SOBRE LIMITES INDUCTIVOS ESTRICTOS NUMERABLES

por

ANTONIO MARQUINA (*)

SUMMARY

In this paper we give some extensions of certain results of *M.* VALDIVIA [3], which generalize the results given by *M.* DE WILDE and C. HOUET in [1]. More precisely we eliminate the conditions of barrelledness in [3] and [1] and we obtain the same results in a wider class of locally convex spaces. As consequence we give conditions for the inheritance of completeness in the sense of Mackey for countable strict inductive limits.

Los espacios vectoriales que utilizamos aquí están definidos sobre el cuerpo K de los números reales o complejos. Con la palabra «espacio» y el símbolo (E, t), significaremos a un espacio vectorial E, dotado de una topología t, localmente convexa y separada. Si (E, t) es un espacio designaremos por E' y E^* el dual topológico y algegebraico del espacio E, respectivamente. Si B es un conjunto absolutamente cerrado y acotado de un espacio (E, t), denotaremos por E_B al espacio normado sobre la envoltura lineal de B, siendo B su bola unidad cerrada. Si $<E, F>$ es un par dual, denotaremos por $s(E, F)$, $m(E, F)$ y $b(E, F)$ las topologías débil, de MACKEY y fuerte sobre E, respectivamente. Sea $<E, F>$ un par dual, sea $\{x_n\}$ una sucesión de E; decimos que $\{x_n\}$ converge a x_0 en el sentido de MACKEY respecto de $<E, F>$ si existe un conjunto B, absolutamente convexo $s(E, F)$-cerrado y $s(E, F)$-acotado, tal que $\{x_n\}$ y x_0 son elementos de E_B y x_n converge a x_0 en E_B para la topología de la

---

(*) Este trabajo ha sido realizado en el Departamento de Teoría de Funciones y Ecuaciones Funcionales de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Valencia, dirigido por el Prof. Dr. Manuel Valdivia.

norma; si además E_B es un espacio de BANACH, se dice que $\{x_n\}$ converge a x_0 en el sentido de BANACH-MACKEY respecto a $<E, F>$. Sea (E,t) un espacio, denotamos por $t_m\,(t_{m'})$, la topología sobre E' de la convergencia uniforme sobre todas las sucesiones de E convergentes al origen en el sentido de MACKEY (de BANACH-MACHEY) respecto de $<E, E'>$. Se dice que un espacio es *localmente completo* si para cada conjunto B, absolutamente convexo cerrado y acotado del espacio E, el espacio normado E_B es BANACH. Si E es un espacio, denotaremos por $\hat{E}$ la completación de E.

El primer teorema dado aquí, extiende de forma sensible el Teorema 1 en [3] y el Corolario 2c en [1]. La técnica empleada para su demostración nos la ha sugerido Lema 1 de [4].

Teorema 1.— «*Sea* (E, t) *un espacio. Sea* $\mathcal{B}$ *una familia saturada de conjuntos acotados de* E, *que cubre el espacio* E *y sea* $t_{\mathcal{B}}$ *la topología sobre* E' *de la convergencia uniforme sobre cada elemento de la familia* $\mathcal{B}$. *Supongamos que* $(E', t_{\mathcal{B}})$ *es localmente completo y la topología original de* E, t, *sea más fina que* $s\,(E', E)_{m'}$. *Sea* $\{U_n\}$ *una sucesión creciente de conjuntos de* E, *absolutamente convexos, tales que para cada* $B \in \mathcal{B}$, *existe un entero positivo* n_0, *tal que* U_{n_0} *absorbe* B. *Si para cada* n, U_n *es un conjunto completo de* (E, t), *entonces,* (E, t) *es un espacio completo.*»

Demostración: Sea x un elemento de $\hat{E}$, que no esté en E. Como U_n es un conjunto cerrado en $\hat{E}$, para cada n, podemos aplicar el teorema de Hahn-Banach y así existirá para cada n, una forma lineal continua u_n en U_n^0, tal que $u_n(x) = n$. Veamos que $\{u_n: n = 1, 2, \ldots\}$ es un conjunto $t_{\mathcal{B}}$-acotado de E'. Sea B un elemento de la familia $\mathcal{B}$, entonces existe un entero positivo n_0, tal que U_{n_0} absorbe B, y, por lo tanto, existe un número positivo λ, tal que $\lambda B \subset U_{n_0}$. De esta manera, si $n \geqslant n_0$, $u_n \in U^0_{n_0}$, y así

$$\sup_{\substack{n \geqslant n_0 \\ z \in B}} |u_n(z)| \leqslant (1/\lambda)$$

Por otra parte, el conjunto finito $\{u_1, u_2, \ldots, u_{n_0-1}\}$ está acotado sobre B. Así pues, existe un número positivo M, tal que

$$\sup_{\substack{n = 1, \ldots \\ z \in B}} |u_n(z)| \leqslant M$$

Sea A la envoltura absolutamente convexa y $s(E', E)$-cerrada del conjunto $\{u_n: n = 1, 2, \ldots\}$. Entonces A es un conjunto t_B-cerrado y t_B-acotado en virtud de ([2], p. 210), y, por lo tanto, E'_A es un espacio de Banach por ser (E', t_B) localmente completo. De esta manera, la sucesión $\{(1/n)u_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a cero en E'_A, es un conjunto $s(E', E)_{m'}$-equicontinuo. Puesto que la topología t es más fina que $s(E', E)_{m'}$, la sucesión $\{(1/n)u_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un conjunto equicontinuo en (E, t), y, por lo tanto, será equicontinuo en $(\hat{E}, \hat{t})$, así existirá un punto $u \in E'$, $s(E', E)$-adherente a la sucesión. Obviamente $u(x) = 1$ y u se anula sobre E. Como E es denso en $(\hat{E}, \hat{t})$, se concluye que $u(x) = 0$. lo cual es una contradicción. Q. E. D.

Corolario 1.1.— «*Con las condiciones del Teorema* 1, *si* $\hat{U}_n$ *es la clausura de* U_n *en la completación de* (E, t), $\hat{E}$, *entonces*,

$$\hat{E} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{U}_n.»$$

A partir del Teorema 1, se deduce el bien conocido resultado de espacios DF, de que un espacio DF es casicompleto si y sólo si es completo ([2], p. 402).

El resultado dado en el siguiente teorema, estudia qué propiedades posee la topología límite inductivo de una sucesión de subespacios de un espacio, cuando éste posee las propiedades especificadas en el Teorema 1, es decir, sin propiedades de tonelación.

Teorema 2.— «*Sea* (E, t) *un espacio. Sea* $\mathcal{B}$ *una familia saturada de conjuntos acotados de* E, *que cubre el espacio* E *y tal que* (E', t_B) *es localmente completo. Sea* $\{E_n\}$ *una sucesión creciente de subespacios de* E, *tal que para cada* $B \in \mathcal{B}$ *existe un entero positivo* n_0 *tal que* $B \subset E_{n_0}$. *Entonces si* t' *es la topología límite inductivo sobre* E *de la sucesión* $\{E_n\}$, *entonces*, t' *es compatible con el par dual* $\langle E, E' \rangle$. *En particular, si* (E, t) *es un espacio de Mackey, es decir*, $t = m(E, E')$, *entonces*, (E, t) *es el límite inductivo estricto de la sucesión* $\{E_n\}$».

Demostración: Sea u una forma lineal continua sobre (E, t'). Si u_n es la restricción de u a E_n, entonces u_n es continua sobre E_n. Para cada n, por el teorema de Hahn-Banach, existe una extensión v_n de u_n, a todo el espacio (E, t), que es t-continua. En E^* sea F la envoltura lineal de $E' \cup \{u\}$. Como la familia $\mathcal{B}$ cubre E, para cada $x \in E$, existe un entero positivo n_0, tal que $x \in E_{n_0}$. Por lo tanto, la sucesión

$\{n(u - v_n)_{n=1}^{\infty}\}$ converge a cero en $F(s(F, E))$, y así, la sucesión $\{u - v_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a cero en F_C, siendo C la envoltura absolutamente convexa y cerrada de la sucesión $\{n(u - v_n)\}_{n=1}^{\infty}$ en $(F, s(F, E))$, que es $s(F, E)$-acotada. Probaremos que la sucesión $\{n(u - v_n)\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada sobre cada elemento de la familia $\mathfrak{B}$. Dado $B \in \mathfrak{B}$, existe un n_0, tal que $B \subset E_{n_0}$. Para $n \geqslant n_0$, la sucesión $\{n(u - v_n)_{n=1}^{\infty}\}$ toma el valor cero en E_{n_0} y para $n = 1, 2, \ldots, n_0 - 1$, $n(u - v_n)|E_{n_0}$ es continua sobre E_{n_0}, y, por lo tanto la sucesión estará acotada sobre B. Así C estará acotado sobre B. Sea $D = E' \cap C$. Entonces, E'_D será un subespacio de F_C. El conjunto D es $t_{\mathfrak{B}}$-acotado y $s(E', E)$-cerrado y *a fortiori* $t_{\mathfrak{B}}$-cerrado, y, puesto que $(E', t_{\mathfrak{B}})$ es localmente completo, se sigue que E'_D es un espacio de Banach. Por parte, la sucesión $\{v_n\}$ es de Cauchy en E'_D, y, por lo tanto, convergerá a un punto v en E'_D. Entonces, como v será el $s(E', E)$-límite de la sucesión $\{v_n\}$ y el punto u es el $s(F, E)$-límite de la sucesión $\{v_n\}$, se concluye que $v = u \in E'$. *Q.E.D.*

El siguiente teorema extiende un resultado de M. De Wilde y C. Houet, teorema 2 en [1], a espacios más amplios.

Teorema 3.— «*Sea F un subespacio de un espacio (E, t). Supongamos dada sobre F, con la topología inducida por t, $\hat{t}$, una familia saturada $\mathfrak{B}$ de conjuntos acotados de F, que cubre F y tal que $(F', t_{\mathfrak{B}})$ sea localmente completo. Supongamos que $\hat{t}$ es más fina que $s(F', F)_{m'}$. Sea U_n una sucesión creciente de absolutamente convexos de F, con la propiedad de que para cada $B \in \mathfrak{B}$ existe un entero positivo n_0, tal que U_{n_0} absorbe B. Entonces la clausura topológica en E del conjunto*

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$$

coincide con la clausura algebraica de

$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{U}_n$$

donde $\bar{U}_n$ es la clausura de U_n en (E, t).

Demostración: Es suficiente considerar F denso en E. Así $F' = E'$. Comprobaremos que la clausura topológica en E de U está contenida en la clausura algebraica de V. Sea x un elemento de E que no pertenece a la clausura algebraica de V_1, entonces, existe un número positivo mayor que la unidad, λ, tal que $x \notin \lambda V$. Por el teorema de Hahn-Banach, para cada n, existe una forma lineal continua, $u_n \in E'$, $u_n \in U^o{}_n$ tal que $u_n(x) = \lambda . n$. La sucesión $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un conjunto t_B-acotado de E', razonando como en el Teorema 1. Sea C la envoltura absolutamente convexa y $s(E', F)$-cerrada de $\{u_n: n = 1, 2, ...\}$. El conjunto C es t_B-cerrado y t_B-acotado y puesto que (E', t_B) es localmente completo, se sigue que E'_C es un espacio de Banach. La sucesión $\{(1/n)u_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a cero en E'_C, y, por lo tanto, será un $s(E', F)_{m'}$-equicontinuo. Entonces $\{(1/n)u_n\}_{n=1}^{\infty}$ será un conjunto equicontinuo en F, y puesto que F es denso en E, resulta que será equicontinuo en E. Por lo tanto, dicha sucesión tendrá un punto $u \in E'$, que será $s(E', E)$-adherente. Entonces, $u(x) = \lambda > 1$. Por otra parte, puesto que la sucesión $\{U^o{}_n\}$ es decreciente, para cada m, entero positivo, se verifica que

$$(1/j)\, u_j \in U^o{}_m \text{ para todo } j \geqslant m,$$

así se obtiene que

$$u \in \bigcup_{n=1}^{\infty} U^o{}_n$$

Entonces, $u \in U^o$, y, por lo tanto, $x \notin U^{oo} = \bar{U}$, puesto que U es absolutamente convexo. *Q.E.D.*

Como consecuencia del teorema anterior, se obtiene Lema 1 de [3] y Corolario 2*a* de [1], en una clase más amplia de espacios que la obtenida en los trabajos citados.

Corolario 1.3 «*Con las condiciones del Teorema* 3, *si* $\mathcal{F}$ *es un filtro de Cauchy en* U, *y* $\mathcal{V}$ *es un sistema fundamental de entornos del origen en* F, *entonces el filtro* $\mathcal{G}$ *constituido por todos los conjuntos de la forma* $M + S$, $M \in \mathcal{F}$ *y* $S \in \mathcal{V}$, *tiene la propiedad de que para cada número positivo* ε, *existe un entero positivo* n_0, *tal que el filtro* $\mathcal{G}$ *induce un filtro de Cauchy en* $(1 + \varepsilon)\, U_{n_0}$». La demostración se sigue obviamente del Teorema 3, tomando por E la completación de F. Q.E.D.

El siguiente teorema da una condición para la hereditabilidad de la completitud en el sentido de Mackey para sucesiones crecientes de absolutamente convexos, para obtener como consecuencia el correspondiente resultado en límites inductivos estrictos.

Teorema 4. «*Sea* (E, t) *un espacio. Sea* $\{U_n\}$ *una sucesión creciente de absolutamente convexos y cerrados de* E, *cuya unión es absorbente en* E. *Supongamos que* $(E', s(E', E))$ *es localmente completo. Si para cada* n, U_n *es un conjunto localmente completo en* (E, t), *entonces* (E, t) *es un espacio localmente completo*».

Demostración: Puesto que $(E', s(E', E))$ es localmente completo, por el teorema de Banach-Mackey ([2], p. 252), todo $s(E, E')$-acotado es $b(E, E')$-acotado. Por otra parte, para cada conjunto acotado, B, de E, existe un entero positivo n_0, tal que U_{n_0} absorbe B. En efecto: si por el contrario, para todo n, $B \not\subset nU_n$, podemos escoger una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en B, tal que $x_n \notin nU_n$. Como cada U_n es absolutamente convexo y cerrado en E, podemos aplicar el teorema de Hahn-Banach, y encontraremos para cada n, una forma lineal continua, u_n, tal que $u_n \in U^0{}_n$ y $u_n(x_n) = n$. La sucesión $\{u_n\colon n = 1, 2, ...\}$ es un conjunto acotado en E', $(s(E', E))$ que no está acotado sobre B, que es $b(E, E')$-acotado, lo cual es absurdo. Veamos finalmente que (E, t) es localmente completo. Sea B un conjunto absolutamente convexo cerrado y acotado de (E, t). Entonces, la sucesión $\{B \cap U_n\}_{n=1}^{\infty}$ en E_B verifica las condiciones del Teorema 1, y, por lo tanto, el espacio normado E_B es un espacio de Banach, con lo cual queda probado el teorema. Q.E.D.

Corolario 1.4. «*Sea* (E, t) *un espacio que es el límite inductivo estricto de una sucesión creciente de subespacios cerrados de* (E, t), $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, *cuya unión es el espacio* E. *Si para cada* n, E_n *es localmente completo, entonces*, (E, t) *es localmente completo*».

Corolario 2.4. «*Si un espacio tonelado* (E, t) *es la unión de una sucesión creciente de subespacios cerrados localmente completos, entonces* (E, t) *es localmente completo*».

REFERENCIAS

[1] DE WILDE, M. y HOUET, C.: *On increasing sequences of absolutely convex sets in locally convex spaces.* Math. Ann., 192, 257-261 (1971)

[2] KÖTHE, G.: *Topological Vector Spaces I* Berlin-Heidelberg New-York. Springer, 1969.

[3] VALDIVIA, M.: *Absolutely convex sets in barrelled spaces.* Ann. Inst. Fourier, 21, 3-13 (1971)

[4] VALDIVIA, M.: *On countable strict inductive limits.* Manuscripta Math., 11, 339-343 (1974)

Dr. A. Marquina
Facultad de Ciencias
Paseo al Mar, 13
Valencia-10 (España)