ es no vacía.*

3.3. *Si $a \in \Phi$ y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son elementos de a, entonces $\bigwedge_{i=1}^{n} x_i \neq 0$.*

Demostración. Es inmediata.

4. Definición. Denotaremos por E la colección de los subconjuntos u de E_0 tales que:

4.1. $0 \notin u$.

4.2. Si $x, y \in u$, se tiene $x \wedge y \in u$.

4.3. Si $x \notin u$, existe un $y \in u$ que satisface $x \wedge y = 0$.

5. Proposición. *Los elementos u de E son justamente los ideales maximales de E_0.*

Demostración. En primer lugar, todo $u \in E$ es un conjunto maximal de Φ y, por tanto, un ideal maximal en virtud de la proposición 2. En efecto, sean $u \in E$ y $a \subset E_0$ tales que $u \subset a \neq u$. Entonces hay un $x \in a - u$ y por 4.3 existe un $y \in u$ tal que $x \wedge y = 0$. Por tanto, como $x, y \in a$ y $x \wedge y = 0$, $a \notin \Phi$ por no verificar 3.3. Recíprocamente, si u es un conjunto maximal de Φ, u pertenece a E. Desde luego, entonces u verifica 4.1. Además, como de la proposición 2 resulta que u es un ideal, si $x, y \in u$ se deduce que $x \wedge y \in u$ por existir un $z \in u$ que satisface $z \leqslant x \wedge y$. Finalmente, si $x \in E_0$ y $x \wedge y \neq 0$ para todo $y \in u$ y

$$a = \{y \in E_0 : \quad \exists\, z \in u \quad y \geqslant x \wedge z\}$$

se tiene $a \in \Phi$, $a \supset u$ y $x \in a$ y, por tanto, $a = u$ y $x \in u$.

6. Definición. Designaremos por φ la aplicación de E_0 en el conjunto $\mathcal{P}(E)$ de las partes de E definida así:

$$\varphi(x) = \{u \in E : x \in u\} \qquad (x \in E_0).$$

7. Proposición. *La aplicación φ tiene las siguientes propiedades:*

7.1. $\varphi(0) = \emptyset$.

7.2. $\bigcup \{\varphi(x) : x \in E_0\} = E$.

7.3. $\varphi(x) \subset \varphi(y)$ *si* $x \leqslant y$.

7.4. $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \cap \varphi(y)$ *para todo par* x, y *de elementos de* E_0.

Demostración. 7.1. Evidente.

7.2. Si $E = \emptyset$ es claro. Si $E \neq \emptyset$ y $u \in E$, existe un $x \in u$ y, por tanto, $u \in \varphi(x)$ según la definición de φ.

7.3. Si $u \in \varphi(x)$ se tiene $x \in u$. Por consiguiente, como u es un ideal, si $x \leqslant y$ se tiene que $y \in u$ y $u \in \varphi(y)$.

7.4. De 7.3 resulta $\varphi(x \wedge y) \subset \varphi(x) \cap \varphi(y)$. Por otra parte, si $u \in \varphi(x) \cap \varphi(y)$, entonces x, $y \in u$ y, en virtud de 4.2, se deduce $x \wedge y \in u$, luego $u \in \varphi(x \wedge y)$ según la definición de φ.

8. Proposición. *Son equivalentes:*

8.1. E_0 *tiene las propiedades:*

P_1. *Si* $x \neq 0$ *existe un* $u \in E$ *tal que* $x \in u$.

P_2. *Si* $x < y$ *existe un* $z \neq 0$ *tal que* $z \leqslant y$ *y* $x \wedge z = 0$.

8.2. $\varphi(x) \subset \varphi(y)$ *si y sólo si* $x \leqslant y$.

8.3. φ *es una aplicación inyectiva.*

Demostración. 8.1 $\Rightarrow$ 8.2. Por 7.3 basta probar que $\varphi(x) \not\subset \varphi(y)$ si $x \nleqslant y$. En efecto, si $x \nleqslant y$ entonces $x \wedge y < x$ y, por P_2, existe un $z \neq 0$ que satisface $z \leqslant x$ y $x \wedge y \wedge z = 0$. Por P_1 existe un $u \in E$ tal que $z \in u$. Como $z \leqslant x$ y u es un ideal, de 1.4 se deduce que $x \in u$. Por otra parte, $y \wedge z = x \wedge y \wedge z = 0$, luego $y \notin u$. Por tanto, existe un $u \in \varphi(x)$ que no pertenece a $\varphi(y)$ y resulta que $\varphi(x) \not\subset \varphi(y)$.

8.2 $\Rightarrow$ 8.3. Evidente.

8.3 $\Rightarrow$ 8.1. P_1: Si $x \neq 0$ es $\varphi(x) \neq \varphi(0) = \emptyset$, si φ es inyectiva. Entonces existe un $u \in \varphi(x)$ tal que $x \in u$.

P_2: Si $x < y$ resulta $\varphi(x) \subset \varphi(y)$ y $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ si φ es inyectiva. Entonces existe un $u \in \varphi(y) \setminus \varphi(x)$ y, por tanto, $y \in u$, $x \notin u$. Por 4.3 hay un $z' \in u$ tal que $z' \wedge x = 0$. Si $z = y \wedge z'$ se tiene $z \in u$, $z \neq 0$, $z \leqslant y$ y $x \wedge z = 0$.

9. Observación. La propiedad P_1 es equivalente a que, para todo $x \neq 0$ de E_0, se tenga $\varphi(x) \neq \emptyset$.

10. Definición. Se dice que $x \in E_0$ es un *átomo* si satisface:

10.1. $x \neq 0$.

10.2. Para todo $y \in E_0$ se tiene $x \leqslant y$ ó $x \wedge y = 0$.

11. Proposición. *Entre las proposiciones:*

11.1. x *es un átomo.*

11.2. *El conjunto* $u = \{y \in E_0 : y \geqslant x\}$ *pertenece a* E.

11.3. *Existe un único* $u \in E$ *tal que* $x \in u$, *es decir,* $\varphi(x) = \{u\}$, *hay las siguientes relaciones:* 11.1 *y* 11.2 *son equivalentes y cada una de ellas implica* 11.3. *Si además* φ *es inyectiva, las tres proposiciones son equivalentes.*

DEMOSTRACIÓN. 11.1 $\Rightarrow$ 11.2. Es evidente que u verifica 4.1 y 4.2 si x es un átomo. Si además $y \notin u$, se tiene $y \not\geqslant x$ y, por tanto, $x \wedge y = 0$. Como $x \in u$, esto prueba que u cumple 4.3.

11.2 $\Rightarrow$ 11.1. Evidentemente, si se verifica 11.2, x es distinto de 0. Si además $y \not\geqslant x$, se tiene $y \notin u = \{z \in E : z \geqslant x\}$. Como por hipótesis $u \in E$, por 4.3 existe un $z \in u$ tal que $y \wedge z = 0$ y se deduce que $x \wedge y = 0$.

11.2 $\Rightarrow$ 11.3. Supongamos que $x \in v$ y $v \in E$. Entonces, por ser v un ideal, de 1.4 resulta que $v \supset \{y \in E_0 : y \geqslant x\} = u$, de donde en virtud de la proposición 5 se deduce que $v = u$ si $u \in E$.

Finalmente, vamos a probar que 11.3 $\Rightarrow$ 11.1 si φ es inyectiva. En primer lugar, si se supone 11.3, resulta $x \neq 0$ por ser $x \in u$. Si además $y \not\geqslant x$, se tiene $x \wedge y < x$ y, por consiguiente, $\varphi(x \wedge y) \subset \varphi(x) = \{u\}$ y $\varphi(x \wedge y) \neq \{u\}$ si φ es inyectiva. Por tanto $\varphi(x \wedge y) = \varnothing = \varphi(0)$, de donde de nuevo por la inyectividad de φ resulta $x \wedge y = 0$.

12. COROLARIO.

12.1. *Si* x *es un átomo y* $x \leqslant z \in E_0$, *se tiene* $\varphi(z) \neq \varnothing$.

12.2. *Si para todo* $x \neq 0$ *de* E_0 *existe un átomo* $z_x \leqslant x$, *se verifica la propiedad* P_1.

DEMOSTRACIÓN. Evidente.

13. PROPOSICIÓN. *Son equivalentes:*

13.1. *Para todo* $a \in \Phi$, *existe un* $u \in E$ *tal que* $a \subset u$.

13.2. E_0 *verifica la propiedad* P_1 *y la siguiente:*

P_3. *Si* $(x_i)_{i \in I} \subset E_0$ *y, para toda parte finita* J *de* I, *existe un* $u_J \in E$ *tal que* $x_i \in u_J$ *para cada* $i \in J$, *existe un* $u \in E$ *que satisface* $x_i \in u$ *para todo* $i \in I$.

13.3. *Si* $(x_i)_{i \in I} \subset E_0$ *es tal que, para toda parte finita y no vacía* J *de* I, *se tiene* $\bigwedge_{i \in J} x_i \neq 0$, *existe un* $u \in E$ *que satisface* $x_i \in u$ *para todo* $i \in I$.

DEMOSTRACIÓN. 13.1 $\Rightarrow$ 13.2. Es claro que P_1 resulta de 13.1 tomando $a = \{x\}$ para $x \neq 0$ y que P_3 se verifica trivialmente si $I = \emptyset$. Sea ahora $I \neq \emptyset$ y $(x_i)_{i \in I} \subset E_0$ tal que, para toda parte finita J de I, existe un $u_J \in E$ con $x_i \in u_J$ para $i \in J$. Entonces, si J es no vacía, $u_J \in \bigcap_{i \in J} \varphi(x_i) = \varphi(\bigwedge_{i \in J} x_i)$ en virtud de 7.4 y resulta $\varphi(\bigwedge_{i \in J} x_i) \neq \emptyset$ y $\bigwedge_{i \in J} x_i \neq 0$. Sea

$$a = \{\bigwedge_{i \in J} x_i : J \text{ parte finita y no vacía de } I\}.$$

Es evidente que $a \in \Phi$. Entonces, por 13.1, existe un $u \in E$ tal que $a \subset u$, de donde se deduce que $x_i \in u$ para $i \in I$.

13.2 $\Rightarrow$ 13.3. Si $(x_i)_{i \in I}$ es tal que, para toda parte finita y no vacía J de I, se tiene $\bigwedge_{i \in J} x_i \neq 0$, por P_1 resulta que existe un $u_J \in E$ que satisface $\bigwedge_{i \in J} x_i \in u_J$, de donde se deduce $x_i \in u_J$ para todo $i \in J$ por ser u_J un ideal. Entonces, por P_3 existe un $u \in E$ tal que $x_i \in u$ para todo $i \in I$.

13.3 $\Rightarrow$ 13.1. Supongamos 13.3 y sea $a \in \Phi$. Entonces, para toda familia finita y no vacía $(x_i)_{i \in J}$ de a se tiene $\bigwedge_{i \in J} x_i \neq 0$, de donde por 13.3 se deduce que existe un $u \in E$ tal que $x \in u$ para todo $x \in a$, es decir, $a \subset u$.

14. PROPOSICIÓN. *Son equivalentes:*

14.1. *El axioma de elección.*

14.2. *El axioma de Zorn.*

14.3. *Cualquiera que sea el inf-semirretículo E_0, todo ideal propio (o base de ideal propio) está contenido en un ideal maximal.*

14.4. *Cualquiera que sea el retículo E_0, con primer elemento* 0 *y distinto de* $\{0\}$, *existe al menos un Λ-ideal maximal en E_0.*

DEMOSTRACIÓN.

14.1 $\Rightarrow$ 14.2. Resultado bien conocido.

14.2 $\Rightarrow$ 14.3. Basta tener en cuenta que el conjunto de los ideales propios de cualquier inf-semirretículo E_0, ordenado por inclusión es inductivo y, por tanto, todo ideal propio (o base de ideal propio) está contenido en un ideal maximal.

14.3 ⇒ 14.4. Evidente.

14.4 ⇒ 14.1. Sea $(A_i)_{i \in I}$ una familia de conjuntos no vacíos y sea E_1 el conjunto de las aplicaciones x, definidas en alguna parte finita J de I y con valores en $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, de modo que $x(i) \in A_i$ para todo $i \in J$. Entonces, si 0 es un conjunto no perteneciente a E_1 y ordenamos $E_0 = E_1 \cup \{0\}$ de forma que $x \leqslant y$ para todo $y \in E_0$ si $x = 0$ o x es una extensión de y $(\in E_0)$ si $x \neq 0$, resulta que E_0 es un retículo con primer elemento 0 y distinto de $\{0\}$. Supongamos ahora que en E_0 hay un Λ-ideal maximal u. Si $i \in I$ no perteneciese al dominio de ninguna de las aplicaciones $x \in u$ y se define y en $\{i\}$ de forma que $y(i) \in A_i$, cosa posible por ser $A_i \neq \emptyset$, resultaría el absurdo de que $x \wedge y \neq 0$ para todo $x \in u$ con $y \notin u$. Por tanto, para todo $i \in I$ existe algún $x \in u$ tal que i pertenece al dominio de x. Además, si $x, y \in u$ e i pertenece a los dominios de x e y, se tiene $x(i) = y(i)$ por ser $x \wedge y$ $(\neq 0)$ una extensión de x e y. Entonces, si definimos f de manera que $f(i) = x(i)$ para todo i perteneciente al dominio de algún $x \in u$, se obtiene una aplicación f de I en A tal que $f(i) \in A_i$ para todo $i \in I$ (1).

15. Observación. En contraste con la proposición 14, destacamos que en la axiomática de Zermelo-Fraenkel el axioma de elección no es equivalente al siguiente:

15.1. Todo ideal propio de un álgebra de Boole está contenido en un ideal primo (o maximal) (2).

16. Proposición. *Sea E_0 un retículo con primer elemento* 0 *y distinto de* $\{0\}$. *Entonces, entre las proposiciones:*

16.1. *Si $x \wedge z = 0 = y \wedge z$, se tiene $(x \vee y) \wedge z = 0$.*

16.2. *Si $u \in E$ y $x \vee y \in u$, se tiene $x \in u$ o $y \in u$, es decir, todo Λ-ideal maximal en E_0 es primo.*

16.3. $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \cup \varphi(y)$,

existen las siguientes relaciones: 16.1 *implica las otras dos,* 16.2 *y* 16.3, *que son además equivalentes. Si E_0 verifica la propiedad P_1 de*

---

(1) Una demostración análoga ha sido dada por Scott [6] para probar que 14.4 implica el axioma de maximalidad de Hausdorff para cadenas.

(2) Véase v. Dalen y Monna [8], págs. 34 y 61, y Rodríguez-Salinas y Bombal [5].

la proposición 8, *las tres son equivalentes. Si* φ *es inyectiva, cualquiera de las tres proposiciones implica que* E_0 *es distributivo.*

DEMOSTRACIÓN.

16.1 $\Rightarrow$ 16.2. Sea $u \in E$. Si $x \notin u$, $y \notin u$ por 4.3 existen x', $y' \in u$ tales que $x \wedge x' = y \wedge y' = 0$. Entonces $z = x' \wedge y' \in u$ y $z \wedge x = = 0 = z \wedge y$, de donde por 16.1 resulta $z \wedge (x \vee y) = 0$ y, por tanto, $x \vee y \notin u$ ya que $z \in u$.

16.2 $\Rightarrow$ 16.3. Por 7.3, $\varphi(x) \cup \varphi(y) \subset \varphi(x \vee y)$. Si $u \in \varphi(x \vee y)$ se tiene $x \vee y \in u$, de donde, en virtud de 16.2, resulta $x \in u$ o $y \in u$, es decir, $u \in \varphi(x) \cup \varphi(y)$.

16.3 $\Rightarrow$ 16.2. Si $u \in E$, $x \vee y \in u$ y se supone 16.3 resulta $u \in \varphi(x \vee y) = \varphi(x) \cup \varphi(y)$ y, por tanto, $u \in \varphi(x)$ o $u \in \varphi(y)$, es decir, $x \in u$ o $y \in u$.

Si E_0 verifica P_1 vamos a ver que 16.3 $\Rightarrow$ 16.1. Sea $x \wedge z = 0 = y \wedge z$, entonces

$$\begin{aligned}\varphi[(x \vee y) \wedge z] &= \varphi(x \vee y) \cap \varphi(z) = [\varphi(x) \cup \varphi(y)] \cap \varphi(z)\\ &= [\varphi(x) \cap \varphi(z)] \cup [\varphi(y) \cap \varphi(z)]\\ &= \varphi(x \wedge z) \cup \varphi(y \wedge z) = \varnothing\end{aligned}$$

y, por la observación 9, se deduce $(x \vee y) \wedge z = 0$.

Por último, si φ es inyectiva y se verifica 16.3, según hemos probado anteriormente se tiene

$$\varphi[(x \vee y) \wedge z] = \varphi(x \wedge z) \cup \varphi(y \wedge z) = \varphi[(x \wedge z) \vee (y \wedge z)],$$

y de la inyectividad de φ resulta $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$. Análogamente se prueba $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$.

17. PROPOSICIÓN. *Sea* E_0 *un inf-semirretículo completo que verifica* 13.3 (y, *por tanto,* 13.1 y 13.2). *Entonces son equivalentes:*

17.1. *Para toda familia* $(x_i)_{i\in I}$ *de elementos de* E_0, *se tiene* $\varphi(\bigwedge_{i\in I} x_i) = \bigcap_{i\in I} \varphi(x_i)$.

17.2. *Si* $(x_i)_{i\in I}$ *es tal que, para toda parte finita y no vacía* J *de* I, *se tiene* $\bigwedge_{i\in J} x_i \neq 0$, *resulta* $\bigwedge_{i\in I} x_i \neq 0$.

17.3. *Para todo* $u \in E$, $\Lambda u = \Lambda\{x : x \in u\}$ *pertenece a* u.

17.4. *Para todo* $u \in E$, *existe un átomo* $x_u \in E_0$ *tal que* $u = \{x : x \geqslant x_u\}$.

DEMOSTRACIÓN.

17.1 $\Rightarrow$ 17.2. Si $(x_i)_{i \in I} \subset E_0$ es tal que para toda parte finita y no vacía J de I, se tiene $\bigwedge_{i \in I} x_i \neq 0$, en virtud de 13.3 existe un $u \in E$ que satisface $x_i \in u$ para todo $i \in I$. Por tanto $u \in \bigcap_{i \in I} \varphi(x_i) = \varphi(\bigwedge_{i \in I} x_i)$ si se supone 17.1, y en consecuencia $\bigwedge_{i \in I} x_i \neq 0$.

17.2 $\Rightarrow$ 17.3. Sea $u \in E$, entonces $x = \bigwedge u \neq 0$ si se supone 17.2, de donde resulta que $a = \{y \in E_0 : y \geqslant x\}$ pertenece a Φ y $a \supset u$ y, por tanto, $x \in a = u$ según la proposición 5.

17.3 $\Rightarrow$ 17.4. Si $u \in E$ y $\bigwedge u \in u$, es obvio que $\bigwedge u$ es un átomo y $u = \{x \in E_0 : x \geqslant \bigwedge u\}$.

17.4 $\Rightarrow$ 17.1. Como $\varphi(\bigwedge_{i \in I} x_i) \subset \bigcap_{i \in I} \varphi(x_i)$ según 7.3, basta probar que $\bigcap_{i \in I} \varphi(x_i) \subset \varphi(\bigwedge_{i \in I} x_i)$. En efecto, si $u \in \bigcap_{i \in I} \varphi(x_i)$, se tiene $x_i \in u$ para todo $i \in I$. Entonces, si se supone 17.4, existe un átomo x_u tal que $u = \{x \in E_0 : x \geqslant x_u\}$ y, por consiguiente, $x_u \leqslant x_i$ para todo $i \in I$ y $x_u \leqslant \bigwedge_{i \in I} x_i$, de donde resulta $\bigwedge_{i \in I} x_i \in u$ y $u \in \varphi(\bigwedge_{i \in I} x_i)$.

Obsérvese que sólo se ha usado 13.3 en la demostración de 1.17 $\Rightarrow$ 17.2.

18. PROPOSICIÓN. *Sea E_0 un inf-semirretículo numerablemente completo que verifique* 13.3. *Entonces son equivalentes:*

18.1. *Para toda sucesión (x_n) de elementos de E_0 se tiene*

$$\varphi(\bigwedge_{1}^{\infty} x_n) = \bigcap_{1}^{\infty} \varphi(x_n).$$

18.2. *Para toda sucesión no creciente $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots$ con $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbf{N}$, se tiene $\bigwedge_{1}^{\infty} x_n \neq 0$.*

18.3. *Para todo $u \in E$ y toda sucesión (x_n) de elementos de u, se tiene $\bigwedge_{1}^{\infty} x_n \in u$.*

DEMOSTRACIÓN.

18.1 $\Rightarrow$ 18.2. Se prueba como en la proposición 17 utilizando 13.3.

18.2 $\Rightarrow$ 18.3. Sea $u \in E$ y (x_n) una sucesión de elementos de u. Si $y_n = \bigwedge_{1}^{n} x_k$ $(\in u)$, es obvio que $y_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Entonces, de 18.2 resulta $\bigwedge_1^\infty x_n = \bigwedge_1^\infty y_n \neq 0$. Por tanto, $\bigwedge_1^\infty x_n \neq 0$ para toda sucesión de elementos de u. Sea

$$a = \{\bigwedge_1^\infty x_n : x_n \in u \quad \forall\, n \in \mathbf{N}\} ;$$

es fácil ver que $a \in \Phi$ y $a \supset u$. Por tanto, según la proposición 5, se tiene $a = u$ y $\bigwedge_1^\infty x_n \in u$ para toda sucesión (x_n) de elementos de u.

18.3 $\Rightarrow$ 18.1. Trivial.

§ 2. REPRESENTACION DE INF-SEMIRRETICULOS EN LAS PARTES DE UN ESPACIO TOPOLOGICO

1. Definición. Sea E_0 un inf-semirretículo con primer elemento 0 y no reducido a éste. Entonces se dice que E_0 es un *ϱ-inf-semirretículo* si ϱ es una relación binaria en E_0 que satisface:

1.1. Para todo $x \in E_0$, existe $y \in E_0$ tal que $x \varrho y$.

1.1'. Para todo $x \in E_0$, existe $y \in E_0$ tal que $y \varrho x$.

1.2. Si $x \varrho y$, se tiene $x \leqslant y$.

1.3. Si $x \leqslant y$ e $y \varrho z$, se tiene $x \varrho z$.

1.3'. Si $x \varrho y$ e $y \leqslant z$, se tiene $x \varrho z$.

1.4. Si $x \varrho y$ y $x \varrho z$, se tiene $x \varrho (y \wedge z)$.

1.5. Si $x \varrho y$, existe $z \in E_0$ tal que $x \varrho z$ y $z \varrho y$.

1.6. Si $x \wedge y = 0$, existe $z \in E_0$ tal que $x \varrho z$ e $y \wedge z = 0$.

2. Observación. Si ϱ satisface las condiciones precedentes excepto 1.1' y 1.3', se ve fácilmente que la relación binaria ϱ', definida poniendo $x \varrho' y$ cuando $x = 0$ ó cuando existe un $z \in E_0$ tal que $x \varrho z$ y $z \leqslant y$, satisface todas las condiciones sin excepción y además se tiene $x \varrho' y$ si $x \varrho y$.

3. Proposición. *En todo ϱ-inf-semirretículo E_0 se verifican:*

3.1. $0 \varrho x$ *para todo* $x \in E_0$.

3.2. $(x \wedge y) \varrho (x' \wedge y')$ *si* $x \varrho x'$, $y \varrho y'$.

3.3. *Si* $x \wedge y = 0$, *existen* x', $y' \in E_0$ *tales que* $x \varrho x'$, $y \varrho y'$ *y* $x' \wedge y' = 0$.

DEMOSTRACIÓN.

3.1. Es consecuencia inmediata de 1.1′ y 1.3.

3.2. En efecto, como $x \wedge y \leqslant x$ y $x \wedge y \leqslant y$, de $x \varrho x'$, $y \varrho y'$, 1.3 y 1.4 resulta $(x \wedge y) \varrho (x' \wedge y')$.

3.3. Efectivamente, si $x \wedge y = 0$, de 1.6 se deduce que existen $x', y' \in E_0$ que satisfacen $x \varrho x'$, $y \wedge x' = 0$, $y \varrho y'$, $x' \wedge y' = 0$.

4. EJEMPLOS: 4.1. Todo inf-semirretículo E_0 con primer elemento 0 y distinto de $\{0\}$ se puede considerar canónicamente como un ϱ-inf-semirretículo para la relación binaria ϱ definida mediante:

$$x \varrho y \quad \text{si y sólo si} \quad x \leqslant y.$$

4.2. Si X es un espacio normal y E_0 es el retículo de los conjuntos cerrados de X, ordenado por inclusión, entonces E_0 es un ϱ-inf-semirretículo para la relación ϱ definida por:

$$x \varrho y \quad \text{si y sólo si} \quad y \text{ es un entorno de } x.$$

4.3. Si X es un espacio de Hausdorff localmente compacto y E_0 es el retículo de los conjuntos compactos de X, ordenado por inclusión, entonces E_0 es un ϱ-inf-semirretículo para la relación ϱ definida por:

$$x \varrho y \quad \text{si y sólo si} \quad y \text{ es un entorno de } x.$$

5. PROPOSICIÓN. *Sean, E_0 un ϱ-inf-semirretículo, E el conjunto de los ideales maximales de E_0 y φ la aplicación definida en* § 1.6. *Entonces,*

$$\mathcal{V}_u = \{\varphi(x) : \exists\, x' \in u \ni x' \varrho x\} \qquad (u \in E)$$

es una base de entornos de u para una topología T_ϱ sobre E, unívocamente determinada por ser la menos fina de las topologías tales que $\varphi(x)$ es un entorno de $\varphi(x')$ si $x' \varrho x$.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, en virtud de 1.1 $\mathcal{V}_u$ es no vacía para cada $u \in E$.

5.1. Si $\varphi(x) \in \mathcal{V}_u$ se tiene $u \in \varphi(x)$. En efecto, como entonces existe $x' \in u$ que verifica $x' \varrho x$ y, por 1.2, $x' \leqslant x$, se deduce que $x \in u$ y $u \in \varphi(x)$.

5.2. Si $\varphi(x)$, $\varphi(y) \in \mathcal{V}_u$, se tiene $\varphi(x) \cap \varphi(y) \in \mathcal{V}_u$. En efecto, como existen $x', y' \in u$ tales que $x' \varrho x$ e $y' \varrho y$, por la proposición 3.2

resulta $(x' \wedge y') \varrho (x \wedge y)$. Entonces, por ser $x' \wedge y' \in u$, se deduce que $\varphi(x) \cap \varphi(y) = \varphi(x \wedge y) \in \mathcal{V}_u$.

5.3. Si $\varphi(x) \in \mathcal{V}_u$, existe $\varphi(y) \in \mathcal{V}_u$ tal que, para todo $v \in \varphi(y)$, se tiene $\varphi(y) \in \mathcal{V}_v$. En efecto, como hay un $z \in u$ tal que $z \varrho x$, en virtud de 1.5 existe $y \in E_0$ que verifica $z \varrho y$ e $y \varrho x$. Entonces $\varphi(y) \in \mathcal{V}_u$. Además, si $v \in \varphi(y)$ se tiene $\varphi(x) \in \mathcal{V}_v$ puesto que $y \in v$ e $y \varrho x$.

La última parte de la demostración de 5.3 prueba también que $\varphi(x)$ es un entorno de $\varphi(x')$ si $x' \varrho x$. Finalmente, si T' es una topología sobre E tal que $\varphi(x)$ es un entorno de $\varphi(x')$ cuando $x' \varrho x$, y si $\mathcal{V}_u'$ es el sistema de los entornos de u en (E, T'), resulta evidentemente

$$\mathcal{V}_u' \supset \{\varphi(x) : \exists\, x' \in u \ni x' \varrho x\} = \mathcal{V}_u$$

para todo $u \in E$ y, por tanto, T_ϱ es menos fina que T'.

Nótese que no se ha utilizado 1.6 en la demostración.

6. Proposición. *El espacio topológico E o (E, T_ϱ) es un espacio T_3 en el que todo $\varphi(x)$ es un conjunto cerrado.*

Demostración. 6.1. (E, T_ϱ) es un espacio de Hausdorff. Sean u, v dos puntos distintos de E. Entonces existe $x' \in u$ tal que $x' \notin v$. Por tanto, hay un $y' \in v$ que verifica $x' \wedge y' = 0$. Por 3,3 existen x, $y \in E_0$ tales que $x' \varrho x$, $y' \varrho y$ y $x \wedge y = 0$. Luego $\varphi(x) \in \mathcal{V}_u$, $\varphi(y) \in \mathcal{V}_u$ y $\varphi(x) \cap \varphi(y) = \varphi(x \wedge y) = \emptyset$, y (E, T_ϱ) es un espacio de Hausdorff.

6.2. Todo $\varphi(x)$ es un conjunto cerrado. En efecto, si $u \notin \varphi(x)$ hay un $y \in u$ tal que $x \wedge y = 0$. Por 1.6 existe un $z \in E_0$ que verifica $y \varrho z$ y $x \wedge z = 0$. Por tanto, $\varphi(z) \in \mathcal{V}_u$ y $\varphi(x) \cap \varphi(z) = \emptyset$ y se concluye que $\varphi(x)$ es cerrado.

6.3. (E, T_ϱ) es un espacio regular. Por la definición de $\mathcal{V}_u$, basta tener en cuenta que, según 6.2, todo $\varphi(x)$ es un conjunto cerrado.

7. Definición. Sea E_0 un ϱ-inf-semirretículo y x, $y \in E_0$. Si existe un elemento $y' \leqslant x$ tal que:

7.1. $$z \wedge y' = 0 \quad \text{y} \quad z \leqslant x$$

es equivalente a

7.2. $$z \varrho y \quad \text{y} \quad z \leqslant x,$$

designaremos a y' por $x - y^0$.

8. OBSERVACIÓN. 8.1. Si E_0 es el ϱ-inf-semirretículo del ejemplo 4.2 ó del ejemplo 4.3, existe siempre $x - y^0$ y coincide con $x \setminus \operatorname{Int}(y)$.

8.2. Si E_0 es un álgebra de Boole (con o sin elemento unidad), $x - y^0$ coincide con $x - x \wedge y$.

9. PROPOSICIÓN. *Sea E_0 un ϱ-inf-semirretículo. Entonces, si existe $y' = x - y^0$, se tiene*

$$\varphi(y') = \varphi(x) / \setminus \bigcup \{\varphi(z) : z \varrho y, \; z \leqslant x\} = \varphi(x) \setminus \varphi(y)^0,$$

en donde A^0 es el interior de A.

DEMOSTRACIÓN. Sea $y' = x - y^0$. Si $z \varrho y$ y $z \leqslant x$, por la definición 7 se tiene $z \wedge y' = 0$ y $z \leqslant x$. Por tanto,

$$\varphi(z) \cap \varphi(y') = \varphi(z \wedge y') = \emptyset \quad \text{y} \quad \varphi(z) \subset \varphi(x),$$

y resulta

$$\varphi(z) \subset \varphi(x) \setminus \varphi(y')$$

y

$$\bigcup \{\varphi(z) : z \varrho y, \; z \leqslant x\} \subset \varphi(x) \setminus \varphi(y').$$

Recíprocamente, si $u \in \varphi(x) \setminus \varphi(y')$, $x \in u$ e $y' \notin u$. Por tanto, existe $z' \in u$ tal que $y' \wedge z' = 0$. Si $z = x \wedge z'$, se tiene $z \in u$, $z \leqslant x$ y $z \wedge y' = 0$, luego $u \in \varphi(z)$, $z \varrho y$ y $z \leqslant x$ y, por consiguiente,

$$\varphi(x) \setminus \varphi(y') \subset \bigcup \{\varphi(z) : z \varrho y, \; z \leqslant x\}$$

y por tanto

$$\varphi(y') = \varphi(x) \setminus \bigcup \{\varphi(z) : z \varrho y, \; z \leqslant x\}$$

puesto que $y' \leqslant x$. Además es fácil ver que

$$\varphi(x) \cap \varphi(y)^0 = \bigcup \{\varphi(z) : z \varrho y, \; z \leqslant x\}.$$

10. COROLARIO. *Sea E_0 un ϱ-inf-semirretículo. Entonces, si φ es inyectiva, se verifican:*

10.1. *Existe a lo más un elemento $y' = x - y^0$.*

10.2. *Si $x_1 \leqslant x_2$ e $y_1 \geqslant y_2$ y existen $x_1 - y_1^0$ y $x_2 - y_2^0$, se tiene*

$$x_1 - y_1^0 \leqslant x_2 - y_2^0.$$

10.3. *Si existe* $x - y^0$, *se tiene* $x - y^0 \neq 0$ *si* $y \not\geqslant x$ *e incluso cuando* $y \geqslant x$ *si* $\varphi(x) \not\subset \varphi(y)^0$.

Demostración. 10.1. Evidente.

10.2. Como

$$\varphi(x_1 - y_1^0) = \varphi(x_1) \setminus \varphi(y_1)^0 \subset \varphi(x_2) \setminus \varphi(y_2)^0 = \varphi(x_2 - y_2^0),$$

de la inyectividad de φ y de la proposición 8 de § 1 resulta

$$x_1 - y_1^0 \leqslant x_2 - y_2^0.$$

10.3. En efecto,

$$\varphi(x - y^0) = \varphi(x) \setminus \varphi(y)^0 \supset \varphi(x) \setminus \varphi(y) \neq \emptyset$$

si $y \not\geqslant x$ y φ es inyectiva, y

$$\varphi(x - y^0) = \varphi(x) \setminus \varphi(y)^0 \neq \emptyset$$

si $\varphi(x) \not\subset \varphi(y)^0$.

11. Definición. Si $x, y, y' \in E_0$, designaremos por $\psi(x, y, y')$ el conjunto de todos los elementos $x' \leqslant x$ de E_0 que satisfacen:

11.1. $x' \wedge y' = 0$.

11.2. Si $z \wedge x' = 0$ y $z \leqslant x$, se tiene $z \leqslant y$.

12. Proposición. *Sea* E_0 *un* ϱ-*inf-semirretículo. Entonces, si* $y' \varrho y$ *y existe* $x' = x - y^0$, *se tiene* $x' \in \psi(x, y, y')$.

Demostración. Es evidente puesto que $z \leqslant y$ si $z \varrho y$.

13. Proposición. *Si* $x' \in \psi(x, y, y')$, *se tiene* $\varphi(x) \subset \varphi(x') \cup \varphi(y)$.

Demostración. Bastará probar que si $x \in u$ y $x' \notin u$ se verifica $y \in u$. En efecto, si $x \in u$ y $x' \notin u$, existe un $z' \in u$ tal que $x' \wedge z' = 0$. Entonces $z = x \wedge z' \in u$ y se deduce, sucesivamente, que $z \wedge x' = 0$, $z \leqslant x$, $z \leqslant y$ e $y \in u$.

14. Proposición. *Sea* E_0 *un retículo distributivo. Entonces* $x' \in \psi(x, y, y')$ *si se verifican:*

14.1. $x' \wedge y' = 0$

14.2. $x \leqslant x' \vee y$ y $x' \leqslant x$.

Recíprocamente, si φ *es inyectiva y* $x' \in \psi(x, y, y')$, *se cumplen* 14.1 *y* 14.2.

Demostración. Supongamos que se verifican 14.1 y 14.2. Entonces, $x' \leqslant x$ y $x' \wedge y' = 0$ y si $z \wedge x' = 0$ y $z \leqslant x$ se tiene

$$z = z \wedge x \leqslant z \wedge (x' \vee y) = (z \wedge x') \vee (z \wedge y) = z \wedge y$$

y, por tanto, $z \leqslant y$.

Recíprocamente, si $x' \in \psi(x, y, y')$, se verifican 14.1, $x' \leqslant x$ y, por la proposición 13,

$$\varphi(x) \subset \varphi(x') \cup \varphi(y) \subset \varphi(x' \vee y),$$

de donde por la proposición 8 de § 1 resulta $x \leqslant x' \vee y$ si se supone φ inyectiva.

15. Proposición. *Sea* E_0 *un retículo distributivo con primero y último elemento:* 0 *y* e, *y tal que si* $x \wedge y = 0$ *existen dos elementos* $x', y' \in E_0$ *que satisfacen:*

15.1. $x \wedge x' = 0,\ y \wedge y' = 0,\ x' \vee y' = e.$

Entonces, si ϱ *es la relación binaria definida en* E_0 *mediante:*

15.2. $$x \varrho y \Longleftrightarrow \exists\, z \in E_0 \ni x \wedge z = 0,\ y \vee z = e,$$

E_0 *es un* ϱ*-inf-semirretículo con la propiedad de que* $\psi(x, y, y') \neq \emptyset$ *si* $y' \varrho y$.

Demostración. En primer lugar, vamos a comprobar las condiciones de la definición 1:

1.1. Para todo $x \in E_0$, $x \varrho e$.

1.1'. Para todo $x \in E_0$, $0 \varrho x$.

1.2. Si $x \varrho y$ se tiene $x \leqslant y$. En efecto, si $x \varrho y$ existe un $z \in E_0$ que satisface $x \wedge z = 0$ y $z \vee y = e$ y, por tanto,

$$x = x \wedge e = (x \wedge z) \vee (x \wedge y) = x \wedge y$$

y $x \leqslant y$.

1.3. Si $x \leqslant y$ e $y \varrho z$, se tiene $x \varrho z$. En efecto, si $x \leqslant y$ e $y \varrho z$, existe un $s \in E_0$ tal que $y \wedge s = 0$ y $s \vee z = e$ y, por tanto, $x \wedge s = 0$, $s \vee z = e$ y $x \varrho z$.

1.3′. Si $x \varrho y$ e $y \leqslant z$, se tiene $x \varrho z$. En efecto, si $x \varrho y$ e $y \leqslant z$, existe un $s \in E_0$ tal que $x \wedge s = 0$ y $s \vee y = e$ y, por tanto, $x \wedge s = 0$, $s \vee z = e$ y $x \varrho z$.

1.4. Si $x \varrho y$ y $x \varrho z$, se tiene $x \varrho (y \wedge z)$. En efecto, si $x \varrho y$ y $x \varrho z$, existen y', $z' \in E_0$ que satisfacen $x \wedge y' = 0$, $y' \vee y = e$, $x \wedge z' = 0$ y $z' \vee z = e$ y, por tanto, para $x' = y' \vee z'$ se verifican

$$x \wedge x' = (x \wedge y') \vee (x \wedge z') = 0$$

y

$$x' \vee (y \wedge z) = (x' \vee y) \wedge (x' \vee z) = e,$$

de donde resulta $x \varrho (y \wedge z)$.

1.5. Si $x \varrho y$ existe $z \in E_0$ tal que $x \varrho z$ y $z \varrho y$. En efecto, si $x \varrho y$ existe $z' \in E_0$ que verifica $x \wedge z' = 0$ y $z' \vee y = e$ y, por tanto, por 15.1 existen x', $z \in E_0$ que satisfacen $x \wedge x' = 0$, $z \wedge z' = 0$ y $x' \vee z = e$ y, por consiguiente, $x \varrho z$ y $z \varrho y$.

1,6, Si $x \wedge y = 0$, existe un $z \in E_0$ tal que $x \varrho z$ e $y \wedge z = 0$. En efecto, si $x \wedge y = 0$, en virtud de 15.1 existen x', $y' \in E_0$ que verifican $x \wedge x' = 0$, $y \wedge y' = 0$ y $x' \vee y' = e$ y, por tanto, $x \varrho z$ e $y \wedge z = 0$ para $z = y'$.

Finalmente, $\psi(x, y, y') \neq \emptyset$ si $y' \varrho y$. En efecto, si $y' \varrho y$, hay un $s \in E_0$ tal que $y' \wedge s = 0$ y $s \vee y = e$ y, por tanto, para $x' = x \wedge s$ se tiene $x' \wedge y' = 0$, $x' \leqslant x$ y

$$x' \vee y = (x \vee y) \wedge (s \vee y) = x \vee y$$

y, si $z \wedge x' = 0$ y $z \leqslant x$, resulta

$$z \leqslant (z \wedge x) \vee (z \wedge y) = z \wedge (x \vee y) = z \wedge (x' \wedge y) =$$
$$= (z \wedge x') \vee (z \wedge y) = z \wedge y \leqslant y.$$

16. Ejemplos:

16.1. Sea e un espacio seminormal con una base de Wallman E_0 para los conjuntos cerrados de e, caracterizada por las condiciones:

a) E_0 es un retículo para la ordenación por inclusión.

b) Para todo entorno w de cada $p \in e$ existe un $x \in E_0$ tal que $p \in x$ y $x \subset w$.

c) Si x, $y \in E_0$ son disjuntos, existen x', $y' \in E_0$ tales que $x \cap x' = 0$, $y \cap y' = 0$ y $x' \cup y' = e$.

Entonces E_0 es un ϱ-inf-semirretículo para la relación ϱ definida por 15.2, en donde $\psi(x, y, y') \neq \emptyset$ si $y' \varrho y$.

Si e es un espacio seminormal T_1 y si E_0' es una base de Wallman para e es fácil comprobar que la colección E_0 de los conjuntos x que son unión de un conjunto $x' \in E_0'$ y de un conjunto finito es una base de Wallman. Por consiguiente, no hay inconveniente en suponer que una base de Wallman E_0 contiene los conjuntos finitos.

16.2. Si e es un espacio completamente regular de Hausdorff, la colección E_0 de los conjuntos $\{p \in e : f(p) = 0\}$ de los ceros de las funciones reales continuas f sobre e es una base de Wallman y, por tanto, E_0 es un ϱ-inf-semirretículo para la relación ϱ definida por 15.2 (3).

16.3. Si e es un espacio regular stoniano, esto es, tal que el interior de todo conjunto cerrado es también cerrado, entonces la colección E_0 de los conjuntos que son simultáneamente abiertos y cerrados es una base de Wallman y, por tanto, E_0 es un ϱ-inf-semirretículo para la relación ϱ definida por 15.2.

17. PROPOSICIÓN. *Sea E_0 ϱ-inf-semirretículo en el que todo ideal (propio) esté contenido en un ideal maximal. Entonces, si $x \in E_0$ y $\psi(x, y, y')$ es no vacío siempre que $y' \varrho y$, el conjunto $\varphi(x)$ es compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ un cubrimiento abierto de $\varphi(x)$. Sea $A = \{(u_i, x_i', y_i, y_i') : i \in I\}$ el conjunto de todos los sistemas tales que $u_i \in \varphi(x)$, $y_i' \in u_i$, $y_i' \varrho y_i$, $\varphi(y_i)$ esté contenido en algún U_λ y $x_i' \in \psi(x, y_i, y_i')$. Es claro que, para todo $u \in \varphi(x)$ existe un $\varphi(y) \in V_u$ contenido en algún U_λ y hay dos elementos x', $y' \in E_0$ que verifican $y' \in u$, $y' \varrho y$ y $x' \in \psi(x, y, y')$ por ser por hipótesis este conjunto no vacío y, por tanto, $u = u_i$ para algún $i \in I$.

Supongamos que $\varphi(x)$ no se puede cubrir mediante un número finito de U_λ y, por consiguiente, $\varphi(x) \not\subset \bigcup_{i \in J} \varphi(y_i)$ para toda parte finita J de I. Entonces, como según la proposición 13 se tiene $\varphi(x_i') \supset \varphi(x) \setminus \varphi(y_i)$, resulta

$$\varphi(\bigwedge_{i \in J} x_i') = \bigcap_{i \in J} \varphi(x_i') \supset \varphi(x) \,/\, \bigcup_{i \in J} \varphi(y_i) \neq \emptyset$$

(3) Véase Willard [9], págs. 142 y 143.

y $\bigwedge_{i \in J} x_i' \neq \emptyset$ para toda parte finita y no vacía J de I. Como por hipótesis todo ideal está contenido en un ideal maximal, de las proposiciones 2, 5 y 13 de § 1 se deduce que hay un $u \in E$ que satisface $x_i' \in u$ para todo $i \in I$ y, por consiguiente, $x \in u$ y $u \in \varphi(x)$ por ser $x_i' \leqslant x$. Como por otro lado, según hemos probado anteriormente, existe un $i \in I$ tal que $u = u_i$, resulta $x_i' \wedge y_i' \in u$ lo que es absurdo puesto que $x_i' \wedge y_i' = 0$ por ser $x_i' \in \psi(x, y_i, y_i')$. Luego $\varphi(x)$ se puede cubrir por un número finito de U_λ y se deduce que es compacto.

18. Proposición. *Sea x un elemento de un ϱ-inf-semirretículo E_0 tal que $\psi(x, y, y') \neq \emptyset$ siempre que $y' \varrho y$. Entonces, si F es un conjunto cerrado contenido en $\varphi(x)$, F es la intersección de todos los conjuntos $\varphi(x')$ que le contienen:*

$$F = \bigcap \{\varphi(x') : \varphi(x') \supset F\}.$$

Demostración. Evidentemente,

$$F \subset \bigcap \{\varphi(x') : \varphi(x') \supset F\} \subset \varphi(x).$$

Por otra parte, si $u \in \varphi(x) \setminus F$, existe un $\varphi(y) \in \mathcal{V}_u$ tal que $\varphi(y) \cap F = \emptyset$. Como $\varphi(y) \in \mathcal{V}_u$ existen dos elementos x', $y' \in E_0$ que verifican $y' \in u$, $y' \rho y$ y $x' \in \psi(x, y, y')$ ya que, por hipótesis, este conjunto es no vacío. Entonces, según la proposición 13, se tiene

$$F \subset \varphi(x) \setminus \varphi(y) \subset \varphi(x')$$

y $u \notin \varphi(x')$ por ser $y' \in u$ y $x' \wedge y' = 0$.

19. Proposición. *Sea x un elemento de un ϱ-inf-semirretículo E_0 tal que $\varphi(x)$ es compacto y todo subconjunto cerrado F de $\varphi(x)$ es intersección de una colección de conjuntos $\varphi(x')$. Entonces, si φ es inyectiva, se tiene $\psi(x, y, y') \neq \emptyset$ siempre que $y' \varrho y$.*

Demostración. En efecto, si $y' \varrho y$, resulta $\varphi(y') \subset \varphi(y)^0$ y, por tanto, $F = \varphi(x) \setminus \varphi(y)^0$ y $\varphi(y')$ son disjuntos. Entonces, como $\{\varphi(x') : \varphi(x') \supset F,\ x' \leqslant x\}$ es una familia filtrante $(\supset)$ de subconjuntos cerrados del conjunto compacto $\varphi(x)$ y

$$\varphi(y') \cap \bigcap \{\varphi(x') : \varphi(x') \supset F,\ x' \leqslant x\} = \varphi(y') \cap [\varphi(x) \setminus \varphi(y)^0] = \emptyset,$$

se deduce que existe un $x' \leqslant x$ tal que

$$\varphi(x') \supset F \supset \varphi(x) \setminus \varphi(y)$$

y

$$\varphi(x' \wedge y') = \varphi(x') \cap \varphi(y') = \emptyset.$$

Luego $x' \wedge y' = 0$ por la inyectividad de φ y, si $z \wedge x' = 0$ y $z \leqslant x$, resulta $\varphi(z) \cap \varphi(x') = \emptyset$, $\varphi(z) \subset \varphi(x)$ y

$$\varphi(z) \subset \varphi(x) \setminus \varphi(x') \subset \varphi(y)$$

y, por consiguiente, $z \leqslant y$ en virtud de la proposición 8 de § 1, $x' \in \psi(x, y, y')$ y $\psi(x, y, y') \neq \emptyset$.

20. Proposición. *Sea E_0 un ϱ-inf-semirretículo en el que todo ideal (propio) esté contenido en un ideal maximal y tal que, para todo $x \in E_0$, $\psi(x, y, y') \neq \emptyset$ siempre que $y' \varrho y$. Entonces:*

20.1. *Todo conjunto $\varphi(x)$ es compacto.*

20.2. *E es localmente compacto y de Hausdorff.*

20.3. *Si E_0 es un retículo, los conjuntos compactos de E son, justamente, las intersecciones de las colecciones no vacías de conjuntos $\varphi(x)$ $(x \in E_0)$. En particular, E es compacto si y sólo si E_0 tiene un elemento e tal que $E = \varphi(e)$.*

Recíprocamente, si E_0 es un ϱ-inf-semirretículo tal que φ es inyectiva y E es un espacio localmente compacto en donde los conjuntos compactos son, justamente, las intersecciones de las colecciones no vacías de conjuntos $\varphi(x)$ $(x \in E_0)$, resulta que todo ideal (propio) de E_0 está contenido en un ideal maximal y, para todo $x \in E_0$ se tiene $\psi(x, y, y') \neq \emptyset$ siempre que $y' \varrho y$.

Demostración. Para demostrar la primera parte basta probar, según las proposiciones 6, 17 y 18, que todo compacto $K \subset E$ está contenido en algún $\varphi(x)$. En efecto, como es evidente que K se puede cubrir mediante un número finito de conjuntos $\varphi(x_i)$:

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} \varphi(x_i),$$

se deduce que K está contenido en $\varphi(x)$ para $x = \bigvee_{i=1}^{n} x_i$.

Recíprocamente, si φ es inyectiva y E es un espacio en el que los conjuntos compactos son las intersecciones de las colecciones no vacías de conjuntos $\varphi(x)$ $(x \in E_0)$, resulta de la proposición 19 que $\psi(x, y, y') \neq \emptyset$ siempre que $y' \varrho y$. Además, si a es un ideal propio (o una base de ideal propio) de E_0, entonces

$$K = \bigcap \{\varphi(x) : x \in a\{$$

es, evidentemente, un conjunto compacto no vacío y, por tanto, existe un $u \in K$ tal que $x \in u$ para todo $x \in a$, es decir, $a \subset u$.

21. Definición. Un retículo E_0 se dice un *ϱ-retículo* si es un ϱ-inf-semirretículo tal que

1.4′. Si $y \varrho x$ y $z \varrho x$, se tiene $(y \vee z) \varrho x$.

Entonces, $(x \vee y) \varrho (x' \vee y')$ si $x \varrho x'$, $y \varrho y'$.

22. Observación. Si E_0 es un ϱ-inf-semirretículo y también un retículo, se prueba fácilmente que, si ϱ' es la relación definida poniendo $x \varrho' y$ cuando y sólo cuando existen un número finito n de $x_i \in E_0$ que satisfacen $x \leqslant \bigvee_1^n x_i$ y $x_i \varrho y$ para $i = 1, 2, ..., n$, E_0 es un ϱ'-retículo.

23. Proposición. *Sea E_0 un ϱ-retículo en donde todo Λ-ideal maximal es primo. Entonces:*

23.1. *Si V es un entorno de un conjunto compacto K de E, existen dos elementos $x, x' \in E_0$ tales que $x \varrho x'$ y $K \subset \varphi(x) \subset \varphi(x') \subset V$.*

23.2. *Si φ es inyectiva y $\varphi(x)$ es compacto, $\varphi(x')$ es un entorno de $\varphi(x)$ si y sólo si $x \varrho x'$.*

23.3. *Si φ es inyectiva y $\varphi(x)$ es compacto y abierto, se tiene $x \varrho x$.*

Demostración. 23.1. Sea $\{(u_i, x_i'', x_i, x_i') : i \in I\}$ el conjunto de todos los sistemas tales que $u_i \in K$, $x_i'' \in u_i$, $x_i'' \varrho x_i$, $x_i \varrho x_i'$ y $\varphi(x_i') \subset V$. En virtud de 1.5 es obvio que, para todo $u \in K$, existe un $i \in I$ para el cual $u = u_i$. Entonces, por ser K compacto y $\{\varphi(x_i)^0 : i \in I\}$ un cubrimiento abierto de K, existe una parte finita J de I tal que

$$K \subset \bigcup_{i \in J} \varphi(x_i) \subset \varphi(\bigvee_{i \in J} x_i).$$

Como además $x_i \varrho x_i'$ y $\varphi(x_i') \subset V$, para $x = \bigvee_{i \in J} x_i$ y $x' = \bigvee_{i \in J} x_i'$ resulta $K \subset \varphi(x)$, $x \varrho x'$ y

$$\varphi(x') = \bigcup_{i \in J} \varphi(x_i') \subset V$$

según la proposición 16 de § 1 puesto que, por hipótesis, todo Λ-ideal maximal u de E_0 es primo.

23.2. Si se aplica 23.1 a $K = \varphi(x)$ y $V = \varphi(x')$, cuando $\varphi(x')$ es un entorno de $\varphi(x)$, se deduce que hay dos elementos y, $y' \in E_0$ que satisfacen $y \varrho y'$ y

$$\varphi(x) \subset \varphi(y) \subset \varphi(y') \subset \varphi(x').$$

Entonces, por ser φ inyectiva, $x \leqslant y \leqslant y' \leqslant x'$, de donde por 1.3 y 1.3' resulta $x \varrho x'$. Recíprocamente, si $x \varrho x'$ es claro que $\varphi(x')$ es un entorno de $\varphi(x)$.

23.3. Es consecuencia inmediata de 23.2.

24. PROPOSICIÓN. *(Teorema de representación de Stone). Sea E_0 un álgebra de Boole (con o sin elemento unidad) tal que todo Λ-ideal (propio) esté contenido en un ideal maximal. Entonces, existe un espacio de Hausdorff, localmente compacto y totalmente disconexo, E, y un isomorfismo φ de E_0 en el álgebra de Boole de los conjuntos compacto-abiertos de E. Además E es compacto si y sólo si E tiene elemento unidad.*

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia inmediata de las proposiciones 8 y 16 de § 1 y de las proposiciones 20 y 23 de esta sección.

25. PROPOSICIÓN. *(Teorema de compactificación de Wallman). Sea e un espacio T_4 en donde todo Λ-ideal (propio) del retículo E_0 de los conjuntos cerrados de e está contenido en un ideal maximal. Entonces existe un espacio de Hausdorff compacto E que contiene a e y tal que los conjuntos cerrados de E son, justamente, las intersecciones de las clausuras $\varphi(x)$ en E de los subconjuntos cerrados x de e, y un conjunto V de E es un entorno de un compacto K si y sólo si existe un $x \in E_0$ con la propiedad de que $\varphi(x) \subset V$ y $\varphi(x)$ es un entorno de K.* [2].

[4] Véase Willard [9], pág. 142. Obsérvese que la compactificación de Wallman expuesta en esta obra, coincide con la de este teorema cuando E es un espacio T_4, según se deduce de las proposiciones 12 y 18 de esta sección.

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia inmediata de las proposiciones 8, 11 y 16 de § 1 y de las proposiciones 20 y 23 de esta sección.

26. PROPOSICIÓN. *Sea E_0 un ϱ-retículo de partes de un conjunto X tal que:*

26.1. *Todo Λ-ideal (propio) de E_0 está contenido en un ideal maximal.*

26.2. *Toda parte finita x de X pertenece a E_0*

26.3. $\psi(x, y, y') \neq \emptyset$ *siempre que $y' \varrho y$.*

Entonces existe un espacio de Hausdorff localmente compacto E con las propiedades:

26.1'. *E contiene a X y X es denso en E.*

26.2'. *La aplicación φ de E_0 en E que asigna a cada $x \in E_0$ su clausura $\varphi(x)$ en E es un isomorfismo reticular de E_0 sobre un cierto retículo $\mathcal{K}_0$ de compactos de E.*

26.3'. *Los conjuntos compactos de E son, precisamente, las intersecciones de las colecciones no vacías de conjuntos $\varphi(x) \in \mathcal{K}_0$. En particular, E es compacto si y sólo si $X \in E_0$.*

26.4'. *V es un entorno de un compacto K de E si y sólo si existen dos conjuntos x, $x' \in E_0$ tales que $x \varrho x'$ y $K \subset \varphi(x) \subset \varphi(x') \subset V$.*

26.5'. *Si x, $x' \in E_0$, $\varphi(x')$ es un entorno de $\varphi(x)$ si y sólo si $x \varrho x'$.*

DEMOSTRACIÓN. Como la proposición anterior, esta proposición es consecuencia inmediata de las proposiciones 8, 11 y 16 de §1 y de las proposiciones 20 y 23 de esta sección si además se tiene en cuenta que la clausura en E del conjunto $\bigcup \{\varphi(\{p\}) : p \in x\}$, que se identifica con x, es exactamente $\varphi(x)$ si $x \in E_0$.

27. PROPOSICIÓN. *Sea E_0 un ϱ-retículo completo con las propiedades:*

27.1. *Todo Λ-ideal (propio) está contenido en un ideal maximal.*

27.2. *Todo Λ-ideal maximal es primo.*

27.3. *La aplicación φ es inyectiva.*

27.4. *Si $(x_i)_{i \in I}$ es una familia de elementos de E_0 tal que, para toda parte finita y no vacía J de I se tiene $\bigwedge_{i \in J} x_i \neq 0$, resulta $\bigwedge_{i \in I} x_i \neq 0$.*

Entonces, para todo compacto K de E, existe un $x' \in E_0$ para el que $\varphi(x') = K$ y, para cada $x \in E_0$, son equivalentes:

27.1'. *Para todo $y \in E_0$, existe $x - y^0$.*

27.2'. *$\varphi(x)$ es compacto.*

27.3'. *Para cada familia $(x_i)_{i\in I}$ $(\subset E_0)$ con $x_i \leqslant x$ para $i \in I$, se tiene $\varphi(\bigvee_{i\in I} x_i) = \overline{\bigcup_{i\in I}\varphi(x_i)}$.*

27.4'. *Para cada familia $(x_i)_{i\in I}$ $(\subset E_0)$ con $x_i \leqslant x$ para $i \in I$ y para todo par $y, y' \in E_0$ con $y' \varrho y$ y $x_i \wedge y = 0$ para todo $i \in I$, se tiene $y' \wedge (\bigvee_{i\in I} x_i) = 0$.*

Demostración. Como en la proposición 20 se prueba que todo compacto K de E está contenido en algún $\varphi(x')$ $(x' \in E_0)$. Sea

$$x = \Lambda \{x' : \varphi(x') \supset K\}.$$

Entonces en virtud de la proposición 17 de § 1 se tiene

$$\varphi(x) = \bigcap \{\varphi(x') : \varphi(x') \supset K\} \supset K.$$

Sean $u \in \varphi(x) \setminus K$ y $\{(u_i, x_i) : i \in I\}$ el conjunto de todos los pares (u_i, x_i) tales que $u_i \in K$ y $\varphi(x_i)$ es un entorno de u_i que no contiene a u: $u \notin \varphi(x_i)$. Es obvio que existe una parte finita J de I tal que

$$K \subset \bigcup_{i\in J}\varphi(x_i) = \varphi(x')$$

para $x' = \bigvee_{i\in J} x_i$ en virtud de la proposición 16 de § 1 y de 27.2.

Luego

$$u \in \varphi(x) \subset \varphi(x') = \bigcup_{i\in J}\varphi(x_i)$$

que es absurdo puesto que $u \notin \varphi(x_i)$ para todo $i \in I$. Por consiguiente, $\varphi(x) \setminus K = \varnothing$ y $K = \varphi(x)$.

27.1' $\Rightarrow$ 27.2'. Resulta de las proposiciones 12 y 20.

27.2' $\Rightarrow$ 27.1'. Sean $\varphi(x)$ compacto y

$$K = \varphi(x) \setminus \varphi(y)^0,$$

entonces K es compacto y, según acabamos de probar, existe un $y' \in E_0$ tal que

$$\varphi(x) \setminus \varphi(y)^0 = \varphi(y'),$$

de donde por la inyectividad de φ y la proposición 23 se deduce que son equivalentes:

$$z \wedge y' = 0, \quad z \leqslant x,$$

$$\varphi(z) \subset \varphi(x) \setminus \varphi(y') = \varphi(x) \cap \varphi(y)^0$$

y

$$z \varrho y, \quad z \leqslant x$$

y, por tanto, $y' = x - y^0$.

27.2′ ⇒ 27.3′. Sea $(x_i)_{i \in I}$ una familia de elementos $x_i \in E_0$ con $x_i \leqslant x$ para todo $i \in I$. Entonces, si $\varphi(x)$ es compacto, cada $\varphi(x_i)$ y $\varphi(\bigvee_{i \in I} x_i)$ son compactos. Es obvio que $\varphi(\bigvee_{i \in I} x_i) \supset \overline{\bigcup_{i \in I} \varphi(x_i)}$. Como $\overline{\bigcup_{i \in I} \varphi(x_i)}$ es el mínimo compacto que contiene a los conjuntos $\varphi(x_i)$ $(i \in I)$, bastará probar que ese compacto mínimo es $\varphi(\bigvee_{i \in I} x_i)$. Si K es un compacto que contiene a los conjuntos $\varphi(x_i)$ $(i \in I)$, según hemos establecido en primer lugar, existe un $y \in E_0$ tal que $K = \varphi(y)$ y $\varphi(x_i) \subset \varphi(y)$ para todo $i \in I$, de donde resulta $x_i \leqslant y$ para todo $i \in I$, $\bigvee_{i \in I} x_i \leqslant y$ y, finalmente, $\varphi(\bigvee_{i \in I} x_i) \subset \varphi(y) = K$.

27.3′ ⇒ 27.4′. Supongamos $x_i \leqslant x$ para todo $i \in I$, y, $y' \in E_0$ con $y' \varrho y$ e $y \wedge x_i = 0$ para todo $i \in I$. Si fuera $y' \wedge (\bigvee_{i \in I} x_i) \neq 0$, se tendría $\varphi(y') \cap \varphi(\bigvee_{i \in I} x_i) \neq \emptyset$ y, por consiguiente, $\varphi(y) \cap \varphi(\bigvee_{i \in I} x_i) \neq \emptyset$. Si $u \in \varphi(y') \cap \varphi(\bigvee_{i \in I} x_i)$ resulta, en particular, $u \in \varphi(\bigvee_{i \in I} x_i) = \overline{\bigcup_{i \in I} \varphi(x_i)}$. Como $\varphi(y) \in \mathcal{V}_u$, se tiene $\varphi(y) \cap \bigcup_{i \in I} \varphi(x_i) \neq \emptyset$ y, por tanto. existe un $i \in I$ tal que $\varphi(y \wedge x_i) = \varphi(y) \cap \varphi(x_i) \neq \emptyset$ e $y \wedge x_i \neq 0$ que es absurdo.

27.4′ ⇒ 27.2′. Sean $\mathcal{F} = \{U_i : i \in I\}$ un filtro en $\varphi(x)$, $X_i = \{\bigwedge u : u \in U_i\}$ y $x_i = \bigvee X_i = \bigvee \{x : x \in X_i\}$ $(i \in I)$. Por 27.4 es claro que X_i es no vacío, $0 \notin X_i$ y $0 \neq x_i \leqslant x$ para cada $i \in I$. Si J es una parte finita de I, existe un $j \in I$ tal que $U_j \subset U_i$ para todo $i \in J$, de donde resulta que también $X_j \subset X_i$ y $x_j \leqslant x_i$ para todo $i \in J$. Entonces, $\bigwedge_{i \in J} x_i \neq 0$ para toda parte finita J de I y de la proposición 13 de § 1 se deduce que existe un $u \in E$ tal que $\bigwedge_{i \in I} x_i \in u$, $x_i \in u$ para todo $i \in I$ y $u \in \varphi(\bigwedge_{i \in I} x_i) \subset \varphi(x)$. Si $\varphi(y) \in \mathcal{V}_u$ existe un $y' \in E$

que satisface $u \in \varphi(y')$ e $y' \varrho y$. Supongamos que $\varphi(y) \cap U_i = \emptyset$; en este caso en virtud de la proposición 17 de § 1 resulta $\varphi(y) \cap \varphi(X_i) = \emptyset$ y, por consiguiente, $\varphi(y \wedge x) = \varphi(y) \cap \varphi(x) = \emptyset$ e $y \wedge x = 0$ para todo $x \in X_i$, de donde se deduce que $y' \wedge x_i = y' \wedge \bigvee_{i \in I} X_i = 0$ en contradicción con $y' \wedge x_i \in u$. Por tanto, u es un punto adherente de $\mathcal{F}$ y se concluye que $\varphi(x)$ es compacto.

28. Proposición. *Sea E_0 un ϱ-inf-semirretículo, E y E' dos espacios topológicos T_1 y*

$$\varphi : E_0 \to \mathcal{P}(E), \qquad \varphi' : E_0 \to \mathcal{P}(E')$$

dos homomorfismos de retículos tales que:

28.1. *Para cada $u \in E$, el conjunto*

$$\mathcal{V}_u = \{\varphi(x) : \exists\, x' \ni E_0 \ni u \in \varphi(x') \ y \ x' \varrho x\}$$

es un sistema fundamental de entornos de u.

28.1′. *Para cada $u' \in E'$, el conjunto*

$$\mathcal{V}_{u'} = \{\varphi'(x) : \exists\, x' \in E_0 \ni u' \in \varphi'(x') \ y \ x' \varrho x\}$$

es un sistema fundamental de entornos de u'.

28.2. *Para cada $u \in E$, el conjunto $A_u' = \bigcap \{\varphi'(x) : \varphi(x) \in \mathcal{V}_u\}$ es no vacío.*

28.2′. *Para cada $u' \in E'$. el conjunto $A_{u'} = \bigcap \{\varphi(x) : \varphi'(x) \in \mathcal{V}_{u'}\}$ es no vacío.*

Entonces existe un homeomorfismo θ entre E y E', que transforma $\mathcal{V}_u$ en $\mathcal{V}_{\theta(u)}$.

Demostración. Definamos las aplicaciones

$$\psi : E \to \mathcal{P}(E_0), \qquad \psi' : E' \to \mathcal{P}(E_0)$$

así:

$$\psi(u) = \{x \in E_0 : \varphi(x) \in \mathcal{V}_u\} \qquad (u \in E)$$
$$\psi(u') = \{x \in E_0 : \varphi'(x) \in \mathcal{V}_{u'}\} \qquad (u' \in E').$$

Por ser E un espacio T_1, para cada $u \in E$ se tiene

$$\{u\} = \bigcap \{\varphi(x) : x \in \psi(u)\}.$$

Por 28.2, el conjunto $A_u' = \bigcap \{\varphi'(x) : x \in \psi(u)\}$ es no vacío. Si $u' \in A_u'$, se tiene $\psi(u) \subset \psi'(u')$. En efecto, si $x \in \psi(u)$, existe un $x' \in E_0$ tal que $x' \varrho x$ y $u \in \varphi(x')$. Por 1.5, existe entonces un $y \in E_0$ tal que $x' \varrho y$, $y \varrho x$. En consecuencia, $y \in \psi(u)$, $u' \in \varphi'(y)$ e $y \varrho x$, lo que implica $x \in \psi'(u')$.

Procediendo análogamente resulta que si

$$v \in A_{u'} = \bigcap \{\varphi(x) : x \in \psi'(u')\}$$

(que es no vacío por 28.2′), se tiene $\psi'(u') \subset \psi(v)$. Por tanto $\psi(u) \subset \psi'(u') \subset \psi(v)$. Pero

$$\{u\} = \bigcap \{\varphi(x) : x \in \psi(u)\} \supset \bigcap \{\varphi(x) : x \in \psi(v)\} = \{v\},$$

luego $u = v$. Así pues $\psi(u) = \psi'(u') = \psi(v)$. Esto prueba también que $A_u' = \{u'\}$, $A_{u'} = \{u\}$ y, por tanto, si se define $\theta : E \to E'$ por $\theta(u) = u'$, siendo u' el único elemento de E' tal que $\psi(u) = \psi'(u')$, resulta que θ es una aplicación biyectiva. Además, si $\theta(u) = u'$, la relación $\psi(u) = \psi'(u')$ prueba que $\theta[\varphi(x)] = \varphi'(x)$ para todo $x \in \psi(u) = \psi'(u')$, de donde se deduce que θ es un homeomorfismo que satisface las condiciones de la proposición.

29. Corolario. *Sea E_0 un ϱ-inf-semirretículo, E y E' dos espacios topológicos T_1 y*

$$\varphi : E_0 \to \mathcal{P}(E), \qquad \varphi' : E_0 \to \mathcal{P}(E')$$

dos homomorfismos inyectivos de retículos que verifican 28.1 *y* 28.1′. *Se supone además que para cada $u \in E$ y $u' \in E'$, los elementos de $\mathcal{V}_u$ y $\mathcal{V}_{u'}$ son conjuntos compactos y cerrados. Entonces existe un homeomorfismo θ entre E y E' que transforma $\mathcal{V}_u$ en $\mathcal{V}_{\theta(u)}$.*

Demostración. Con las notaciones de la proposición 28, bastará probar que para cada $u \in E$ y cada $u' \in E'$, los conjuntos

$$A_u' = \bigcap \{\varphi'(x) : x \in \psi(u)\}, \qquad A_{u'} = \bigcap \{\varphi(x) : x \in \psi'(u')\}$$

son no vacíos.

Para todo conjunto finito $(x_1, \ldots, x_n)$ de elementos de $\psi(u)$ se cumple $\varphi(\bigwedge_1^n x_i) = \bigcap_1^n \varphi(x_i) \neq \emptyset$, luego $\bigwedge_1^n x_i \neq 0$. Por tanto, $\bigcap_1^n \varphi'(x_i) =$

$= \varphi' (\overset{n}{\underset{1}{\Lambda}} x_i) \neq \emptyset$, por ser φ' inyectiva. Como para cada $x \in \psi(u)$, existe un $u' \in E'$ tal que $x \in \psi'(u')$, resulta que cada $\varphi'(x_i)$ es cerrado y compacto por la hipótesis. Por tanto

$$A_u' = \bigcap \{\varphi'(x) : x \in \psi(u)\} \neq \emptyset.$$

Análogamente se prueba que $A_{u'} \neq \emptyset$.

30. Corolario. *Sea E_0 un ϱ-inf-semirretículo, E y E' dos espacios localmente compactos separados y*

$$\varphi : E_0 \to \mathcal{P}(E), \qquad \varphi' : E_0 \to \mathcal{P}(E')$$

dos homomorfismos inyectivos de retículos tales que:

30.1. *Los compactos de E (resp. E') son, justamente, las intersecciones de las familias no vacías de elementos $\varphi(x)$ (resp. $\varphi'(x)$).*

30.2. *Si $\varphi(x)$ (resp. $\varphi'(x)$) es entorno de $\varphi(x')$ (resp. $\varphi'(x')$), se tiene $x' \varrho x$.*

Entonces E y E' son homeomorfos.

Demostración. En virtud del corolario 29, bastará probar que se verifica 28.1 y 28.1'. Sea entonces $u \in E$ y G un entorno de u. Existen dos entornos compactos de u, U y V tales que

$$u \in U \subset V^0 \subset V \subset G^0.$$

Por 30.1 se tiene

$$V = \cap \{\varphi(x) : \varphi(x) \supset V\}.$$

Si para todo $x \in E_0$ tal que $\varphi(x) \supset V$ fuese $\varphi(x) \cap (E - G^0) \neq \emptyset$, entonces la familia de compactos no vacíos $\{\varphi(x) \cap (E - G^0) : \varphi(x) \supset V\}$ tendría la propiedad de intersección finita y por tanto

$$V \cap (E - G^0) = \cap \{\varphi(x) \cap (E - G^0) : \varphi(x) \supset V\} \neq \emptyset$$

lo que está en contradicción con $V \subset G^0$. Así pues, existe un $x \in E^0$ tal que $V \subset \varphi(x) \subset G^0$ y, en consecuencia, $V^0 \subset \varphi(x)^0$. Repitiendo el razonamiento con U y V^0, se obtiene un $x' \in E_0$ tal que

$$U \subset \varphi(x') \subset V^0 \subset \varphi(x)^0$$

y, por tanto, $\varphi(x)$ es entorno de $\varphi(x')$. De 30.2 resulta entonces que $x' \varrho x$ y, por tanto, el conjunto

$$\mathcal{V}_u = \{\varphi(x) : \exists\, x' \in E_0 \ni u \in \varphi(x') \;\text{ y }\; x' \varrho x\}$$

es un sistema fundamental de entornos de u. Análogamente se probaría 28.1′.

31. Observación. Como fácilmente se puede comprobar, en la demostración de los corolarios 29 y 30 no es necesario suponer que φ y φ' sean homomorfismos inyectivos, sino solamente que $\varphi(x)$ y $\varphi('(x)$ sean no vacíos siempre que x sea distinto de 0.

BIBLIOGRAFÍA

[1] DINCULEANU, N. — *Vector Measures*. Pergamon Press, Oxford, 1967.

[2] DUNFORD, N. y SCHWARTZ, J. T. — *Linear Operators, I*. Interscience Pub. Inc. New York, 1958.

[3] KAKUTANI, S. — *Concrete representation of abstract* (L)*-spaces and the mean ergodic theorem*. Ann. Math. (2) *42*, 523-537, (1941).

[4] KELLEY, J. L. — *General Topology*. D. van Nostrand Co. Inc. Princeton, 1955.

[5] RODRÍGUEZ-SALINAS, B. y BOMBAL GORDÓN, F. — *The Tychonoff product theorem for compact Hausdorff spaces does not imply the axiom of choice: A new proof. Equivalent propositions*. Collect. Math. *24*, 219-229 (1973).

[6] SCOTT, D. — *The theorem on maximal ideals in lattices and the axiom of choice*. Bull. A. M. S. *60*, 83 (1954).

[7] STONE, M. H. — *Applications of the theory of Boolean rings to general topology*. Trans. Am. Math. Soc. *41*, 375-481 (1937).

[8] VAN DALEN, D. y MONNA, A. F. — *Sets and integration*. Wolters-Noordhohh Pub. Groningen, 1972.

[9] WILLARD, S. — *General Topology*. Addison-Wesley Pub. Co. Reading, Massachussetts, 1970).

Departamento de Teoría de Funciones
Universidad Complutense de Madrid.