LOKALTOPOLOGISCHE VEKTORRÄUME II

NORBERT ADASCH und BRUNO ERNST

Wir setzen in dieser Arbeit die in [1] begonnene Theorie der lokaltopologischen Räume fort.

Wir haben gezeigt, daß beliebige topologische lineare Hüllen von lokaltopologischen Räumen wieder lokaltopologisch sind. Bei Klassen $\mathcal{K}$ von topologischen Vektorräumen, die stabil bezüglich der Bildung von topologischen linearen Hüllen sind, stellt sich sofort die Frage, eine Teilklasse $\mathcal{K}_0$ von möglichst «elementaren» Räumen zu finden, so daß man jeden Raum aus $\mathcal{K}$ als topologische lineare Hülle von Räumen aus $\mathcal{K}_0$ gewinnen kann.

Für die Klasse $\mathcal{K}$ der lokaltopologischen Vektorräume zeigen wir daß $\mathcal{K}_0$ die Klasse der σ-lokaltopologischen Vektorräume ist.

Die dabei verwendete Konstruktion von σ-lokaltopologischen Räumen zeigt einem sofort, wie man für die Klasse $\mathcal{K}$ der ultrabornologischen Räume eine Klasse $\mathcal{K}_0$ gewinnen kann. $\mathcal{K}_0$ stellt sich hier als die Klasse der ultrabornologischen (UDF)-Räume heraus.

Im zweiten Teil der Arbeit befassen wir uns mit der Vollständigkeit von $L_b(E, F)$ für vollständige Räume F. Die in [2] (1) angegebene Darstellung der vollständigen Hülle von $L_b(E, F)$ ergab ein Vollständigkeitskriterium [2] (2). Danach blieb jedoch die Frage offen, genau diejenigen topologischen Vektorräume E zu finden, für die $L_b(E, F)$ vollständig ist. Dies ist uns bisher nicht gelungen. Setzt man jedoch voraus, daß E eine Fundamentalfolge der beschränkten Teilmengen besitzt, so lösen die σ-lokaltopologischen Räume dieses Problem.

1. Elementare lokaltopologische Vektorräume

Sei $E(\mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum. $\mathcal{B}$ sei das System aller kreisförmigen beschränkten Teilmengen. $\mathcal{B}_f$ sei ein Fundamentalsystem von $\mathcal{B}$.

(d. h. $\mathcal{B}_f \subset \mathcal{B}$ und zu jedem $B \in \mathcal{B}$ existiert ein $B' \in \mathcal{B}_f$ mit $B \subset B'$).

Sei $B \in \mathfrak{B}$. Wir bilden die Mengen $B_n = \overline{\sum_1^{2^{n-1}} B}$, den Abschluß der 2^{n-1}-fachen Summe von B. E_B sei der von den B_n in E aufgespannte lineare Teilraum, also $E_B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

In [1] 3. setzen wir für $\sigma = \{B_n\}$ und dort für $E(\mathcal{T})$ den Raum E_B mit der induzierten Topologie $\hat{\mathcal{T}}$. Dann können wir die Topologie $\mathcal{T}_{\{B_n\}}$ auf E_B bilden. Es ist die feinste derjenigen linearen Topologien $\mathcal{T}'$ auf E_B, für die die Einbettungen I_n von B_n (mit der von $E(\mathcal{T})$ induzierten Topologie) in $E_B(\mathcal{T}')$ stetig sind. Oder anders ausgedrückt ([1] 3. (1))

(1) *Ein Faden $\mathcal{U} = \{U_n\}$ ist genau dann ein $\mathcal{T}_{\{B_n\}}$*-topologischer Faden, wenn $U_m \cap B_n$, *n, $m \in \mathbb{N}$ Nullumgebungen von B_n (in der durch $\mathcal{T}$ induzierten Topologie) sind.*

Aus der Verallgemeinerung eines Satzes von Dieudonné-Schwartz [1] 3. (8) und aus [1] 1. (1) erhalten wir

(2) *Die B_n sind eine Fundamentalfolge der beschränkten Teilmengen von $E_B(\mathcal{T}_{\{B_n\}})$.*

Da auf den B_n $\mathcal{T}_{\{B_n\}}$-Nullumgebungen und $\mathcal{T}$-Nullumgebungen zusammenfallen, sieht man sofort, daß $E_B(\mathcal{T}_{\{B_n\}})$ ein lokaltopologischer Vektorraum ist. Zusammen mit (2) haben wir

(3) *$E_B(\mathcal{T}_{\{B_n\}})$ ist ein σ-lokaltopologischer Vektorraum.*

In [1] 1. haben wir die zu $\mathcal{T}$ assozierte lokaltopologische Topologie $\mathcal{T}^u$ definiert. Ein Faden $\mathcal{U} = \{U_n\}$ ist genau dann ein $\mathcal{T}^u$-Faden, wenn $U_n \cap B$, $n \in \mathbb{N}$, $B \in \mathfrak{B}$ Nullumgebungen in der durch $\mathcal{T}$ induzierten Topologie von B sind. Man sieht sofort, daß man $\mathfrak{B}$ durch eine Fundamentalsystem $\mathfrak{B}_f$ ersetzen kann.

Wir zeigen nun

(4) *$E(\mathcal{T}^u)$ ist die topologische lineare Hülle der $E_B(\mathcal{T}_{\{B_n\}})$, $B \in \mathfrak{B}_f$.*

Beweis. Ein Faden $\mathcal{U} = \{U_n\}$ ist genau dann ein topologischer Faden der topologischen linearen Hüllentopologie auf E, wenn $\mathcal{U} \cap E_B = \{U_n \cap E_B\}$ ein $\mathcal{T}_{\{B_n\}}$-topologischer Faden von E_B für alle $B \in \mathfrak{B}_f$ ist. Dies ist aber äquivalent damit, daß $\mathcal{U} \cap B = \{U_n \cap B\}$ für alle $B \in \mathfrak{B}_f$ Nullumgebungen der von $\mathcal{T}$ auf B induzierten Topologie sind, also $\mathcal{U}$ ein $\mathcal{T}^u$-topologischer Faden ist.

Als Spezialfall erhalten wir für lokaltopologische Räume $E(\mathcal{T})$, also $\mathcal{T} = \mathcal{T}^u$, aus (4)

(5) *Ein lokaltopologischer Vektorraum* $E(\mathcal{T})$ *ist die topologische lineare Hülle der* σ*-lokaltopologischen Räume* $E_B(\mathcal{T}_{\{B_n\}})$, $B \in \mathfrak{B}_f$.

Da die Topologie $\mathcal{T}_{\{B_n\}}$ auf E_B stets eine Nullumgebungsbasis aus $\mathcal{T}$-abgeschlossenen Teilmengen von E_B besitzt, folgt aus der $\mathcal{T}$-Vollständigkeit der B_n auch die $\mathcal{T}_{\{B_n\}}$-Vollständigkeit ([3] § 18 (4) 4). Diese ist aber mit der Vollständigkeit von $E_B(\mathcal{T}_{\{B_n\}})$ äquivalent ([1] 4. (4))

Damit gilt

(6) *Ist* $E(\mathcal{T})$ *lokalvollständig, so sind alle* $E_B(\mathcal{T}_{\{B_n\}})$ *vollständige* σ*-lokaltopologische Räume.*

2. Elementare ultrabornologische Räume

Was wir für die lokaltopologischen Räume in 1. gemacht haben, wollen wir nun für die Teilklasse der ultrabornologischen Räume entwickeln.

Sei $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_f$, $B \in \mathfrak{B}$, B_n wie in (1). E_B versehen wir mit der Topologie $\mathcal{T}_B$, die als Nullumgebungsbasis alle Elemente der Fäden $\mathcal{U} = \{U_n\}$ haben soll, die alle B_n absorbieren. Man sieht sofort, daß $\mathcal{T}_B$ feiner als $\mathcal{T}$ ist und die B_n $\mathcal{T}_n$-beschränkt sind. Damit ist aber klar:

(1) $E_B(\mathcal{T}_B)$ *ist ultrabornologisch.*

Bemerkung. Für absolutkonvexe B sind die Räume $E_B(\mathcal{T}_B)$ die bekannten normierten Räume mit B als Einheitskugel.

Wir zeigen nun

(2) *Die* B_n *sind eine Fundamentalfolge der beschränkten Teilmengen von* $E_B(\mathcal{T}_B)$.

Beweis. Angenommen es gibt eine beschränkte Menge B' von $E_B(\mathcal{T}_B)$ mit $B \not\subset B_n$. Also gibt es $x_n \in B'$ mit $x_n \notin B_{2n-1}$. Da $B_{2n-1} \supset 2^{n-1} B_n$ gilt $\frac{1}{2^{n-1}} x_n \notin B_n$. Da die B_n auch in $E(\mathcal{T}_B)$ abgeschlossen sind, gibt es eine Folge von $\mathcal{T}_B$-Fäden $\mathcal{U}^{(n)} = \{U_j^{(n)}\}$ mit der Eigenschaft

$$\frac{1}{2^n} x_n \notin U_j^{(n)} + B_n.$$

Sei $\mathcal{V} = \{V_j\}$ mit

$$V_j = \bigcap_{n=1}^{\infty} (U_j^{(n)} + B_{n-j+1}) \; (B_l = 0,\; l = 0, -1, -2 \ldots)$$

Man sieht sofort, daß $\mathcal{V}$ ein Faden ist, der alle B_n absorbiert, also ist $\mathcal{V}$ ein $\mathcal{T}_B$-Faden. Da aber $\frac{1}{2^n} x_n$ in $E_B(\mathcal{T}_B)$ gegen 0 konvergiert, widerspricht dies der Konstruktion von V_1.

Man erhält also zusammenfassend

(3) *$E_B(\mathcal{T}_B)$ ist ein ultrabornologischer (UDF)-Raum.*

Sei $\mathcal{T}^{ub}$ die zu $\mathcal{T}$ assozierte ultrabornologische Topologie, so beweist man elementar

(4) *$E(\mathcal{T}^{ub})$ ist die topologische lineare Hülle der ultrabornologischen (UDF)-Räume $E_B(\mathcal{T}_B)$, $B \in \mathfrak{B}_f$.*

Als Speziealfall erhült man also

(5) *Ein ultrabornologischer Raum $E(\mathcal{T})$ ist die topologische lineare Hülle der ultrabornologischen (UDF)-Raume $E_B(\mathcal{T}_B)$, $B \in \mathfrak{B}_f$.*

3. Vollständigkeit von $L_b(E, F)$

In [2] (2) wird gezeigt:

(1) *Der Raum $L_\sigma(E, F)$ ($L(E, F)$, die stetigen linearen Abbildungen, versehen mit der Topologie der gleichmäbigen Konvergenz auf den beschränkten Teilmengen $B \in \sigma$) ist genau dann für vollständige F vollständig, wenn alle linearen Abbildungen A von E in F, die für jedes $B \in \sigma$ und jede Nullumgehung V von F eine Zerlegung in lineare Abbildungen $A = A_1 + A_2$ besitzen, A_1 stetig, $A_2(B) \subset V$, selbst stetig sind.*

Wie in [1] 3. definieren wir auf E eine lineare Topologie $\mathcal{T}_\sigma$ (jetzt ist σ nicht notwendig abzählbar), mit einer Nullumgebungsbasis, bestehend aus denjenigen Elementen der Fäden $\mathcal{U} = \{U_n\}$, die auf jedem $B \in \sigma$ Nullumgebungen der vom Raum $E(\mathcal{T})$ induzierten Topologie induzieren.

Analog zu [1] 2. (6) zeigt man vermöge (1)

(2) *Sei F vollständig und sei $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\sigma$ auf E, dann ist $L_\sigma(E, F)$ vollständig.*

Folgende Frage ist offen: Sei $E(\mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum mit der Eigenschaft, daß für jeden vollständigen Raum F, $L_\sigma(E, F)$ vollständig ist. Gilt für $E(\mathcal{T})$ dann $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\sigma$?

Wir lösen dieses Problem für abzählbare Systeme σ. Es gilt

(3) *Sei $E(\mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum, $\sigma = \{B_n\}$ ein abzählbares System von beschränkten Teilmengen (mit den Eigenschaften von* [1] (3). *$E(\mathcal{T})$ habe die Eigenschaft, daß für jeden vollständigen topologischen Vektorraum F $L(E, F)$ vollständig ist. Dann gilt auf E $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\sigma$. $E(\mathcal{T})$ ist sogar ein σ-lokaltopologischer Raum.*

Beweis. Nach [1] 3. (2) b) können wir jeden $\mathcal{T}_\sigma$-Faden $\mathcal{V} = \{V_j\}$ in der Form $V_j = \bigcap_{n=1}^{\infty} (B_{n-j} + U_j^{(n)})$, $\{U_j^{(n)}\} = \mathcal{U}^{(n)}$ eine Folge von $\mathcal{T}$-Fäden, annehmen. Wir müssen zeigen, daß $\{V_j\}$ ein $\mathcal{T}$-Faden ist. Sei dazu:

$$F_o = \{(x_n) \in \prod_{n=1}^{\infty} E_n \, ; \; E_n = E, \; x_i = x_j \text{ für fast alle } i, j\}$$

Sei $S_j^{(o)} = F_o \cap \prod_{n=1}^{\infty} (B_{n-j} + U_j^{(n)})$. $\{S_j^{(o)}\}$ ist ein Faden von F_o. Sei $F_1 = F_o|_{N(\{S_j^{(o)}\})}$ der Quotientenraum von F_o nach dem Nullraum $N(\{S_j^{(o)}\})$ des Fadens $\{S_j^{(o)}\}$ Dann ist der Faden $\{S_j^{(o)}\}$ mit $S_j^{(o)} = = K S_j^{(o)}$ (K = Quotientenabbildung) ein Faden auf F_1, der dort eine metrisierbare lineare Topologie erzeugt.

Sei schließlich F die vollständige Hülle von F_1. Seien $I_m^{(o)}$ die Abbildungen von E in F_o, definiert durch:

$$I_m^{(o)}(x) = (x, \ldots, x, 0, \ldots) \text{ (bis zur } m\text{-ten Stelle!)}$$

Seien $I_m = K \circ I_m^{(o)}$ von E in F. Man überzeugt sich sofort, daß die I_m stetige lineare Abbildungen von $E(\mathcal{T})$ in F sind.

Sei weiterhin $I^{(o)}$ die Abbildung von E in F_o, definiert durch

$$I^{(o)}(x) = (x, x, x, \ldots)$$

Sei $I = K \circ I^{(o)}$. Wir zeigen nun, daß für I (1) anwendbar ist. Seien dazu $K S_j^{(o)}$ und B_n vorgegeben. Dann gilt

$$(I^{(o)} - I_{n+j-1}^{(o)})(B) \subset S_j^{(o)},$$

also gilauch

$$(I - I_{n+j-1})(B_n) \subset K S_j^{(o)}$$

Da $I = I_{n+j-1} + (I - I_{n+j-1})$ gilt und $L_\sigma(E, F)$ vollständig ist, folgt nach (1), daß I stetig ist. Also sind $I^{-1}(K(S_j^{(o)}))$ Nullumgebungen von $E(\mathcal{T})$ und wegen

$$I^{-1}(K(S_j^{(o)})) = I^{(o)-1} \circ K^{-1}(K S_j^{(o)}) \subset$$
$$\subset I^{(o)-1}(S_j^{(o)} + N(\{S_j^{(o)}\}) \subset I^{(o)-1}(S_{j-1}^{(o)}) \subset V_{j-1}$$

ist $\mathcal{V} = \{V_j\}$ ein $\mathcal{T}$-Faden von E. Es gilt also $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\sigma$. Daß $E(\mathcal{T})$ sogar σ-lokaltopologisch ist, folgt aber sofort aus [1] 3. (8).

Zusammen mit [1] 3. (12) erhält man eine neue Charakterisierung der σ-lokaltopologischen Räume.

(4) *$E(\mathcal{T})$ ist genau dann σ-lokaltopologisch, wenn für jeden (F)-Raum F der Raum $L_b(E, F)$ (versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen beschränkten Teilmengen) ein (F)-Raum ist.*

[1] ADASCH, N. u. B. ERNST: *Lokaltopologische Räume* (erscheint demnächst)

[2] ADASCH, N.: *Über die Vollständigkeit von $L_\sigma(E, F)$*. Math. Ann. 191, 290-292 (1971)

[3] KÖTHE, G.: *Topologische lineare Räume I*. Springer, Berlin-Heidelberg-New York 2. Aufl. (1966)