UNA NUOVA TERMOIDRODINAMICA RELATIVISTICA

di

GIUSEPPE ARCIDIACONO (a Roma)

1. — LA TERMOIDRODINAMICA RELATIVISTICA

Come é noto, la relatività ristretta non ci offre una base teorica sufficiente per costruire in modo univoco la termoidrodinamica relativistica, e quindi sono state proposte tutta una serie di teorie, a seconda delle equazioni da cui si parte.

Per esempio, secondo ECKART [1], un fluido termodinamico con conducibilità termica, deve essere descritto da un tensore energetico della forma

$$(1,1) \qquad T_{ik} = \mu_0 F u_i u_k + p\, \delta_{ik} + (u_i q_k + u_k q_i)/c^2$$

dove abbiamo indicato con q_i il *vettore termico*, con μ_0 la *densità materiale propria*, e con F l'indice del fluido di Lichnerowicz, così definito [2]

$$(1,2) \qquad \mu_0 F c^2 = \mu c^2 + p = \mu_0 (c^2 + E + pV)$$

con V $(= 1/\mu_0)$ *volume*, p *pressione* del fluido ed E *energia specifica* propria. La *temperatura propria* T del fluido e la sua *entropia specifica* S, soddisfano alla relazione termodinamica

$$(1,3) \qquad T\, dS = c^2\, dF - dp/\mu_0$$

e le equazioni di evoluzione del fluido sono le seguenti

$$(1,4) \qquad \partial_i T_{ik} = 0 \quad ; \quad \partial_i (\mu_0 u_i) = 0$$

La prima é l'equazione del moto, della quale si ricava quella di continuità, mentre la seconda equazione esprime la conservazione della densità materiale propria.

Invece, nella teoria di LANDAU e LIFCHITZ [3] si introduce il seguente tensore energetico

$$T'_{ik} = (\mu + p/c^2)\, u_i u_k + p\, \delta_{ik} \tag{1,5}$$

e le (4) vengono sostituite dalle seguenti

$$\partial_i T'_{ik} = 0 \quad ; \quad \partial_i (\mu_0 u_i + q_i/c^2) = 0 \tag{1,6}$$

Nei due casi, occorre aggiungere l'equazione che generalizza quella di Fourier del calore. I vari Autori non sono ancora d'accordo sulla forma definitiva di tale equazione, e ne sono state proposte varie versioni, più o meno complicate. Se vogliamo che la propagazione del calore avvenga a velocità finita, si può utilizzare l'equazione di KRANYS [4]

$$\boxed{q_i + \chi \frac{d q_i}{d\tau} = -\varkappa \left(\partial_i T + \frac{u_i}{c^2} \frac{dT}{d\tau} \right)} \tag{1,7}$$

dove χ e $\varkappa$ sono due opportune costanti. Più recentemente, il BOILLAT [5] ha proposto una equazione più generale, del tipo

$$q_i/\mu_0 - \chi\, u_k [\partial_i (q_k/\mu_0) - \partial_k (q_i/\mu_0)] = -\varkappa\, (\partial_i T + u_i\, d\,T/c^2 d\tau) \tag{1,8}$$

Combinando le precedenti equazioni, si ottengono le varie formulazioni della termoidrodinamica relativista [6], e si possono studiare le equazioni delle caratteristiche e la velocità di propagazione delle onde nei fluidi con scambi termici.

In questa Memoria ci proponiamo di sviluppare la nuova termoidrodinamica che si deduce dalla «magnetoidrodinamica proiettiva». Infatti, venti anni fa, nel 1955, in una serie di Note publicate alla Accademia dei Lincei [7] ho generalizzato le equazioni di MAXWELL in modo da renderle invarianti per il gruppo proiettivo di FANTAPPIE'. Le nuove equazioni ottenute si possono interpretare come le equazioni della magnetoidrodinamica

$$\mathrm{Rot}\, H_{AB} = J_{ABC} \quad ; \quad \mathrm{Div}\, H_{AB} = I_A \quad (A, B, C = 1, 2 \ldots 5) \tag{1,9}$$

e si ottiene l'interessante risultato che, nel caso più generale, il campo idrodinamico non é più parallelo alla velocità del fluido, ma é dato da

$$(1,10) \qquad \boxed{c_A = f u_A + q_A / f c^2}, \quad \text{con } u_A q_A = 0$$

dove f é l'*indice* del fluido (da noi introdotto), e q_A é il vettore termico [8].

Se ci limitiamo per maggiore semplicità allo studio dei fluidi incompressibili con scambi termici, il tensore energetico assume la forma

$$(1,11) \qquad T_{AB} = c_A c_B - c_S c_S (\delta_{AB}/2 - x_A x_B / r^2)$$

e tenendo conto della (10) avremo, in forma esplicita

$$(1,12) \qquad T_{AB} = f^2 u_A u_B + (u_A q_B + u_B q_A)/c^2 + q_A q_B / f^2 c^4 + \\ + p \, \delta_{AB} - (2p/r^2) x_A x_B$$

dove abbiamo posto $q^2 = q_A q_A$, ed inoltre

$$(1,13) \qquad f^2 = \mu + p/c^2; \; 2p = f^2 c^2 - q^2 / f^2 c^4$$

Da queste ultime, eliminando l'indice f, otteniamo l'equazione di stato dei fluidi termodinamici incompressibili

$$(1,14) \qquad \boxed{p^2 = \mu^2 c^4 - q^2/c^2}$$

dalla quale segue che la pressione si annulla per $q = \mu c^3$.

Le equazioni di Maxwell generalizzate ci forniscono quindi, in modo univoco, non solo il tensore energetico, ma anche l'equazione di stato dei fluidi termodinamici incompressibili.

2. — Le nuove equazioni della termoidrodinamica

Facendo tendere all'infinito il raggio r del cronotopo di De Sitter, si passa alla relatività ristretta, e si ottiene una nuova formulazione della teoria dei fluidi termodinamici incompressibili.

Il vettore idrodinamico risulta infatti il seguente

(2,1) $$C_i = f u_i + \bar{q}_i, \text{ con } \bar{q}_i = q_i / f c^2 \qquad (i = 1,2..4)$$

ed allora il tensore energetico (1,12) si riduce a

(2,2) $$\boxed{T_{ik} = f^2 u_i u_k + f(u_i \bar{q}_k + u_k \bar{q}_i) + p\,\delta_{ik} + \bar{q}_i \bar{q}_k}$$

il quale differisce da quello (1,1) proposto da Eckart, per l'ultimo termine, che é assai piccolo.

L'equazione di stato (1,14) si può scrivere così

(2,3) $$2p = f^2 c^2 - \bar{q}^2$$

Il vettore termico $\bar{q}_i$ risulta ortogonale alla velocità $(u_i \bar{q}_i = 0)$, e soddisfa alla equazione (1,7) di Fourier-Kranys, la quale, in base alla $q_i = f c^2 \bar{q}_i$, diventa

(*I*) $$f c^2 \bar{q}_i + \chi f c^2 \frac{d\bar{q}_i}{d\tau} + \chi \bar{q}_i c^2 \frac{df}{d\tau} = -\varkappa\, \partial_i T - \varkappa \frac{u_i}{c^2} \frac{dT}{d\tau}$$

Moltiplicandola per u_i, segue subito che

(2,4) $$u_i\, d\bar{q}_i / d\tau = -a_i \bar{q}_i = 0$$

e cioé che il vettore termico é ortogonale alla accelerazione a_i.

Fatta questa premessa, osserviamo che il tensore energetico (1,11) si riduce a

(2,5) $$T_{ik} = C_i C_k - \frac{1}{2} C_s C_s \delta_{ik}$$

Prendendo la divergenza, si ha l'equazione dinamica

(2,6) $$\partial_i (C_i C_k + p\,\delta_{ik}) = 0, \text{ con } \partial_i C_i = 0$$

Sviluppando tale equazione, in base alla (1) avremo, con facili calcoli

(II) $$f^2 a_k + f u_\varkappa \frac{df}{d\tau} + f \frac{d\bar{q}_\varkappa}{d\tau} + f \bar{q}_i \partial_i u_\varkappa + \bar{q}_i u_\varkappa \partial_i f + \bar{q}_i \partial_i \bar{q}_\varkappa + \partial_\varkappa p = 0$$

Moltiplicandola per u_k si ricava l'equazione di continuità

$$-f c^2 d f/d\tau - c^2 \bar{q}_i \partial_i f - \bar{q}_i \bar{q}_\varkappa \partial_i u_\varkappa + d p/d\tau = 0$$

la quale si può scrivere così

$$d(2p - f^2 c^2)/d\tau = 2 c^2 \bar{q}_i (\partial_i f + \bar{q}_\varkappa \partial_i u_\varkappa)$$

e se teniamo conto della equazione (3) di stato, avremo

$$\text{(III)} \qquad \bar{q}_i (d\bar{q}_i/d\tau + 2 c^2 \partial_i f + 2\bar{q}_\varkappa \partial_i u_\varkappa) = 0$$

L'equazione di incompressibilità $\partial_i C_i = 0$, diventa

$$\text{(IV)} \qquad f \partial_i u_i + d f/d\tau + \partial_i \bar{q}_i = 0$$

Dalla equazione di stato (3) si deduce che

$$\text{(V)} \qquad d p/d\tau = f c^2 d f/d\tau - \bar{q}_i d\bar{q}_i/d\tau$$

L'indice del fluido f, è legato all'indice F di Lichnerowicz [2] dalla relazione

$$\text{(2,7)} \qquad \boxed{f^2 = \mu + p/c^2 = 2\mu_0 F/n}$$

nella quale abbiamo introdotto il parametro n, la cui utilità ed il cui significato fisico, saranno chiariti al n.° 7. Se ne deduce che

$$\text{(VI)} \qquad n f d f/d\tau = \mu_0 d F/d\tau + F d\mu_0/d\tau$$

Dalla relazione termodinamica (1,3), segue l'equazione

$$\text{(VII)} \qquad T d S/d\tau = c^2 d F/d\tau - d p/\mu_0 d\tau$$

Poiché l'entropia specifica dipende dalle due variabili termodinamiche μ_0 e T, si avrà $S = S(\mu_0, T)$. Se ne deduce che

$$\text{(VIII)} \qquad d S/d\tau = S'_{\mu_0} d\mu_0/d\tau + S'_T d T/d\tau$$

Infine, dalle $u_i u_i = -c^2$; $u_i \bar{q}_i = 0$ ed $a_i \bar{q}_i = 0$ si ricava che

$$\text{(IX)} \qquad u_i d u_i/d\tau = 0 \ ; \ u_i d\bar{q}_i/d\tau = 0 \ ; \ \bar{q}_i d u_i/d\tau = 0$$

Le (I..IX) sono le equazioni della nuova termoidrodinamica che si ottiene come caso-limite per r tendente all'infinito dalle equazioni di Maxwell generalizzate.

3. — Le condizioni di compatibilita' dinamica

Per studiare la propagazione delle onde nella nuova teoria, consideriamo una ipersuperficie Σ del cronotopo, di equazione $\varphi(x_i) =$ cost. Attraverso questa ipersuperficie siano continue le variabili di campo $(u_i, \bar{q}_i, f, F, p, \mu_0, T, S)$, mentre possa presentare discontinuità di prima specie, almeno una delle loro derivate parziali prime rispetto alle x_i. Indicando con $(U_i, \bar{Q}_i, \Psi, \Phi, \pi, m_0, \theta, \sigma)$ le corrispondenti discontinuità, si ha come é noto

$$(3,1) \qquad \Delta\, \partial_i u_\varkappa = U_\varkappa \varphi_i \ ; \ \Delta\, \dot{u}_\varkappa = U_\varkappa \dot{\varphi} \qquad \text{con } \varphi_\varkappa = \partial_\varkappa \varphi$$

e le analoghe. Per determinare le equazioni alle quali soddisfano tali discontinuità (condizioni di compatibilità dinamica), basta scrivere le equazioni differenziali (I)..(IX) da una parte e dall'altra della ipersuperficie Σ. Facendo la differenza e ricordando le (1), otteniamo le equazioni algebriche nelle discontinuità. Intanto dalle (IX) segue che

$$(3,2) \qquad u_i U_i = 0 \ ; \ u_i \bar{Q}_i = 0 \ ; \ \bar{q}_i U_i = 0$$

Dalla equazione dinamica (II) passando alle discontinuità, segue

$$f^2 U_\varkappa \dot{\varphi} + f u_\varkappa \dot{\varphi} \Psi + f \dot{\varphi} \bar{Q}_\varkappa + \bar{q}_i \varphi_i u_\varkappa \Psi + \bar{q}_i \bar{Q}_i \varphi_\varkappa + \pi \varphi_\varkappa = 0$$

Moltiplichiamola per φ_k ed introduciamo le nuove incognite

$$(3,3) \qquad U_i \varphi_i = X \ ; \ \bar{Q}_i \varphi_i = Y \ ; \ \bar{Q}_i \bar{q}_i = Z$$

otteniamo, tenendo conto delle (2) e ponendo $\bar{\varphi}^2 = \varphi_i \varphi_i$, l'equazione

$$(\mathrm{A}) \qquad f^2 \dot{\varphi} X + f \dot{\varphi}^2 \Psi + f \dot{\varphi} Y + \bar{q}_i \varphi_i \dot{\varphi} \Psi + (\pi + Z) \bar{\varphi}^2 = 0$$

Dalla equazione (III) di continuità, si deduce che

$$\bar{q}_i \bar{Q}_i \dot{\varphi} + 2\, c^2\, \bar{q}_i \varphi_i \Psi = 0$$

e quindi avremo

(B) $$\dot{\varphi} Z + 2 c^2 \bar{q}_i \varphi_i \Psi = 0$$

Dalla equazione (IV) di incompressibilità segue che

$$f U_i \varphi_i + \dot{\varphi} \Psi + \bar{Q}_i \varphi_i = 0$$

e quindi si ottiene l'equazione delle discontinuità

(C) $$f X + \dot{\varphi} \Psi + Y = 0$$

Dalla equazione (I) di Fourier-Kranys, ricordando che la discontinuità é solo nelle derivate, mentre le variabili di campo sono continue, ($\Delta \widehat{q_i} = 0$), si ricava

(3,4) $$\chi c^2 f \bar{Q}_i \dot{\varphi} + \chi c^2 \bar{q}_i \dot{\varphi} \Psi + \varkappa \theta \varphi_i + \varkappa u_i \dot{\varphi} \theta / c^2 = 0$$

Moltiplicando per φ_i e ponendo $k_0 = \varkappa / \chi$, segue

(D) $$c^2 f \dot{\varphi} Y + c^2 \bar{q}_i \varphi_i \dot{\varphi} \Psi + k_0 (\bar{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^2 / c^2) \theta = 0$$

Moltiplicando la (4) per $\bar{q}_i$ e ponendo $\bar{q}^2 = \bar{q}_i \bar{q}_i$, avremo invece

(E) $$c^2 f \dot{\varphi} Z + \bar{q}^2 c^2 \dot{\varphi} \Psi + k_0 \bar{q}_i \varphi_i \theta = 0$$

Dalla equazione di stato (V) si deduce che

(F) $$\pi - f c^2 \Psi + Z = 0$$

Dalla (VI) si ricava la

(G) $$n f \Psi = \mu_0 \Phi + F m_0$$

Dalla relazione termodinamica (VII) si deduce l'equazione

(H) $$T \sigma = c^2 \Phi - \pi / \mu_0$$

Infine dalla (VIII) si ricava che

(J) $$\sigma = S'_{\mu_0} m_0 + S'_T \theta$$

Le (A)...(J) formano un sistema di 9 equazioni omogenee nelle 9 incognite $(X, Y, Z, \Psi, \pi, \theta, \Phi, \sigma, m_0)$, eliminando le quali si può ricavare l'equazione delle caratteristiche della propagazione ondosa.

4. — Varieta' caratteristiche e propagazione delle onde

Per trovare l'equazione delle caratteristiche, basta osservare che perché il sistema omogeneo ottenuto ammetta soluzioni non tutte nulle delle discontinuità, occorre che sia nullo il suo determinante.

Però é più semplice esprimere le varie incognite in funzione di (Ψ, m_0) e così ci riduciamo ad un sistema di due equazioni in due incognite, il cui determinante ci dà l'equazione delle caratteristiche.

Dalla (B) si ricava la Z e dalla (F) il π, cioé

$$(4,1) \qquad Z = -\,(2\,c^2\,\bar{q}_i\,\varphi_i/\dot{\varphi})\;\Psi\;;\; \pi = c^2\,(f + 2\,\bar{q}_i\,\varphi_i/\dot{\varphi})$$

Sostituendo nella (E) si ottiene il θ, dato da

$$(4,2) \qquad \theta = (c^2/k_0)\,[2f\,c^2 - (\bar{q}^2/\bar{q}_i\,\varphi_i)\,\dot{\varphi}]\;\Psi$$

Dalla (D) ricaviamo la incognita Y

$$(4,3) \quad Y = -\,(1/f\dot{\varphi})\,[\bar{q}_i\,\varphi_i\,\dot{\varphi} - (2f\,c^2 - \bar{q}^2\,\dot{\varphi}/\bar{q}_i\,\varphi_i)\,(\bar{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^2/c^2)]\;\Psi$$

Dalla (C) si ottiene il valore della X

$$(4,4) \quad X = (1/f)\,[\bar{q}_i\,\varphi_i/f - (1/f\dot{\varphi})\,(2\,c^2 f - \bar{q}^2\,\dot{\varphi}/\bar{q}_i\,\varphi_i)\,(\bar{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^2/c^2) - \dot{\varphi}]\;\Psi$$

Dalla (G) si ottiene la incognita Φ, cioé

$$(4,5) \qquad \Phi = n\,f\,\Psi/\mu_0 - F\,m_0/\mu_0$$

Infine, dala (H) si ricava la σ, data da

$$(4,6) \quad \sigma = (1/\mu_0\,T)\,[(n-1)\,fc^2 - 2\,c^2\,\bar{q}_i\,\varphi_i/\dot{\varphi}_i]\;\Psi - F\,c^2\,m_0/\mu_0\,T$$

Sostituendo i valori ottenuti nella (A) e nella (J) ci riduciamo al seguente sistema di due equazioni omogene, nelle due incognite (Ψ, m_0)

$$(4,7) \quad \begin{cases} (\bar{q}_i\,\varphi_i\,\dot{\varphi} + f\,c^2\,\bar{\varphi}^2)\;\Psi = 0 \\ \left[(n-1)\,\dfrac{f\,c^2}{\mu_0 T} - \dfrac{2\,c^2}{\mu_0 T}\cdot\dfrac{\bar{q}_i\,\varphi_i}{\dot{\varphi}} - \dfrac{2f\,c^4}{k_0}\,S'_T + \dfrac{c^2}{k_0}\dfrac{\dot{\varphi}^2\,\bar{q}^2}{\bar{q}_i\,\varphi_i}\,S'_T\right]\Psi + \left(S'_{\mu_9} + \dfrac{F\,c^2}{\mu_0\,T}\right)m_0 = 0 \end{cases}$$

il cui determinante é il seguente

$$\boxed{(\bar{q}_i \varphi_i \dot{\varphi} + f c^2 \bar{\varphi}^2)(S'_{\mu_9} + F c^2/\mu_0 T) = 0} \tag{4,8}$$

Annullando il primo fattore, otteniamo l'equazione delle caratteristiche

$$\bar{q}_i \varphi_i \dot{\varphi} + f c^2 \bar{\varphi}^2 = 0 \tag{4,9}$$

Se poi introduciamo la velocità W di propagazione delle onde, e la componente $\bar{q}_N$ del vettore termico nella direzione spaziale di propagazione delle onde, nel seguente modo

$$W^2 = \dot{\varphi}^2/(\bar{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^2/c^2) \; ; \; \bar{q}^2_N = (\bar{q}_i \varphi_i)^2/(\bar{\varphi}^2 + \varphi^2/c^2) \tag{4,10}$$

dalla prima uguaglianza si deduce che

$$\bar{\varphi}^2 = (\dot{\varphi}^2/W^2)(1 - W^2/c^2)$$

e ricordando che $\bar{q}_i = q_i/fc^2$ e che $f^2 = 2\mu_0 F/n$, si ottiene l'equazione che ci dà la velocità di propagazione delle onde

$$\boxed{W^2 - (n\, q_N/2\, \mu_0\, F\, c^2)\, W - c^2 = 0} \tag{4,11}$$

la quale, nel caso in cui $q_N = 0$, ci dà per velocità delle onde quella c della luce.

5. — Studio dei fluidi termodinamici «ideali»

Particolarmente interessante é poi il caso in cui é nullo il secondo fattore della (4,8), cioé quando l'entropia specifica soddisfa alla condizione

$$\boxed{S'_{\mu_9} = - F c^2/\mu_0 T} \tag{5,1}$$

In questo caso, se vogliamo che $\Psi \neq 0$, occorre imporre, in base alle (4,7) la nuova condizione

$$(5,2) \qquad (n-1)\frac{f c^2}{\mu_0 T} - \frac{2c^2}{\mu_0 T}\frac{\bar{q}_i \varphi_i}{\dot{\varphi}} - \frac{2fc^4}{k_0} S'_T + \frac{c^2}{k_0}\frac{\bar{q}^2 \dot{\varphi}}{\bar{q}_i \varphi_i} S'_T = 0$$

la quale, introducendo la velocità (4,10) delle onde, ed il vettore $\bar{q}_N$, si può scrivere nel seguente modo

$$(5,3) \quad \mu_0 c^2 T\bar{q}^2 S'_T W^2 + [(n-1)k_0 - 2\mu_0 c^2 T S'_T] fc^2 \bar{q}_N W - 2c^2 k_0 \bar{q}_N = 0$$

Tale equazione si semplifica notevolmente, se la entropia specifica S soddisfa alla ulteriore condizione

$$(5,4) \qquad \boxed{S'_T = (n-1)\, k_0 / 2\mu_0 c^2 T}$$

Allora la (3), ricordando che $\bar{q}^2_N/\bar{q}^2 = q^2_N/q^2$, si riduce alla

$$(5,5) \qquad \boxed{W = \frac{2c}{\sqrt{n-1}}\frac{q_N}{q}}$$

e tale equazione é simile a quella che ci dà la velocità delle onde nelle magnetoidrodinamica «ideale» dei fluidi incompressibili proiettivi [9]

$$(5,6) \qquad W = c\, h_N/h$$

Per tale motivo, un fluido termodinamico incompressibile che soddisfa alle due condizioni (1) e (4), sarà chiamato «ideale», e gode, come vedremo, di importanti proprietà.

A partire da tali due condizioni si possono determinare esplicitamente l'indice F e la entropia specifica S del fluido, in funzione delle due variabili termodinamiche (μ_0 T). Infatti, le due condizioni sono compatibili se sono uguali le loro derivate parziali seconde miste, cioé se é soddisfatta la condizione

$$(5,7) \qquad F'_T - F/T = (n-1)\, k_0/2\mu_0 c^4$$

Cerchiamo una soluzione della (7), del tipo

$$(5,8) \qquad F = (n-1)\, k_0\, X(T)/2\mu_0 c^4$$

Sostituendo nella (7) si ottiene l'equazione differenziale lineare

$$dX/dT - X/T = 1 \tag{5,9}$$

La equazione omogenea ci dà

$$dX/X = dT/T \quad \text{da cui} \quad X = \gamma T$$

dove γ é la costante di integrazione. Poniamo allora $X = \gamma(T).\, T$ e sostituiamo nella (9), cioé $d\gamma(T) = dT/T$, da cui indicando con $1/T_0$ la costante di integrazione, segue che $\gamma(T) = \log(T/T_0)$. Sostituendo tale valore nella (8) otteniamo così l'indice F del fluido

$$\boxed{F = \frac{(n-1)\, k_0\, T}{2\, \mu_0\, c^4} \log \frac{T}{T_0}} \tag{5 10}$$

Eliminando la F dalla (1) avremo allora

$$S'_T = (n-1)\, k_0/2\, \mu_0\, c^2\, T \;\; ; \;\; S'_{\mu_9} = (1-n)\, k_0 \log (T/T_0)/2\, {\mu_0}^2\, c^2$$

dalle quali integrando si ottiene la espressione della entropia

$$S(\mu_0, T) = \frac{(1-n)k_0}{2\, c^2} \left[\log \frac{T}{T_0} \int_1^{\mu_0} d\, \mu_0/\mu\, {}_0{}^2 - \int_1^T d\, T/T \right] + S\,(1,\, 1)$$

ed eseguendo i calcoli abbiamo in definitiva

$$\boxed{S = \frac{(n-1)\, k_0}{2\, \mu_0\, c^2} \log \frac{T}{T_0}} \tag{5,11}$$

Dalle formule ottenute segue l'esistenza di una «temperatura critica» $T = T_0$ alla quale l'indice F e la entropia specifica S si annullano; inoltre si verifica subito che vale la relazione algebrica

$$\boxed{F\, c^2 = T\, S} \tag{5,12}$$

il cui significato fisico serà chiarito al n.º 7.

6. — Fluidi termodinamici ideali con conducibilita' nulla

Particolarmente interessante é il caso in cui la conducibilità del fluido é nulla ($q_i = 0$) perché allora le equazioni delle discontinuità che abbiamo stabilito al n.º 3 si semplificano notevolmente e si riducono al seguente sistema di 7 equazioni in 7 incognite:

$$
(6\ 1) \qquad \begin{cases} f^2 \dot{\varphi} X + f \dot{\varphi}^2 \Psi + \pi \bar{\varphi}^2 = 0 \\ f X + \dot{\varphi} \Psi = 0 \ ; \ f c^2 \Psi = \pi \\ T \sigma = c^2 \Phi - \pi / \mu_0 \ ; \ n f \Psi = \mu_0 \Phi + F m_0 \\ \sigma = S'_{\mu_0} m_0 + S'_T \theta \ ; \ \Phi = F'_{\mu_0} m_0 + F'_T \theta \end{cases}
$$

e l'ultima equazione é stata ricavata dalla $F = F(\mu_0, T)$.

Dalla seconda e terza equazione si deduce che

$$
(6,2) \qquad X = - (\dot{\varphi}/f)\, \Psi \ ; \ \pi = f c^2 \Psi
$$

Dalla quinta equazione si ricava la Φ, cioé

$$
(6,3) \qquad \Phi = (nf/\mu_0)\, \Psi - (F/\mu_0)\, m_0
$$

e sostituendo nella settima equazione otteniamo la θ, così

$$
(6,4) \qquad \theta = \frac{nf}{\mu_0 F'_T} \Psi - \frac{1}{F'_T} \left(F'_{\mu_0} + \frac{F}{\mu_0} \right) m_0
$$

L'incognita σ si ricava infine dalla sesta equazione:

$$
(6,5) \qquad \sigma = \frac{nf S'_T}{\mu_0 F'_T} \Psi + \left[S'_{\mu_0} - \frac{S'_T}{F'_T} \left(\frac{F}{\mu_0} + F'_{\mu_0} \right) \right] m_0
$$

Sostituendo tali valori nella quarta equazione, avremo

$$
\left[\frac{nf T S'_T}{\mu_0 F'_T} - (n-1) \frac{f c^2}{\mu_0} \right] \Psi + \left(T S'_{\mu_0} - \frac{F T S'_T}{\mu_0 F'_T} - \frac{T S'_T F'_{\mu_0}}{F'_T} + \frac{F c^2}{\mu_0} \right) m_0 = 0
$$

la quale, ricordando che $f^2 = 2 \mu_0 F / n$, si può scrivere così

$$
(a) \qquad \frac{2F}{f} \left[\frac{T S'_T}{F'_T} - \frac{n-1}{n} c^2 \right] \Psi + \left[\left(T S'_{\mu_0} + \frac{F c^2}{\mu_0} \right) - \right.
$$

$$
\left. - \frac{T S'_T}{F'_T} \left(F'_{\mu_0} + \frac{F}{\mu_0} \right) \right] m_0 = 0
$$

Sostituendo invece i valori trovati nella prima equazione, si ha

$$\text{(b)} \qquad f\,\bar{\varphi}^2\,\Psi = 0$$

Perché il sistema delle due equazioni (a), (b) nelle due incognite (Ψ, m_0) ammetta soluzioni non tutte nulle, occorre annullare il suo determinante, e per $f \neq 0$ si ottiene l'equazione

$$(6{,}6) \qquad \boxed{\bar{\varphi}^2\,[F'_T\,(T\,S'_{\mu_0} + F\,c^2/\mu_0) - T\,S'_T\,(F'_{\mu_0} + F/\mu_0)] = 0}$$

Da tale equazione, annullando il primo fattore si ottiene l'equazione delle caratteristiche

$$(6{,}7) \qquad \bar{\varphi}^2 = 0$$

da cui segue che *la velocità delle onde è quella della luce.*

$$(6{,}8) \qquad W^2 = \dot{\varphi}^2/(\bar{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^2/c^2) = c^2$$

Annullando invece il secondo fattore della (6), si ottiene una condizione alla quale debbono soddisfare l'indice F del fluido e la sua entropia specifica S:

$$(6{,}9) \qquad F'_T\,(T\,S'_{\mu_0} + F\,c^2/\mu_0) = T\,S'_T\,(F'_{\mu_0} + F/\mu_0)$$

ed allora, se vogliamo che $\Psi \neq 0$, occorre imporre la ulteriore condizione, che si deduce dalla (a):

$$(6{,}10) \qquad \boxed{n\,T\,S'_T = (n-1)\,c^2\,F'_T}$$

Un fluido termodinamico con conducibilità termica nulla, che soddisfi alle due condizioni (9) e (10) e che sia incompressibile, sarà chiamato «ideale». Anche in questo caso é possibile determinare esplicitamente sia F che S in funzione delle due variabili termodinamiche (μ_0, T).

Infatti, le due precedenti condizioni possono essere soddisfatte nel modo più semplice, se poniamo

$$(6{,}11) \qquad \boxed{S'_T = (1 - 1/n)\,c^2 F'_T/T\;;\; S'_{\mu_0} = -\,F c^2/\mu_0\,T\;;\; F'_{\mu_0} = -\,F/\mu_0}$$

Inoltre, le prime due equazioni sono compatibili se sono uguali le loro derivate seconde miste, cioé se

$$(F - T\,F'_T)/\mu_0\,T = (1 - 1/n)\,F''_{\mu_0 T}$$

Ma dalla terza equazione (11) segue che $F''_{\mu_0 T} = - F'_T/\mu_0$, e quindi avremo in definitiva la nuova equazione differenziale

$$\boxed{F'_T = n\,F/T} \tag{6,12}$$

la quale, come si verifica subito, é compatible con la terza delle (11). Fatta questa premessa, cerchiamo una soluzione del tipo

$$F\,(\mu_0, T) = A\,(\mu_0).\,B\,(T) \tag{6,13}$$

Sostituendo nelle ultime due equazioni, avremo

$$dA/d\mu_0 = - A/\mu_0 \;;\; dB/dT = n.\,B/T$$

e quindi, indicando con N_1 ed N_2 le due costanti di integrazione, otteniamo le semplici soluzioni

$$A\,(\mu_0) = N_1/\mu_0 \;;\; B\,(T) = N_2\,T^n$$

Sostituendo nella (13) e ponendo $N_1 N_2 = N$, si ha in definitiva

$$\boxed{\mu_0\,F = N\,T^n} \tag{6,14}$$

In conseguenza, le due prime equazioni (11) diventano

$$S'_T = (n - 1)\,(N\,c^2/\mu_0)\,T^{n-2} \;;\; S'_{\mu_0} = - (N\,c^2/\mu_0)\,T^{n-1} \tag{6,15}$$

ed integrando, si ottiene la espressione della entropia

$$S(\mu_0, T) = N\,c^2 \left[- T^{n-1} \int_1^{\mu_0} d\mu_0/\mu^2_0 + (n - 1) \int_0^T T^{n-2}\,d\,T \right] + S\,(1, 0)$$

cioé, eseguendo i calcoli

$$\boxed{\mu_0\,S = N\,c^2\,T^{n-1}} \tag{6,16}$$

Dalle espressioni trovate per l'indice F e la entropia specifica S, si deduce che esse si annullano alla temperatura «critica» $T_0 = 0$. Inoltre vale ancora la semplice relazione algebrica

$$Fc^2 = TS \tag{6,17}$$

come nei fluidi con conducibilità termica.

7. — Proprieta' dei fluidi termodinamici «ideali»

Per dare una interpretazione fisica dei risultati ottenuti, ricordiamo che nella termodinamica classica si introducono la «entalpia» H e la «energia libera» E_0, nel seguente modo

$$H = E + pV \;\; ; \;\; E_0 = E - TS \tag{7,1}$$

Si ha poi la «entalpia libera» o «potenziale termodinamico» G di Gibbs, così definita

$$G = E + pV - TS = H - TS = E_0 + pV \tag{7,2}$$

Fatta questa premessa, nel caso più generale, la legge di irradiazione totale, é data dalla semplice legge [10]

$$\boxed{\mu_0 E = N.\, T^n} \tag{7,3}$$

dove N é una opportuna costante, mentre n é un numero, che può assumere diversi valori.

Per $n = 4$ si ha la «radiazione nera», la quale può essere considerata come un fluido di fotoni. Se l'irraggiamento avviene in un mezzo materiale, perché il gas di fotoni sia perfetto, é necessario che l'energia di interazione della radiazione e della materia, sia trascurabile. Inoltre, perché si possa stabilire un equilibrio termico, é necessaria la presenza della materia. In questo caso vale la legge di Stefan Boltzmann, che ci dà l'energia totale della radiazione

$$\mu_0 E = N.\, T^4 \tag{7,4}$$

mentre le altre grandezze termodinamiche assumono i valori

$$(7,5)\qquad \begin{cases} S = 4E/3T \; ; \; pV = \quad E/3 \; ; \; C_v = 4E/T \\ H = 4E/3 \quad ; \; E_0 \; = - E/3 \; ; \; G \; = 0 \end{cases}$$

Se teniamo presente che $V = 1/\mu_0$, della seconda relazione si deduce cha *la pressione dipende soltanto dalla temperatura*, cioé $p = p(T)$.

Se invece $n = 5/2$, si ottiene la analoga legge della radiazione corpuscolare

$$(7,6)\qquad \mu_0 E = N . T^{5/2}$$

(*gas di Bose degenerato*) [11], per il quale si hanno i seguenti valori per le grandezze termodinamiche

$$(7,7)\qquad \begin{cases} S = 5E/3T \; ; \; pV = \quad 2E/3 \; ; \; C_v = 5E/2T \\ H = 5E/3 \quad ; \; E_0 \; = - 2E/3 \; ; \; G \; = 0 \end{cases}$$

ed anche in questo caso la pressione dipende solo dalla temperatura.

Fatta questa premessa, ci proponiamo di determinare le grandezze termodinamiche dei fluidi «ideali», nel senso da noi definito. A questo scopo occorre introdurre la *energia specifica interna relativista*

$$(7,8)\qquad E' = c^2 + E$$

ed allora, dalla (5,12) si deduce, in virtù della (1,2), che

$$(7,9)\quad Fc^2 - TS = c^2 + E + pV - TS = E' + pV - TS = 0$$

che si può scrivere così

$$(7,10)\qquad G' = G + c^2 = 0$$

Arriviamo così alla interessante conclusione che «*Nei fluidi termodinamici ideali l'entalpia libera relativista* (*o potenziale termodinamico di Gibbs*) *è nulla*».

Per calcolare le altre grandezze termodinamiche, limitiamoci prima al caso in cui $q_i = 0$, ed allora l'equazione di stato (2,3) si riduce alla $2p = f^2 c^2$. Ne segue, per la (2,7) che

$$p = \mu_0 F c^2/n = \mu_0 (E' + pV)/n$$

Ricordando che $\mu_0 = 1/V$, si avrà $npV = E' + pV$, da cui segue l'equazione di stato in funzione della energia relativista

$$\boxed{pV = E'/(n-1)} \tag{7,11}$$

Dalla $G' = E' + pV - TS = 0$, segue poi che

$$H' = E' + pV = TS \; ; \; E'_0 = E' - TS = -pV \tag{7,12}$$

e quindi, tenendo conto della (11) avremo

$$\boxed{\begin{aligned} &H' = nE'/(n-1) &&; \; E'_0 = -E'/(n-1) \\ &S\cdot = nE'/(n-1)\,T &&; \; G' = 0 \end{aligned}} \tag{7,13}$$

Per calcolare la energia E' in funzione della temperatura, osserviamo che in base alla $Fc^2 = TS$, tenendo conto della (6,14) e della terza delle (13), si ha

$$Nc^2 T^n = n\mu_0 E'/(n-1), \text{ da cui } \mu_0 E' = (1 - 1/n)\, N c^2 T^n$$

che si può scrivere nel seguente modo

$$\boxed{\mu_0 E' = N_0 T^n} \tag{7,14}$$

dove N_0 é un coefficiente di proporzionalità. Tale legge si identifica con la (7,3) e ci dà la radiazione totale. Ne segue allora, in base alla (11) che *la pressione dipende soltanto dalla temperatura,* cioé si ha $p = p(T)$.

Possiamo calcolarse infine il calore specifico a volume costante, tenendo presente che riterendo ci alla unità di volume, si ha

$$C_v = T S'_T = T \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{n}{n-1} N_0 T^{n-1}\right) = n N_0 T^{n-1}$$

Ne segue la semplice formula

$$\boxed{C_v = n E'/T} \tag{7,15}$$

Dalle formule ottenute segue che esse coincidono per $n = 4$ con quelle della radiazione nera, e per $n = 5/2$ con quelle della radiazionc corpuscolare. Per n qualsiasi si ottengono i possibili fluidi termodinamici «ideale».

8. — Fluidi termici ideali con conducibilita' non nulla

Dalla relazione termodinamica $T\,dS = c^2 dF - dp/\mu_0$, segue che

$$d\,(TS - F c^2) = S\,dT - dp/\mu_0 \tag{8,1}$$

Se ci riferiamo ai fluidi termodinamici ideali, il primo membro si annulla, e la (1) si riduce alla semplice relazione

$$\boxed{p'_T = \mu_0 S} \tag{8,2}$$

Nel caso in cui la conducibilità é nulla, la pressione dipende solo dalla temperatura, ed allora avremo

$$dp/dT = N c^2 T^{n-1} \text{ ed integrando } p = N c^2 T^n/n$$

in accordo con la equazione di stato $2p = 2\mu_0 F c^2/n = 2 N c^2 \mu_0 T^n/n$.

E' interessante osservare che se $p = p(T)$, la (2) può identificarsi con l'equazione di Clapeyron-Clausius, nel caso in cui la entropia S_0 ed il volume V_0 sono nulli [12]

$$\frac{dp}{dT} = \frac{S - S_0}{V - V_0} = \frac{S}{V} = \mu_0 S \tag{8,3}$$

Nel caso più generale in cui $q_i \neq 0$, facciamo l'ipotesi che si ha ancora $p = p(T)$, ed allora la (2), in base alla (5,11) ci dà l'equazione differenziale

$$dp/dT = (n-1)\,k_0 \log\,(T/T_0)/2c^2 \tag{8,4}$$

Se imponiamo la condizione iniziale che per $T = T_0$ la pressione si annulli ($p = 0$), integrando la (4) si ricava la seguente equazione di stato

$$p = (n-1)\frac{k_0}{2c^2}\left[T \log\frac{T}{T_0} - (T - T_0)\right] \tag{8,5}$$

Da tale formula segue che per $T = 0$, la pressione assume il valore

$$p_0 = (n - 1)\, k_0\, T_0 / 2\, c^2 \tag{8,6}$$

Al crescere della temperatura, prima la pressione diminuisce, annullandosi alla temperatura critica $T = T_0$; poi cresce, assume il valore p_0 per $T = eT_0$, e continua a crescere all'aumentare di T.

Tenendo conto della (5,10), la (5) si può scrivere così

$$\boxed{p = p_0 + \mu_0\, F\, c^2 - (n - 1)\, k_0\, T / 2\, c^2} \tag{8,7}$$

che é simile alla equazione di stato proposta dal Mahjoub [1]

$$p = k_0\, T / c^2 + A\, (\mu_0) \tag{8,8}$$

dove $A(\mu_0)$ é una generica funzione di μ_0. Se poi osserviamo che in base alla (2,7), l'equazione di stato (2,3) é data da

$$2\, n\, p = 2\, \mu_0\, F\, c^2 - n\, \bar{q}^2 \tag{8,9}$$

eliminando $\mu_0 F c^2$ tra la (7) e la (9) si trova che nei fluidi termodinamici ideali, il vettore termico deve soddisfare alla ulteriore condizione

$$n\, q^2 = (n - 1)\, (k_0\, T / c^2 - 2\, p) - 2\, p_0 \tag{8,10}$$

Per concludere, procedendo come al n.º 7, possiamo calcolare le grandezze termodinamiche dei fluidi ideali con conducibilità termica

$$\left\{ \begin{aligned} p\, V &= \frac{E' - n\, q^2 / 2\, \mu_0}{n - 1} \quad ; \quad H' = \frac{n\, (E' - q^2 / 2\, \mu_0)}{n - 1} \\ E'_0 &= \frac{-E' + n\, \bar{q}^2 / 2\, \mu_0}{n - 1} \quad ; \quad S = \frac{n\, (E' - \bar{q}^2 / 2\, \mu_0)}{(n - 1)\, T} \end{aligned} \right. \tag{8,11}$$

In un successivo lavoro ci proponiamo di estendere i risultati ottenuti, al caso dei fluidi con generica equazione di stato $p = p(\mu_0, T)$, e di costruire una «termoidrodinamica proiettiva» valida su scala cosmica. Poiché nella relatività proiettiva interviene l'età t_0 dell'Universo, essa dovrebbe permetterci di affrontare su solide basi logiche lo studio delle prime fasi della espansione cosmica (Big-Bang), dal punto di vista termodinamico.

9. — I gruppi delle rotazioni e gli universi «ipersferic»

Come é ben noto, la fisica classica viene sviluppata in una serie di capitoli tra loro indipendenti (meccanica, acustica, termologia, ottica, elettricità e magnetismo). Passando alla relatività ristretta, l'ampliamento del gruppo base, porta ad una prima «unificazione» delle varie teorie fisiche, e ci riduciamo così a due soli capitoli: la *meccanica dei continui* (alla quale si riducono la meccanica e l'acustica) e l'*elettromagnetismo* (che riunisce assieme l'ottica, l'elettricità ed il magnetismo). La termologia, capitolo centrale della fisica, viene assorbita in parte dalla meccanica (come teoria cinetica del calore) ed in parte dall'elettromagnetismo (come energia raggiante). Appare allora ben chiaro che passando all'Universo di De Sitter a curvatura costante, basato sul gruppo di Fantappié, le due precedenti teorie si saldano assieme nella «magnetoidrodinamica proiettiva», con conseguente unificazione dei due aspetti (meccanico ed elettromagnetico) della termologia.

Come abbiamo infatti dimostrato in questa Memoria, é possibile ottenere la legge generale della radiazione termica

$$\boxed{\mu_0 E = N .\, T^n} \tag{9,1}$$

a partire dalle equazioni della termoidrodinamica.

E' noto infatti che se un corpo non é chiuso in una cavità, a temperatura uniforme, ma é libero, può accadere che é dotato di un potere assorbente indipendente dalla temperatura, ed allora la sua radiazione crescerà in ragione della 4º potenza della temperatura, e sarà solo questione di una differenza nella costante di emissione, che si potrà determinare esaminando il potere assorbente del corpo. Se invece il potere assorbente non é costante, vale la legge generale (1), nella quale, se il potere assorbente cresce con la temperatura (cosa che si verifica in generale), si ha $n > 4$, mentre negli altri casi si avrà $n < 4$. Così per esempio per il platino, si ha con buona approssimazione $n = 5$.

I risultati ottenuti nello studio dell'Universo di De Sitter («relatività proiettiva») e delle equazioni di Maxwell generalizzate, ci confermano allora che una impostazione gruppale della fisica, e l'uso dei gruppi delle rotazioni degli spazi ad n dimensioni (R_n), si rivela di grande utilità, anche perché si utilizzano dei metodi matematici assai semplici ed eleganti, che evitano le enormi difficoltà della geometria degli spazi acurvatura variabile.

Otteniamo per tale via una successione di «modelli di Universo», che sono rappresentati dalle ipersfere S_{n-1} dello spazio ad n dimensioni (per $n = 4,5...$). In conseguenza, ad ogni numero intero corrisponde un ben determinato modello di Universo, le cui leggi possono essere stabilite a partire dal gruppo R_n delle rotazioni dello spazio ad n dimensioni.

Sorge allora l'interessante problema di costruire nel modo più generale una relatività basata sul gruppo R_n, che rappresenta i movimenti in sé della ipersfera S_{n-1}. A tale scopo osserviamo che nel gruppo R_n, con le n coordinate proiettive $\bar{x}_i$ $(i = 1, 2 \dots n)$, non appena $n > 3$, intervengono $n - 3$ costanti universali, il cui ruolo é quello di fare assumere le dimensioni di una lunghezza (L) alle $n - 3$ coordinate, oltre la terza.

Procedendo poi come nella relatività proiettiva, occorre imporre le $n - 3$ condizioni di normalizzazione (per $n \geqslant 4$):

$$(9,2) \quad \bar{x}^2 = r^2 \ ; \ \dot{\bar{x}}^2 = -c^2 \ ; \ \ddot{\bar{x}}^2 = (c^2/r)^2 \dots [\bar{x}^{(n-4)}]^2 = [c^{n-4}/r^{n-5}]^2$$

dove abbiamo indicato con c la velocità della luce, con r il raggio della ipersfera, e con i puntini le derivate rispetto al tempo proprio.

In virtù della definizione del tempo proprio, la seconda condizione é una identità, ed abbiamo così $n - 4$ equazioni indipendenti nelle n incognite $\bar{x}_i$. Risolto tale sistema, é possibile esprimere le n variabili $x.$ in funzione delle 4 variabili (x, y, z, t), e cioé passare dalla formulazione n-dimensionale a quella spazio-temporale.

Se poi passiamo al limite, per r tendente all'infinito, ogni ipersfera S_{n-1} si schiaccia nello spazio euclideo E_{n-1} ad $n - 1$ dimensioni, e le n coordinate proiettive si riducono alle $n - 1$ coordinate cartesiane. Accade allora che il gruppo R_n si decompone nel prodotto delle rotazioni R_{n-1} e delle traslazioni T_{n-1} dello spazio ad $n - 1$ dimensioni, come per esempio accade nella relatività ristretta (per $n = 5$). In conseguenza, le condizioni di normalizzazione (2) si riducono a quelle più semplici

$$(9,3) \qquad \dot{x}^2 = -c^2 \ ; \ \ddot{x}^2 = 0 \dots [x^{(n-4)}]^2 = 0 \qquad (n \geqslant 6)$$

le quali sono $n - 5$ equazioni indipendenti nelle $n - 1$ incognite x_i.

10. — LE EQUAZIONI DI MAXWELL E LE IPERSFERE S_{n-1}

Abbiamo visto nella precedente memoria, che la cosmologia relativista presenta una indeterminazione di fondo, e la stessa cosa accade per le teorie unitarie della materia e della elettricità, in quanto questi due problemi sono affrontati separatamente [13]. Per tale motivo lo stesso Einstein, nell'ultimo suo scritto concludeva amaramente che «siamo molto lontani dal possedere una base concettuale della fisica, alla quale poterci in qualche modo affidare», e suggeriva di «ricercare una teoria di pura natura algebrica, senza continuo spazio-temporale» [14].

Occorre quindi seguire una via diversa, la quale é appunto quella gruppale indicateci dal Fantappié con la sua «teoria degli Universi fisici» [15].

Infatti, in una concezione gruppale della fisica acquistano particolare significato ed importanza le equazioni di Maxwell, scritte nello spazio iperferico S_{n-1}. Se ne deduce che tali equazioni debbono riunire in una teoria unica il campo elettrico, quello magnetico ed altri campi fisici, attraverso la struttura geometrica della ipersfera.

Come é ben noto, Einstein affrontava il problema unitario generalizzando le equazioni gravitazionali, in modo da comprendere quelle elettromagnetiche, e per tale via il problema restava largamente indeterminato. Se invece ci poniamo dal punto di vista gruppale, il problema unitario deve essere affrontato in modo opposto, e cioé *generalizzando le equazioni di Maxwell in modo da comprendere la gravitazione.*

Indicando con $H_{ik} = (-H_{ki})$ il campo generalizzato, con $n(n-1)/2$ componenti distinte, e cioé tante quanti sono i parametri del gruppo R_n, le equazioni di Marwell generalizzate sono le seguenti

$$\text{(10,1)} \qquad \boxed{\begin{cases} \mathrm{Rot}\ H_{ik} = J_{ikl} \\ \mathrm{Div}\ H_{ik} = I_k \end{cases}} \quad (i,\ k,\ 1 = 1, 2 \ldots n)$$

dove abbiamo indicato con J_{ikl} il «vortice» e con I_k la «sorgente» generalizzata.

Come risulta evidente nel passaggio stesso dalla fisica classica a quella relativistica, appare allora una profonda connessione tra l'ampliamento del gruppo base della fisica e la «unificazione» dei campi fisici, e questo meccanismo di sintesi *é tradotto matematicamente dalla struttura algebrica dei gruppi delle rotazioni*, ognuno dei quali contiene i precedenti ed é contenuto nei successivi [16].

Il più semplice modello di Universo ipersferico, si ottiene per $n = 4$, ed é rappresentato da una ipersfera S_3 tridimensionale, puramente spaziale. Tale modello (che chiameremo di Fantappié) é in un certo senso analogo a quello statico di Einstein, ma ne differisce perché é senza tempo, ed é riempito da un fluido elettrizzato (plasma) in equilibrio statico.

Infatti, le relative equazioni di Marwell, per $n = 4$ ed in assenza di sorgenti ($I_k = 0$), sono le seguenti

$$
\text{J}10{,}2) \qquad \begin{cases} \mathrm{Div}\ \mathbf{E} = \varrho \\ \mathrm{Rot}\ \mathbf{C} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial \overline{x}_5} = \vec{\Omega} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{Rot}\ \mathbf{E} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \mathbf{C}}{\partial \overline{x}_5} = 0 \\ \mathrm{Div}\ \mathbf{C} = 0 \end{cases}
$$

dove abbiamo indicato con $\mathbf{E}$ il campo elettrico, con $\mathbf{C}$ il campo idrostatico, con ϱ la densità di carica e con $\vec{\Omega}$ il vortice. Per r tendente all'infinito, esse si riducono alle equazioni della *elettrostatica* ed a quelle della *idrostatica*, come vedremo meglio in un successivo lavoro. Si vede così che gli Universi ipersferici ci forniscono, già sin dal primo modello, una «teoria unitaria» della materia e della elettricità, nella quale il campo elettrostatico é saldato con quello idrostatico, e la densità di carica é saldata al vettore vortice.

Se invece passiamo al successivo modello, per $n = 5$, si ottiene il cronotopo di De Sitter a curvatura costante, nel quale le equazioni di Maxwell generalizate, sono quelle della magnetoidrodinamica, come abbiamo già visto nelle precedenti memorie [8].

11. — Le equazioni di Maxwell di R_6 e la gravitazione

Particolarmente interessante é poi il passaggio dal gruppo R_5 (relatività proiettiva) a quello R_6 (relatività conforme), nel quale intervengono i movimenti uniformemente accelerati, gruppo che si sta rivelando di grande importanza nel campo della fisica quantistica e delle particelle elementari [17].

Le corrispondenti equazioni di Maxwell (10,1), per $n = 6$, si possono interpretare, come abbiamo suggerito in precedenti lavori [8], come «teoria unitaria» della magnetoidrodinamica e della gravitazione, e ci darebbe una teoria della gravitazione su basi gruppali, del tipo di quella di Newton. E' interessante osservare che per r tendente all'infinito si ricade in uno spazio euclideo E_5, e le equazioni di Maxwell generalizzate si decompongono in due gruppi distinti, e cioé le equazioni del campo *elettromagnetico-gravitazionale* e le equazioni del campo *idrodinamico* generalizzato. Ne segue che localmente il campo elettromagnetico é accoppiato a quello gravitazionale, e solo su scala cosmica interagisce con quello idrodinamico.

Applicando quanto abbiamo detto al n° 9. per $n = 6$, occorre introdurre il vettore *posizione* x_i $(i = 1, 2 \dots 6)$, il vettore *velocità* $u_i = \dot{x}_i$ ed il vettore *accelerazione* $a_i = \ddot{x}_i$, così normalizzati

$$(11,1) \qquad x^2 = 1 \ ; \ u^2 = -1 \ ; \ a^2 = 1$$

dove abbiamo omesso le sbarrette sui vettori proiettivi, eda bbiamo posto per semplicità $c = r = 1$. Se allora introduciamo la derivata, rispetto al tempo proprio, della accelerazione $a_i' = \dddot{x}_i$, dalle (1), derivando successivamente per il tempo proprio, si deduce la seguente tabella di moltiplicazione

(11,2)

	x	u	a	a'
x	1	0	1	0
u	0	-1	0	-1
a	1	0	1	0
a'	0	-1	0	a'^2

Fatta questa premessa, le equazioni (10,1) ci descrivono, per $n = 6$, un fluido rappresentato dal tensore H_{ik}, con 15 componenti distinte. Procedendo allora come nella relatività proiettiva [8], si possono definire il «campo idrodinamico» c_i, il «campo magnetico» h_i ed il «campo gravitazionale» g_i nel seguente modo

$$(11,3) \qquad \boxed{c_i = H_{ik}\, x_k \ ; \ h_i = H_{ik}\, u_k \ ; \ g_i = H_{ik}\, a_k}$$

da cui segue che

$$(11,4) \qquad c_i\, x_i = 0 \ ; \ h_i\, u_i = 0 \ ; \ g_i\, a_i = 0$$

In questo caso più generale si hanno tre «indici» del fluido cioé

$$f_1 = H_{ik}\, x_i\, u_k \ ; \ f_2 = H_{ik}\, x_i\, a_k \ ; \ f_3 = H_{ik}\, a_i\, u_k \tag{11,5}$$

e da tali definizioni segue che

$$f_1 = h_i\, x_i = -c_k\, u_k \ ; \ f_2 = g_i\, x_i = -c_k\, a_k \ ; \ f_3 = h_i\, a_i = -g_k\, u_k \tag{11,6}$$

Dalle nuove equazioni di Maxwell (per $n = 6$) si ricavano come casi limiti varie teorie tra le quali le più semplici sono le seguenti:

I.— La *termoidrodinamica* nella quale il tensore H_{ik} si riduce al momento polare del campo idrodinamico

$$\boxed{H_{ik} = c_i\, x_k - c_k\, x_i} \tag{11,7}$$

Moltiplicando per u_k e poi per a_k e tenendo conto delle (2) segue che

$$h_i = f_1\, x_i \ ; \ g_i = c_i + f_2\, x_i \tag{11,8}$$

La prima ci dice che in questo caso si ha un campo magnetico che non dipende dalle correnti e cariche, ma dall'indice del fluido f_1 e dalla distanza dalla origine. In base alla (7), il tensore energetico é dato da

$$T_{ik} = c_i\, c_k - c_s\, c_s \left(\frac{1}{2}\, \delta_{ik} - x_i\, x_k\right) \tag{11,9}$$

come nella relatività proiettiva.

II.— La *magnetoidrodinamica ideale*, per la quale si ha

$$\boxed{H_{ik} = u_i\, h_k - u_k\, h_i} \tag{11,10}$$

da cui, moltiplicando per x_k e poi per a_k, si deduce che

$$c_i = f_1\, u_i \ ; \ g_i = f_3\, u_i \tag{11,11}$$

e cioé il campo idrodinamico e quello gravitazionale risultano paralleli alla velocità del fluido. Il tensore energetico sarà allora

$$T_{ik} = h_i h_k - h_s h_s \left(\frac{1}{2} \delta_{ik} + u_i u_k\right) \tag{11,12}$$

come nella relatività ristretta.

III. — La *teoria della gravitazione*, nella quale il campo é descritto dal tensore

$$\boxed{H_{ik} = g_i a_k - g_k a_i} \tag{11,13}$$

Moltiplicando per x_k e per u_k si trova che in questo caso

$$c_i = g_i - f_2 a_i \ ; \ h_i = f_3 a_i \tag{11,14}$$

che sono simili alle (8). La seconda ci dice che il campo magnetico dipende dall'indice del fluido e dalla accelerazione, come appunto suggerisce la ben nota legge proposta dal Blackett, in base alla quale un corpo ruotante genera un campo magnetico.

Il relativo tensore energetico é dato da

$$T_{ik} = g_i g_k - g_s g_s \left(\frac{1}{2} \delta_{ik} - a_i a_k\right) \tag{11,15}$$

da cui segue che appare un legame tra inerzia (a_i) e gravitazione (g_i).

Dalle formule scritte segue la validità, nella relatività conforme di un «principio di trialità», per effetto del quale si passa da una teoria all'altra mediante lo scambio dei tre vettori (x_i, u_i, a_i) e che sarebbe interessante approfondire.

Da questi brevi cenni si vede come la fisica costruita su basi gruppali si rivela del più alto interesse, e ci potrà fornire una nuova teoria della gravitazione del tipo di quella di Newton ed una nuova teoria unitaria della materia e della elettricità.

Prof. Giuseppe ARCIDIACONO
Via Acquedotto del Peschiera 96
00135 - ROMA

BIBLIOGRAFIA

(1) C. ECKART, *The thermodynamics of irreversible processes*, Phys. Rev. *58*, 919 (1940); B. MAHJOUB, *Système d'evolution d'un fluide relativiste conducteur de chaleur, d'apres le schéma d'Eckart*, Ann. Poincaré, XV, 153, (1971); *Systéme d'évolution d'un fluide relativiste conducteur de chaleur*, Ann. Poinc. XIV, 113 (1971).

(2) A. LICHNEROWICZ, *Relativistic hydrodynamics and magnetohydrodynamics*, Benjamin, New York, 1967.

(3) L. D. LANDAU, E. M. LIFCHITZ, *Fluid Mechanics*, London 1959.

(4) C. CATTANEO, *Sur une forme de l'équation de la chaleur éliminant le paradoxe d'une propagation instantanée*, C. R. Acad. Sci Paris, *247*, 431 (1958); M. KRANYS, *Relativistic hydrodynamics with irreversible thermodynamics without the paradox of infinite velocity of heat conduction*, Nuovo Cimento, X, 42 B, 51 (1966).

(5) G. BOILLAT, *Relativistic Hyperbolic Heat equation*, Lett. Nuovo Cimento, *10*, 296 (1974); *Incompressible relativistic fluid with heat conduction*, Lettere Nuovo Cimento, *10*, 352 (1974).

(6) C. MARLE, *Sur l'établissement des equations de l'hydrodynamique des fluides relativistes dissipatifs*, Ann. Poinc. X, 127 (1969); G. A. MAUGIN, *Constitutive equations for heat conduction in general relativity*, J. Phys. Math. Nucl. Gen. *7*, 465 (1974).

(7) G. ARCIDIACONO, *Le equazioni di Maxwell generalizzate*, Rend. Accademia dei Lincei, XVII, 515 (1955); *L'Universo di De Sitter-Castelnuovo e la termoidrodinamica*, Coll. Math. XXIII, 105 (1972).

(8) G. ARCIDIACONO, *Relatività e Cosmologia*, Libreria Veschi (Viale Università, 7), Roma 1973, cap. XIV.

(9) G. ARCIDIACONO, *Il modello di Kein e la Cosmologia*, Coll. Math. XXV, 159, (1974).

(10) P. STRANEO, *Teoria generalizzata delle dimensioni fisiche*, Nuovo Cimento, *17*, 183 e 506 (1940); E. RECAMI, *Black-Body radiation and generalized theory of physical dimensions*, Lettere Nuovo Cimento, *2*, 297 (1971).

(11) L. LANDAU, E. LIFCHITZ, *Physique statistique*, Moscou 1967, cap. V, pagg. 180-209.

(12) L. LANDAU, E. LIFCHITZ, Op. cit. pagina 318, paragrafo 82.

(13) J. MERLEAU-PONTY, *Cosmologie du XX^e^ siècle*, Gallimard, Paris, 1965.

(14) A. EINSTEIN, Prefazione al volume: *Cinquant'anni di relatività*, Sansoni, Firenze, 1955.

(15) L. FANTAPPIE', *Opere Scelte*, vol. I. II, Ed. Unione Matematica Italiana, Bologna, 1973; *Sui fondamenti gruppali della fisica*, Coll. Math, f. 2, 1959.

(16) G. ARCIDIACONO, *Sulla importanza del «gruppo base nel problema della unificazione dei campi fisici*, Rend. Acc. Lincei, XVIII, 386 (1955); *Sulle trasformazioni finite dei gruppi delle rotazioni*, Coll. Math. XV, 259 (1963).

(17) R. L. INGRAHAM, *Conformal relativity*, Nuovo Cimento 1955; S. HORCHANI, *Sur un nouveau groupe de symmetrie de la mécanique quantique relativiste*, Ann. Poincaré, XV, 321 (1971); These, Dijon 1974.