LOKALTOPOLOGISCHE VEKTORRÄUME

por

NORBERT ADASCH und BRUNO ERNST

Von Iyahen [10] bzw. Ernst [8] wurden in der Kategorie der nicht notwendig lokalkonvexen Räume die ultrabornologischen Räume bzw. die Ultra-(DF)-Räume eingeführt. Sie übernehmen hier die Rolle, die die bornologischen bzw. (DF)-Räume in der Kategorie der lokalkonvexen Räume spielen.

Eine gemeinsame Eigenschaft der ultrabornologischen bzw. Ultra-(DF)-Räume $E[\mathfrak{J}]$ nämlich:

«$\mathfrak{J}$ ist die feinste derjenigen linearen Topologien $\mathfrak{J}'$ auf E, die auf jeder beschränkten Teilmenge $\mathfrak{J}$ induziert» wird zur Definition der *lokaltopologischen Räume* benutzt, deren Theorie hier im folgenden entwickelt werden soll.

Diese Klasse von topologischen Vektorräumen enthält echt die Klassen der ultrabornologischen bzw. Ultra-(DF)-Räumen und hat außerdem den Vorteil, daß sie stabil ist bezüglich der topologischen Produktbildung.

1. LOKALTOPOLOGISCHE VEKTORRÄUME

DEFINITION 1: *Eine lineare Abbildung A von dem topologischen Vektorraum $E[\mathfrak{J}_1]$ in den topologischen Vektorraum $F[\mathfrak{J}_2]$ heißt lokalstetig, wenn A auf jeder beschränkten kreisförmigen Teilmenge B von $E[\mathfrak{J}_1]$ bezüglich der durch $\mathfrak{J}_1$ induzierten Topologie im Nullpunkt, stetig ist.*

A ist demnach genau dann lokalstetig, wenn zu jeder beschränkten kreisförmigen Teilmenge B von $E[\mathfrak{J}_1]$ und zu jeder Nullumgebung V von $F[\mathfrak{J}_2]$ eine Nullumgebung U von $E[\mathfrak{J}_1]$ existiert mit $A(U \cap B) \subset V$.

Definition 2: *Eine Folge* $\mathfrak{U} = (U_n)$ *von kreisförmigen absorbierenden Teilmengen von* $E[\mathfrak{J}]$ *heiße ein Faden (von* $E[\mathfrak{J}]$*), wenn* $U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n$, $n \varepsilon \mathbf{N} \cdot U_1$ *heiße Anfang des Fadens* (U_n),

$$N(\mathfrak{U}) = \bigcap_{U_n \varepsilon \mathfrak{U}} U_n$$

der Nullraum von $\mathfrak{U}$.

Definition 3: *Ein Faden* (U_n) *von* $E[\mathfrak{J}]$ *heiße topologischer Faden (von* $E[\mathfrak{J}]$*), wenn alle* U_n *Nullumgebungen von* $E[\mathfrak{J}]$ *sind.*

Definition 4: *Ein Faden* (U_n) *von* $E[\mathfrak{J}]$ *heiße lokaltopologischer Faden, wenn* $U_n \cap B$ *Nullumgebungen von* B *sind, für jede kreisförmige beschränkte Teilmenge* B *von* $E[\mathfrak{J}]$ *(in der induzierten Topologie).*

Man überlegt sich leicht, daß eine lineare Abbildung A von $E[\mathfrak{J}_1]$ in $F[\mathfrak{J}_2]$ genau dann lokalstetig ist, wenn das Urbild $A^{-1}(U_n) = (A^{-1}(U_n))$ jedes topologischen Fadens (U_n) von $F[\mathfrak{J}_2]$ ein lokaltopologischer Faden von $E[\mathfrak{J}_1]$ ist.

Wir benötigen später

(1) *Ist* K *eine kreisförmige Menge von* $E[\mathfrak{J}]$*, so daß* $K \cap B$ *eine Nullumgebung der kreisförmigen beschränkten Menge* B *ist, dann absorbiert* K *die Menge* B.

Beweis: Wird B nicht von K absorbiert, so gilt $B \not\subset nK$ für $n \varepsilon \mathbf{N}$. Seien $x_n \varepsilon B$, $x_n \notin nK$, also $\frac{1}{n} x_n \varepsilon B$, aber $\frac{1}{n} x_n \notin K$, d. h. $\frac{1}{n} x_n \notin B \cap K$, dies widerspricht der Tatsache, daß $K \cap B$ eine Nullumgebung von B ist und $\frac{1}{n} x_n$ in B gegen 0 konvergiert.

Definition 5: *Ein Faden* (U_n) *von* $E[\mathfrak{J}]$ *heiße gefräßig, wenn die* U_n *alle beschränkten Teilmengen absorbieren.*

Aus (1) erhält man also

(2) *Jeder lokaltopologische Faden ist ein gefräßiger Faden.*

Definition 6: *Ein topologischer Vektorraum* $E[\mathfrak{J}_1]$ *heiße lokaltopologisch, wenn jede lokalstetige lineare Abbildung* A *von* $E[\mathfrak{J}_1]$ *in einen beliebigen topologischen Vektorraum* $F[\mathfrak{J}_2]$ *stetig ist.*

Dann gilt

(3) *$E[\mathfrak{J}]$ ist genau dann lokaltopologisch, wenn jeder lokaltopologische Faden (U_n) von $E[\mathfrak{J}]$ ein topologischer Faden von $E[\mathfrak{J}]$ ist.*

Beweis: «$\Leftarrow$» ist klar; «$\Rightarrow$»: Sei $\mathfrak{U} = (U_n)$ ein lokaltopologischer Faden, $F[\mathfrak{J}]$ sei der metrisierbare topologische Vektorraum $E|_{N(\mathfrak{U})}$, versehen mit den Restklassen $\widehat{U}_n$ als Nullumgebungsbasis, K die Quotientenabbildung. Wegen $K^{-1}(\widehat{U}_n) \supset U_n$ ist K lokalstetig, nach Voraussetzung also stetig und da $K^{-1}(\widehat{U}_{n+1}) = U_{n+1} + N(\mathfrak{U}) \subset \ldots$ $\ldots U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n$, $n \in \mathbf{N}$, ist $\mathfrak{U}$ ein topologischer Faden von $E[\mathfrak{J}]$.

Aus dem Beweis von (3) folgt sofort

(4) *$E[\mathfrak{J}]$ ist genau dann lokaltopologisch, wenn jede lokalstetige lineare Abbildung A von $E[\mathfrak{J}]$ in einen vollstandigen metrisierbaren topologischen Vektorraum $F[\mathfrak{J}']$ stetig ist.*

Man überlegt sich leicht, daß die Elemente der lokaltopologischen Fäden von $E[\mathfrak{J}]$ die Nullumgebungsbasis einer linearen Topologie $\mathfrak{J}^{lt}$ auf E bilden.

Wir wollen nun $E[\mathfrak{J}^{lt}]$ näher untersuchen:

(5) a) *$E[\mathfrak{J}]$ ist lokaltopologisch genau dann, wenn $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}^{lt}$.*

b) *$E[\mathfrak{J}^{lt}]$ ist lokaltopologisch und hat dieselben beschränkten Teilmengen wie $E[\mathfrak{J}]$.*

c) *$\mathfrak{J}^{lt}$ ist die feinste derjenigen linearen Topologien $\mathfrak{J}'$ auf E, so daß die identische Abbildung I von $E[\mathfrak{J}]$ in $E[\mathfrak{J}']$ lokalstetig ist.*

Beweis: a) folgt aus (3). b) Daß $E[\mathfrak{J}]$ und $E[\mathfrak{J}^{lt}]$ dieselben beschränkten Mengen haben folgt aus (1). Daraus folgt sofort, daß die lokaltopologischen Fäden von $E[\mathfrak{J}]$ und $E[\mathfrak{J}^{lt}]$ dieselben sind, also $E[\mathfrak{J}^{lt}]$ lokaltopologisch ist. c) ist trivial.

Definition 7: *$E[\mathfrak{J}^{lt}]$ heiße der zu $E[\mathfrak{J}]$ assoziierte lokaltopologische Raum, $\mathfrak{J}^{lt}$ die zu $\mathfrak{J}$ assoziierte lokaltopologische Topologie.*

(5) c) läßt sich wie folgt aussprechen:

(6) *Die assoziierte lokaltopologische Topologie $\mathfrak{J}^{lt}$ ist die feinste lineare Topologie, deren Nullumgebungen auf jeder beschränkten Teilmenge B mit den Nullumgebungen von $\mathfrak{J}$ zusammenfallen.*

(7) *Sei B eine beschränkte kreisförmige Menge von $E[\mathfrak{J}]$ mit $B + B \subset \mu B$, $\mu \geq 2$ (dies ist zum Beispiel für absolut-p-konvexe Mengen der Fall $0 < p \leq 1$), dann induziert $\mathfrak{J}^{lt}$ auf B die Topologie $\mathfrak{J}$.*

(7) erhält man sofort aus

(8) *Sei B wie in* (7). *Sei U eine kreisförmige Menge, so daß $\frac{1}{\mu} U$ auf B eine $\mathfrak{T}$-Nullumgebung induziert, dann erhält man durch $(x + U) \cap B$ eine $\mathfrak{T}$-Umgebung des Punktes $x \in B$.*

Die Anfänge U der lokaltopologischen Fäden haben diese Eigenschaft.

Beweis: Wir haben zu zeigen, daß es eine $\mathfrak{T}$-Nullumgebung V von E gibt, so daß $(x + V) \cap B \subset (x + U) \cap B$. Nach Voraussetzung gibt es eine kreisförmige Nullumgebung V von $E\,[\mathfrak{T}]$ mit $V \cap B \subset \frac{1}{\mu} U$. Wir behaupten

$$(x + V) \cap B \subset (x + U) \cap B.$$

Sei $z = x + y$, $y \in V$, $z \in B$. Dann ist $y = z - x \in B - B = B + B \subset \mu B$, also $y \in V \cap \mu B = \mu \left(\frac{1}{\mu} V \cap B\right) \subset \mu (V \cap B) \subset \mu \left(\frac{1}{\mu}\right) U = U$, also $z \in (x + U) \cap B$.

Ein topologischer Vektorraum $E\,[\mathfrak{T}]$ heißt *ultrabornologisch* [10], wenn jede beschränkte lineare Abbildung von $E\,[\mathfrak{T}]$ in einen beliebigen topologischen Vektorraum stetig ist. $E\,[\mathfrak{T}]$ ist genau dann ultrabornologisch, wenn jeder gefräßige Faden ein topologiscger Faden ist. Aus (2) erhält man

(9) *Jeder ultrabornologische Raum $E\,[\mathfrak{T}]$ ist lokaltopologisch.*

Nach Ernst [8] heißt ein topologischer Vektorraum $E\,[\mathfrak{T}]$ (UDF)-Raum, wenn $E\,[\mathfrak{T}]$ eine Fundamentalfolge beschränkter Teilmengen besitzt und der Durchschnitt $\mathfrak{W} = (V_j)$ von abzählbar vielen abgeschlossenen topologischen Fäden (1) $\mathfrak{U}_n = (U_j^{(n)})$, also

$$V_j = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_j^{(n)}$$

ein topologischer Faden ist, falls er gefräßig ist. Nach [8] gilt

(10) *Jeder* (UDF)-*Raum ist lokaltopologisch.*

(1) Ein Faden $\mathfrak{U} = (U_n)$ von $E\,[\mathfrak{T}]$ heißt abgeschlossen, falls alle U_n abgeschlossen sind.

Da es nicht bornologische (DF)-Räume gibt (Köthe [12], § 29.4) folgert man mit den Ergebnissen von [8], daß es lokaltopologische Räume gibt, die nicht ultrabornologisch sind.

2. Permanenzeigenschaften der lokaltopologischen Räume

Man sieht sofort

(1) *Das Produkt zweier lokalstetiger Abbildungen ist lokalstetig.* Daraus folgt

(2) *Die topologische lineare Hülle (im Sinne von [10], [11], [15])*

$$E[\mathfrak{T}] = \sum_{\alpha \in I} A_\alpha (E_\alpha [\mathfrak{T}_\alpha])$$

von lokaltopologischen Räumen $E_\alpha[\mathfrak{T}_\alpha]$ bezüglich der linearen Abbildungen A_α ist ein lokaltopologischer Raum.

Insbesondere sind beliebige direkte Summen und Quotientenräume von lokaltopologischen Räumen wieder lokaltopologisch.

Bevor wir uns den Produkten von lokaltopologischen Räumen zuwenden, benötigen wir noch einen Hilfssatz.

(3) *Sei $\mathfrak{U} = (U_n)$ ein lokaltopologischer Faden von $E[\mathfrak{T}]$. Dann ist $N(\mathfrak{U}) \cap B$ für jede kreisförmige beschränkte Menge B abgeschlossen in B.*

Beweis: Sei $x_\alpha \in N(\mathfrak{U}) \cap B$ konvergent gegen $x_0 \in B$. Es ist $x_0 - x_\alpha \in B + B$ und konvergiert gegen 0, d.h. $x_0 - x_\alpha \in U_{n-1}$ für $\alpha \geq \alpha_0(n)$. Da $x_\alpha \in U_{n-1}$ folgt $x_0 = (x_0 - x_\alpha) + x_\alpha \in U_{n-1} + U_{n-1} \subset U_n$ d.h. $x_0 \in U_n$ für jedes n also $x_0 \in N(\mathfrak{U})$.

Wir beweisen zunächst

(4) *Das topologische Produkt*

$$E[\mathfrak{T}] = \prod_{i=1}^{\infty} E_i[\mathfrak{T}_i]$$

von lokaltopologischen Räumen $E_i[\mathfrak{T}_i]$ ist lokaltopologisch.

Beweis: (vgl. [1]) Sei $\mathfrak{U} = (U_n)$ ein lokaltopologischer Faden von $E[\mathfrak{J}]$. Es genügt zu zeigen, daß der Anfang U_1 eine Nullumgebung ist. Wir behaupten

$$U_2 \supset \prod_{n_0}^{\infty} E_i[\mathfrak{J}_i]$$

für ein n_0. Angenommen, das wäre falsch, dann gibt es

$$x_m \in \prod_{m}^{\infty} E_i[\mathfrak{J}_i]$$

mit $x_m \notin U_2$. Da aber die Folge (x_m) gegen 0 konvergiert und beschränkt ist, konvergiert sie auch bezüglich $\mathfrak{J}^{\mathfrak{U}}$ gegen 0, und es müßte x_m ab einer Stelle in U_2 liegen. Dies ist ein Widerspruch.

Es gilt also

$$U_1 \supset U_2 \cap \prod_{i=1}^{n_0-1} E_i + \prod_{i=n_0}^{\infty} E_i.$$

Da endliche Produkte von lokaltopologischen Räumen lokaltopologisch sind (vgl. (2)), ist

$$U_2 \cap \prod_{i=1}^{n_0-1} E_i$$

eine Nullumgebung von

$$\prod_{i=1}^{n_0-1} E_i,$$

also ist auch U_1 eine Nullumgebung.

Jetzt können wir beweisen:

(5) *Beliebige Produkte*

$$E[\mathfrak{J}] = \prod_{\alpha \in I} E_\alpha[\mathfrak{J}_\alpha]$$

lokaltopologischer Räume $E_\alpha[\mathfrak{J}_\alpha]$ sind lokaltopologisch.

Beweis: Sei $\mathfrak{U} = (U_n)$ ein lokaltopologischer Faden von $E[\mathfrak{J}]$. Wie in [1] zeigt man, daß es zu jedem $n \in \mathbf{N}$ eine endliche Teilmenge $e_n \subset I$ gibt, so daß

$$U_n \supset \bigoplus_{\alpha \in I \setminus e_n} E_\alpha$$

Sei

$$I_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} e_n.$$

Dann gilt

$$N(\mathfrak{U}) \supset \bigoplus_{\alpha \varepsilon I \setminus I_0} E_\alpha.$$

Wir behaupten

$$N(\mathfrak{U}) \supset \prod_{\alpha \varepsilon I \setminus I_0} E_\alpha.$$

Denn sei

$$x \,\varepsilon \prod_{\alpha \varepsilon I \setminus I_0} E_\alpha, \quad x = (x_\alpha)_{\alpha \varepsilon I \setminus I_0},$$

und sei $X = \{(\lambda_\alpha x_\alpha) \mid |\lambda_\alpha| \leq 1, \ \alpha \,\varepsilon\, I \setminus I_0\}$. Als Produkt kompakter Mengen ist X eine abgeschlossene beschränkte Teilmeneg von

$$\prod_{\alpha \varepsilon I \setminus I_0} E_\alpha.$$

Aus (3) erhalten wir

$$x \,\varepsilon\, X = \overline{X \cap \bigoplus_{\alpha \varepsilon I \setminus I_0} E_\alpha} \subset \overline{X \cap N(\mathfrak{U})} = X \cap N(\mathfrak{U}), \quad \text{also} \quad x \,\varepsilon\, N(\mathfrak{U}).$$

Betrachten wir

$$U_1 \supset U_2 \cap \prod_{\alpha \varepsilon I_0} E_\alpha + \prod_{\alpha \varepsilon I \setminus I_0} E_\alpha.$$

Dann ist wegen (4)

$$U_2 \cap \prod_{\alpha \varepsilon I_0} E_\alpha$$

eine Nullumgebung von

$$\prod_{\alpha \varepsilon I_0} E_\alpha,$$

also U_1 eine Nullumgebung von $E[\mathfrak{J}]$.

Schließlich beweisen wir noch

(6) *Der Raum der stetigen linearen Abbildungen* $L_b(E, F)$ *versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen be-*

schränkten Teilmengen B von E, ist vollständig, falls $E[\mathfrak{T}]$ lokaltopologisch und $F[\mathfrak{T}']$ vollständig ist.

Beweis: Sei A aus der vollständigen Hülle von $L_b(E, F)$. Es genügt zu zeigen, daß A dann lokalstetig ist. Seien V und W Nullumgebungen in $F[\mathfrak{T}']$, so daß $V + V \subset W$, und sei B eine kreisförmige beschränkte Menge in $E[\mathfrak{T}]$. Nach [2] ist dann $A = A_1 + A_2$, wobei $A_1 \varepsilon L(E, F)$ und A_2 eine lineare Abbildung von E in F ist, so daß $A_2(B) \subset V$. Wegen der Stetigkeit von A_1 gibt es in $E[\mathfrak{T}]$ eine Nullumgebung U mit $A_1(U) \subset V$. Wir haben also

$$A(B \cap U) = A_1(B \cap U) + A_2(B \cap U) \subset V + V \subset W,$$

d.h. A ist lokalstetig.

Tellräume endlicher Codimension von ultrabornologischen bzw. (UDF)-Räumen sind wieder von demselben Typ (vgl. [5]). Ob die lokaltopologischen Räume auch diese Eigenschaft haben, ist nicht bekannt. Es ist ebenfalls unbekannt, ob die vollständige Hülle eines lokaltopologischen Raumes wieder lokaltopologisch ist.

3. Verallgemeinerte induktive Limiten

In diesem Abschnitt sei $\sigma = \{K_n\}$ eine Folge von kreisförmigen Teilmengen des topologischen Vektorraumes $E[\mathfrak{T}]$ mit der durch $\mathfrak{T}$ induzierten Topologie. Es gelte $K_n = \{0\}$ für $n \leq 0$ und $K_n + K_n \subset K_{n+1}$ für alle $n \varepsilon \mathbf{N}$. σ heißt *absorbierende Folge,* falls

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$$

in E absorbierend ist, d.h. falls

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = E$$

ist. σ heißt *gefräßig,* falls es zu jeder beschränkten Menge B in E ein $n_0 \varepsilon \mathbf{N}$ gibt, so daß $B \subset K_{n_0}$ (vgl. Ernst, Wagner [9] und De Wilde, Houet [16]).

Im lokalkonvexen Fall wurden Räume mit einer absorbierenden Folge absolutkonvexer Mengen schon von De Wilde und C. Houet [16] betrachtet.

Eine gefräßige Folge beschränkter Mengen K_n bezeichnen wir auch als *Fundamentalfolge beschränkter Mengen.*

Mit $\mathfrak{J}_\sigma$ bezeichnen wir die feinste lineare Topologie auf E, so daß $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{J}_\sigma$ auf jedem K_n dieselben Nullumgebungen induzieren, d.h. $\mathfrak{J}_\sigma$ ist die feinste lineare Topologie, so daß die Einbettungen I_n von K_n in E_n im Nullpukt stetig sind.

Wir erhalten

(1) *Sei σ eine absorbierende Folge. Ein Faden (U_n) von $E[\mathfrak{J}]$ ist genau dann $\mathfrak{J}_\sigma$-topologisch, wenn $U_n \cap K_m$ für alle $n, m \in \mathbf{N}$ eine $\mathfrak{J}$-Nullumgebung von K_m ist.*

Wie die Nullumgebungen von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{J}_\sigma$ zusammenhängen, zeigt der folgende Satz (vgl. Roelcke [14] und Wiweger [17]).

(2) *Sei σ eine absorbierende Folge in $E[\mathfrak{J}]$. Dann bilden die Fäden*

$$\text{a)}\quad V_j = \sum_{n=1}^{\infty} (K_{n-j+1} \cap U_j^{(n)}) \; (2)$$

$$\text{b)}\quad W_j = \bigcap_{n=1}^{\infty} (K_{n-j} + U_j'^{(n)})$$

$$\text{c)}\quad W_j' = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\overline{\overline{K_{n-j}} + U_j'^{(n)}})$$

eine Nullumgebungsbasis für $\mathfrak{J}_\sigma$, wenn $(U_j^{(n)})$ bzw. $(U_j'^{(n)})$ alle Folgen von $\mathfrak{J}$-topologischen Fäden durchläuft.

Beweis: a) α) Jedes V_j ist $\mathfrak{J}_\sigma$-Nullumgebung:

$$V_j \cap K_m = K_m \cap \sum_{n=1}^{\infty} (K_{n-j+1} \cap U_j^{(n)}) \supset K_m \cap U_j^{(m+j-1)}.$$

Nach (1) ist V_j dann $\mathfrak{J}_\sigma$-Nullumgebung.

β) Sei (W_j) ein $\mathfrak{J}_\sigma$-topologischer Faden. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbf{N}$ einen $\mathfrak{J}$-topologischen Faden $(U_j^{(n)})$, so daß für alle j gilt $U_j^{(n)} \cap K_n \subset W_{n+j}$. Für die Mengen

$$V_j = \sum_{n=1}^{\infty} (K_{n-j+1} \cap U_j^{(n)})$$

(2) Hier und im folgenden ist $\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \bigcup_{N=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{N} M_n$.

gilt dann

$$V_j \subset \sum_{n=1}^{\infty} (K_n \cap U_j^{(n)}) \subset \sum_{n=1}^{\infty} W_{n+j} \subset W_j.$$

b) Daß jedes W_j eine $\mathfrak{T}_\sigma$-Nullumgebung ist, ist klar, denn

$$W_j \cap K_m \supset K_m \cap \bigcap_{n=1}^{m+j} (K_{n-j} + U_j'^{(n)}.$$

Wir müssen noch zeigen, daß jedes V_j ein W_j enthält bei geeigneter Wahl der $U_j'^{(n)}$. Sei

$$V_j = \sum_{n=1}^{\infty} (K_{n-j+1} \cap U_j^{(n)}).$$

Wir können annehmen, daß für festes j die Folgen $(U_j^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ absteigend sind. Setze $U_j'^{(n)} = U_{j+1}^{(n+1)}$. Dann ist

$$V_j \supset W_j = \bigcap_{n=1}^{\infty} (K_{n-j} + U_{j+1}^{(n+1)}):$$

Sei $x \in W_j$, d.h. $x \in K_{n-j} + U_{j+1}^{(n+1)}$ für alle $n \in \mathbf{N}$. Dann läßt sich x schreiben als $x = y_n + u_n$ mit $y_n \in K_{n-j}$ und $u_n \in U_{j+1}^{(n+1)}$. Sei $x_1 = y_1$ und $x_n = y_n - y_{n-1}$. Dann ist

$$x = u_n + \sum_{i=1}^{n} x_i$$

und $u_{n-1} = x_n + u_n$. Wegen $u_{n-1} - u_n \in U_{j+1}^{(n)} + U_{j+1}^{(n+1)} \subset U_{j+1}^{(n)} + U_{j+1}^{(n)} \subset U_j^{(n)}$ ist $x_n \in U_j^{(n)}$. Andererseits ist

$x_n = y_n - y_{n-1} \in K_{n-j} + K_{n-j-1} \subset K_{n-j} + K_{n-j} \subset K_{n-j+1}$, also gilt $x_n \in K_{n-j+1} \cap U_j^{(n)}$ für alle $n \in \mathbf{N}$.

Ist n_0 so gewählt, daß $x \in K_{n_0-j}$, so ist $u_{n_0} = x - y_{n_0} \in K_{n_0-j} + K_{n_0-j} \subset K_{(n_0+1)-j+1}$. Außerdem ist

$$u_{n_0} \in U_{j+1}^{(n_0+1)} \subset U_j^{(n_0+1)},$$

d.h.

$$u_{n_0} \in K_{(n_0+1)-j+1} \cap U_j^{(n_0+1)}.$$

Aus allem zusammen ergibt sich

$$x = \sum_{i=1}^{n_0} x_i + u_{n_0} \varepsilon \sum_{i=1}^{n_0} (K_{i-j+1} \cap U_j^{(i)}) + K_{(n_0+1)-j+1} \cap U_j^{(n_0+1)} \subset V_j.$$

c) Daß jedes W'_j eine $\mathfrak{J}_\sigma$-Nullumgebung ist, ist klar. Andererseits ist stets $\overline{\overline{K_{n-j}} + U_j'^{(n)}} \subset K_{n-j} + U_{j-2}'^{(n)}$.

Als Folgerung ergibt sich sofort

(3) *Besitzt* $E[\mathfrak{J}]$ *eine absorbierende Folge* σ, *so besitzt* $\mathfrak{J}_\sigma$ *stets eine Nullumgebungsbasis aus* $\mathfrak{J}$*-abgeschlossenen Mengen. Insbesondere ist* $E[\mathfrak{J}_\sigma]$ *vollständig, wenn* $E[\mathfrak{J}]$ *vollständig ist.*

(4) *Sei* σ *eine absorbierende Folge in* $E[\mathfrak{J}]$, *sei* $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_\sigma$, *sei* $E_n = LH(K_n)$ *und sei* $\mathfrak{J}_n$ *die von* $\mathfrak{J}$ *auf* E_n *induzierte Topologie. Dann ist* $E[\mathfrak{J}]$ *der strikte induktive Limes der* $E_n[\mathfrak{J}_n]$.

Beweis: Sei $\mathfrak{J}'$ die Limestopologie auf E. $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{J}'$ ist klar. $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}'$ folgt daraus, daß die Abbildung $I: E[\mathfrak{J}] \to E[\mathfrak{J}']$ *in* jedem K_n im Nullpunkt stetig ist.

Der folgende Satz ist sehr bemerkenswert und einfach zu beweisen (vgl. De Wilde und Houet [16]).

(5) *Sei* σ *eine nicht notwendig absorbierende Folge in* $E[\mathfrak{J}]$.
Sei H *der von den* K_n *aufgespannte lineare Teilraum von* E, d.h.

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$$

sei $\mathfrak{J}'$ *die von* $\mathfrak{J}$ *auf* H *induzierte Topologie und sei* $\mathfrak{J}' = \mathfrak{J}'_\sigma$. *Dann ist*

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n}^{\mathfrak{J}} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{K_n}^{\mathfrak{J}}.$$

Beweis: Wir können H dicht in E annehmen. Sei

$$x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{K_n}^{\mathfrak{J}}.$$

Dann gibt es für jedes $n \varepsilon \mathbf{N}$ einen $\mathfrak{J}$-topologischen Faden $(U_j^{(n)})_{j=1}^{\infty}$, so daß $x \notin \overline{\overline{K_n} + U_1^{(n)}}$. Sei

$$V_j = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\overline{K_{n-j}} + U_j^{(n)}}^{\mathfrak{J}}.$$

$V_j \cap H$ ist dann $\mathfrak{T}_\sigma'$-topologisch, denn

$$V_j \cap H \cap K_m = (K_m \cap \bigcap_{n=1}^{m+j} \overline{\overline{K_{n-j}} + U_j^{(n)}}) \cap \bigcap_{n=m+j+1}^{\infty} (K_m \cap (\overline{\overline{K_{n-j}} + U_j^{(n)}})).$$

Da

$$\bigcap_{n=m+j+1}^{\infty} (K_m \cap (\overline{\overline{K_{n-j}} + U_j^{(n)}})) \supset K_m,$$

ist

$$K_m \cap \bigcap_{n=1}^{m+j} (\overline{\overline{K_{n-j}} + U_j^{(n)}}) \subset V_j \cap K_m,$$

d.h. $V_j \cap K_m$ enthält eine $\mathfrak{T}$-Nullumgebung von K_m.

$V_j \cap H$ ist dann auch ein $\mathfrak{T}'$-topologischer Faden, d.h. $\overline{V_j \cap H}^{\mathfrak{T}}$ ist $\mathfrak{T}$-topologisch in E. Wegen $V_j \supset \overline{V_j \cap H}^{\mathfrak{T}}$ ist (V_j) dann ein topologischer Faden in $E[\mathfrak{T}]$. Andererseits ist $x \notin K_n + V_1$ für alle n, d.h.

$$x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n + V_1.$$

Aus (5) folgt eine Verallgemeinerung des Köthe-Raikowschen Vollständigkeitskriteriums ([12], [13]).

(6) a) *Ist σ eine absorbierende Folge in $E[\mathfrak{T}]$ und ist $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_\sigma$,* so *gilt für die vollständige Hülle*

$$\widetilde{E} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{K}_n$$

und die Folge $\tilde{\sigma} = \{\widetilde{K}_n\}$ ist in $\widetilde{E}$ eine absorbierende Folge.

b) *Unter den Voraussetzungen von a) gilt $\widetilde{\mathfrak{T}} = \widetilde{\mathfrak{T}}_{\tilde{\sigma}}$.*

Beweis: a) Die Behauptung folgt unmittelbar aus (5).

b) 1) $\widetilde{\mathfrak{T}} \subset \widetilde{\mathfrak{T}}_{\tilde{\sigma}}$ ist klar.

2) Sei umgekehrt (U_n) ein $\widetilde{\mathfrak{T}}_{\tilde{\sigma}}$-topologischer Faden in $\widetilde{E}[\widetilde{\mathfrak{T}}]$. Wegen (2) können wir jedes U_n als $\widetilde{\mathfrak{T}}$-abgeschlossen annehmen. Man sieht sofort, daß $(E \cap U_n)$ ein $\mathfrak{T}_\sigma$-topologischer Faden in E ist.

Bezeichnet $\widetilde{E \cap U_n}$ die abgeschlossene Hülle von $E \cap U_n$ in $E[\mathfrak{F}]$, so folgt wegen der Abgeschlossenheit der U_n sofort $\widetilde{E \cap U_n} \subset U_n$.

Äquivalent zu (5) ist der folgende Satz. (Wir beweisen hier jedoch nur die eine Richtung).

(7) *Es gelten dieselben Voraussetzungen wie in* (5). *Sei G ein Cauchyfilter auf H und sei* $\mathfrak{G} + \mathfrak{U}$ *der Filter, dessen Basis von den Mengen* $G + U$ *mit* $G \varepsilon \mathfrak{G}$ *und U Nullumgebung von E gebildet wird. Dann gibt es ein* n_0, *so daß* $\mathfrak{G} + \mathfrak{U}$ *auf* K_{n_0} *einen Cauchyfilter induziert.*

Beweis: Sei $E[\mathfrak{F}] = \widetilde{H}[\widetilde{\mathfrak{F}}']$. Dann gibt es ein $x \varepsilon E$, so daß $\mathfrak{G}$ gegen x konvergiert. Nach (5) liegt x in einem geeigneten $\overline{K_{n_0}}$. Wir wollen zeigen, daß $\mathfrak{G} + \mathfrak{U}$ auf K_{n_0} einen Cauchyfilter induziert, d.h. daß stets $(M + U) \cap K_{n_0} \neq \phi$ ist: Sei $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ ein topologischer Faden in $E[\mathfrak{F}]$ und $M \varepsilon \mathfrak{G}$. Dann ist $x \varepsilon M + U_2$ und $(x + U_2) \cap K_{n_0} \neq \phi$, d.h. $(M + U_1) \cap K_{n_0} \neq \phi$. Da M und K_{n_0} Teilmengen von H sind, können wir U_1 durch $U_1 \cap H$ ersetzen. Daß $\mathfrak{G} + \mathfrak{U}$ einen gegen x konvergenten Cauchyfilter induziert, ist klar.

Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von Dieudonné und Schwartz.

(8) *Ist* $\sigma = \{K_n\}$ *eine absorbierende Folge abgeschlossener* K_n *in* $E[\mathfrak{F}]$, *so ist* σ *schon eine gefräßige Folge in* $E[\mathfrak{F}_\sigma]$.

Beweis: Sei B eine beschränkte Teilmenge in $E[\mathfrak{F}_\sigma]$. Angenommen B wird von keinem K_n absorbiert. Dann gibt es Punkte $x_n \varepsilon \left(\frac{1}{n} B\right) \setminus K_n$ und die Folge (x_n) konvergiert in $E[\mathfrak{F}_\sigma]$ gegen 0. Da alle K_n abgeschlossen sind, gibt es für jedes $n \varepsilon \mathbf{N}$ einen $\mathfrak{F}$-topologschen Faden $(U_j^{(n)})_{j=1}^{\infty}$. so daß $x_n \notin K_{n-j} + U_j^{(n)}$. Nach (2) bilden aber die Mengen

$$W_j = \bigcap_{n=1}^{\infty} (K_{n-j} + U_j^{(n)})$$

einen $\mathfrak{F}_\sigma$-topologischen Faden. Andererseits enthält W_1 keines der x_n. Es gibt also n_0, $m \varepsilon \mathbf{N}$, so daß $B \subset m K_{n_0}$. Wegen $K_n + K_n \subset K_{n+1}$ liegt dann aber B in K_{n_0+m}.

Der folgende Satz gibt eine Bedingung, wann für einen Raum mit absorbierender Folge $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_\sigma$ ist.

(9) *Sei* $\sigma = (K_n)$ *eine absorbierende Folge (gefräßige Folge) in* $E\,[\mathfrak{T}]$ *und sei* $E\,[\mathfrak{T}]$ *abzählbar tonneliert (abzählbar quasitonneliert). Dann ist* $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_{\sigma}^{\cdot\cdot}$. (3)

Beweis: Ist $(V_j)_{j=1}^{\infty}$ ein $\mathfrak{T}_\sigma$-topologischer Faden, so gibt es für jedes n einen $\mathfrak{T}$-topologischen Faden $(U_j^{(n)})_{j=1}^{\infty}$, so daß $K_{n+1} \cap U_j^{(n)} \subset V_{j+1}$. Sei $W_j^{(n)} = \overline{(K_{n-j+1} \cap V_{j+1}) + U_{j+1}^{(n)}}$. Für jedes n ist $(W_j^{(n)})_{j=1}^{\infty}$ ein abgeschlossener $\mathfrak{T}$-topologischer Faden in E. Der Faden (W_j) mit

$$W_j = \bigcap_{n=1}^{\infty} W_j^{(n)}$$

ist also auch abgeschlossen. Wir zeigen, W_j ist absorbierend (gefräßig): Sei $x \varepsilon E$ (B beschränkt in E). Dann gibt es ein n_0, so daß $x \varepsilon K_{n_0}$ ($B \subset K_{n_0}$). Da

$$W_j = \left[\bigcap_{n=1}^{n_0+j-1} \overline{(K_{n-j+1} \cap V_{j+1}) + U_{j+1}^{(n)}}\right] \cap \left[\bigcap_{n=n_0+1}^{\infty} \overline{(K_{n-j+1} \cap V_{j+1}) + U_{j+1}^{(n)}}\right]$$

und da jeder der beiden Durchschnitte $x\,(B)$ absorbiert, folgt die Behauptung, d.h. (W_j) ist $\mathfrak{T}$-topologisch.

Es bleibt noch, $W_1 \subset V_1$ zu zeigen: Wegen

$$W_1^{(n)} = \overline{(K_n \cap V_2 + U_2^{(n)}} \subset (K_n \cap V_2) + U_1^{(n)} \quad \text{gilt}$$

$$\begin{aligned} K_n \cap W_1^{(n)} &\subset K_n \cap [(K_n \cap V_2) + U_1^{(n)}] \\ &\subset (K_n \cap V_2) + [(K_n + K_n) \cap U_1^{(n)}] \\ &\subset (K_{n+1} \cap V_2) + (K_{n+1} \cap V_2), \end{aligned}$$

also auch $K_n \cap W_1 \subset (K_{n+1} \cap V_2) + (K_{n+1} \cap V_2)$. Daraus folgt aber sofort

$$W_1 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (K_{n+1} \cap V_2) + \bigcup_{n=1}^{\infty} (K_{n+1} \cap V_2) = V_2 + V_2 \subset V_1.$$

(3) Dabei heißt ein topologischer Vektorraum $E\,(\mathfrak{T})$ *tonneliert*, falls jeder abgeschlossene Faden von $E\,(\mathfrak{T})$ ein topologischer Faden ist. $E\,(\mathfrak{T})$ heißt *abzählbar (quasi-)tonneliert*, falls jeder abgeschlossene (gefräßige) Faden, der der Durchschnitt von abzählbar vielen abgeschlossenen topologischen Fäden ist, selbst topologisch ist.

(10) *Sei* $\sigma = \{K_n\}$ *eine gefräßige Folge in* $E[\mathfrak{J}]$, *sei* $F[\mathfrak{J}']$ *ein metrisierbarer Raum und sei* A *eine stetige lineare Abbildung von* F *in* E. *Dann gibt es eine Nullumgebung* V *in* F *und ein* K_n, *so daß* $A(V) \subset K_n$. *Sind insbesondere alle* K_n *beschränkt, so ist* A *beschränkt.*

Beweis: Sei (V_n) ein Basisfaden in $F[\mathfrak{J}')$. Angenommen $A(V_n)$ ist für alle n in keinem K_i enthalten, d.h. $A(V_n) \not\subset K_n$ für alle $n \in \mathbf{N}$. Dann gibt es Punkte $x_n \in V_n$, so daß $A(x_n) \notin K_n$ und (x_n) ist eine Nullfolge in $F[\mathfrak{J}']$. Die Menge $\{A(x_n)\}$ ist also beschränkt in $E[\mathfrak{J}]$, aber in keinem K_n enthalten.

Aus (10) ergibt sich unmittelbar

(11) *Ist* $E[\mathfrak{J}]$ *metrisierbar und* $\sigma = \{K_n\}$ *eine gefräßige Folge in* E, *so ist mindestens ein* K_n *Nullumgebung.*

Zum Schluß wollen wir noch einen Satz bringen, dessen Beweis recht aufwendig ist und den man in [8] finden kann.

(12) $E[\mathfrak{J})$ *hat genau dann eine gefräßige Folge* $\sigma = \{K_n\}$ *mit beschränkten* K_n, *falls für jeden metrisierbaren Raum* $F[\mathfrak{J}']\, L_b(E, F)$ *metrisierbar ist.*

4. σ-Lokaltopologische Vektorräume

Definition 9: Ein lokaltopologischer Vertorraum $E[\mathfrak{J}]$ heißt *σ-lokaltopologisch,* wenn er eine Fundamentalfolge beschränkter Teilmengen $\sigma = \{B_n\}$ besitzt.

Bemerkung: Wir können alle B_n als abgeschlossen sowie $B_n + B_n \subset B_{n+1}$ annehmen. Aus beweistechnischen Gründen erweitern wir wie in 3. die Folge der B_n durch $B_n = \{0\}$ für $n \leq 0$.

Nach 3. (9) gilt (oder [8])

(1) *Jeder* (UDF)*-Raum ist σ-lokaltopologisch.*

Ein Beispiel eines σ-lokaltopologischen Raumes, der kein (UDF)-Raum ist, findet man bei Ernst [8].

Da nach Adasch [4] jeder (lokalkonvexe) (DF)-Raum auch ein (UDF)-Raum ist, folgt aus (1)

(2) *Jeder (lokalkonvexe)* (DF)*-Raum ist σ-lokaltopologisch.*

Die σ-lokaltopologischen Räume haben eine Reihe ähnlich schöner Eigenschaften wie die (UDF)-Räume.

(3) *Jeder Quotientenraum* $E|_H$ *(H abgeschlossen) eines* σ*-lokaltopologischen Raumes ist* σ*-lokaltopologisch. Die* $\overline{K(B_n)}$ *(K = Quotientenabbildung) bilden eine Fundamentalfolge der beschränkten Teilmengen von* $E|_H$.

Beweis: Nach 2. (2) brauchen wir nur noch die zweite Aussage von (3) zu beweisen. Man überlegt sich leicht, daß die Quotientenraumtopologie $\widehat{\mathfrak{J}}$ mit der Topologie $\widehat{\mathfrak{J}}_{(\overline{K(B)})}$ auf $E|_H$ zusammenfällt. Dann folgt aber die Behauptung sofort aus 3. (8).

Nach 3. (6) gilt

(4) *Sei* $E[\mathfrak{J}]$ σ*-lokaltopologisch, dann ist auch die Vervollständigung* $\widetilde{E}[\widetilde{\mathfrak{J}}]$ σ*-lokaltopologisch und die* $\widetilde{B}_n$ *(Abschließung der* B_n *in* $\widetilde{E}[\widetilde{\mathfrak{J}}]$*) sind eine Fundamentalfolge der beschränkten Teilmengen von* $\widetilde{E}[\widetilde{\mathfrak{J}}]$.

Da die abzählbare direkte Summe σ-lokaltopologischer Räume lokaltopologisch ist, folgt aus (3):

(5) *Die topologische lineare Hülle*

$$E[\mathfrak{J}] = \sum_{i=1}^{\infty} A_i(E_i[\mathfrak{J}_i])$$

σ*-lokaltopologischer Räume* $E_i[\mathfrak{J}_i]$ *ist* σ*-lokaltopologisch. Zu jeder beschränkten Teilmenge B von* $E[\mathfrak{J}]$ *gibt es endlich viele beschränkte Teilmengen* B_i *von* $E_i[\mathfrak{J}_i]$, *so daß*

$$B \subset \overline{\sum_{i=1}^{n} A_i(B_i)}.$$

Wir wollen im folgenden σ-lokaltopologische Räume betrachten, indem wir an die B_n stärkere Forderungen stellen.

Wir haben in (4) insbesondere gezeigt, daß ein σ-lokaltopologischer Raum $E[\mathfrak{J}]$ mit kompakten B_n vollständing ist. Es gilt für diese Räume noch mehr.

Nach Adasch [3] heißt ein topologischer Vektorraum $E[\mathfrak{J}]$ *B-(bzw.* B_r*-) vollständig*, wenn jede stetige (eineindeutige) fast offene Abbildung von $E[\mathfrak{J}]$ in einen beliebigen topologischen Vektorraum offen (ein Isomorphismus) ist.

Zur Bedeutung dieser Räume für den Graphensatz und den Satz von der offenen Abbildung, siehe [3].

Wir zeigen nun

(6) *Ein σ-lokaltopologischer Raum $E[\mathfrak{J}_0]$ mit kompakten B_n ist B-vollständig.*

Beweis: Da ein Raum $E[\mathfrak{J}_0]$ genau dann B-vollständig ist, wenn jeder Quotientenraum B_r-vollständig ist, braucht man wegen (3) nur zu zeigen, daß $E[\mathfrak{J}_0]$ B_r-vollständig ist. Dazu genügt es, zu zeigen, daß jede gröbere lineare Topologie $\mathfrak{J}$ auf E mit der Eigenschaft, daß die Topologie $\overline{\mathfrak{J}_0}^{\mathfrak{J}}$, die man durch die $\mathfrak{J}$-Abschließungen der $\mathfrak{J}_0$-Nullumgebungen erhält (vgl. [3]), gröber als $\mathfrak{J}$ ist, mit $\mathfrak{J}_0$ zusammenfällt.

Da die B_n kompakt sind, fallen $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{J}_0$ auf den B_n zusammen. Es ist also $\mathfrak{J}_\sigma = \mathfrak{J}_0$. Nach 3. (2) besitzt $\mathfrak{J}_0$ dann eine Nullumgebungsbasis aus $\mathfrak{J}$-abgeschlossenen Mengen, d.h. es ist $\overline{\mathfrak{J}_0}^{\mathfrak{J}} = \mathfrak{J}_0$.

Dieses und auch die folgenden Ergebnisse wurden in [6] bereits für (UDF)-Räume gezeigt. Dennoch bilden die σ-lokaltopologischen Räume mit kompakten B_n eine größere Klasse als die (UDF)-Räume mit relativ kompakten beschränkten Teilmengen. Beispiele kann man sich leicht mit Hilfe des Satzes von Banach-Dieudonné (Köthe [12], § 12.10. (1)) konstruieren (vgl. [8]).

Adasch und Wagner [7] nennen einen topologischen Vektorraum $E[\mathfrak{J}]$ *Ultra-Schwartz-Raum,* wenn jede stetige lineare Abbildung von $E[\mathfrak{J}]$ in einen metrisierbaren topologischen Vektorraum präkompakt ist.

Es gilt

(7) *Ein σ-lokaltopologischer Raum $E[\mathfrak{J}]$ ist genau dann ein Ultra-Schwartz-Raum, wenn die B_n präkompakt sind.*

Beweis: Da in einem Ultra-Schwartz-Raum die beschränkten Mengen präkompakt sind [7], zeigen wir die Umkehrung.

Sei also A eine stetige lineare Abbildung von $E[\mathfrak{J}]$ in einen metrisierbaren topologischen Vektorraum $F[\mathfrak{J}']$ mit einem die Topologie $\mathfrak{J}'$ definierenden Faden $\mathfrak{w} = (V_n)$. Dann ist $A^{-1}(\mathfrak{W}) = (A^{-1}(V_n))$ ein topologischer Faden von $E[\mathfrak{J}]$.

Sei nun $\mathfrak{U} = (U_j)$ mit

$$U_j = \bigcap_{n=1}^{\infty} (B_{n-j+1} + A^{-1}(V_{n+j-1})).$$

$\mathfrak{U}$ ist ein topologischer Faden von $E[\mathfrak{J}]$ (vgl. 3. (2)).

Betrachten wir

$$A(U_1) \subset A(B_{n+1}) + V_{n+1} \subset \bigcup_{i=1}^{m} (x_i + V_{n+1}) + V_{n+1} \subset \bigcup_{i=1}^{m} (x_i + V_n),$$

d.h. A ist präkompakt, also $E[\mathfrak{J}]$ ein Ultra-Schwartz-Raum.

Analog beweist man

(8) *Ein lokalkonvexer σ-lokaltopologischer Raum $E[\mathfrak{J}]$ ist genau dann ein Schwartz-Raum, wenn die B_n präkompakt sind.*

Wir beweisen nun

(9) *Sei $E[\mathfrak{J}_0]$ ein σ-lokaltopologischer Raum mit kompakten B_n. Dann ist $\mathfrak{J}_0$ die feinste unter denjenigen (nicht notwendig linearen) Topologien auf E, die auf jedem B_n mit $\mathfrak{J}_0$ zusammenfällt. Das heißt:*

Eine Teilmenge M von $E[\mathfrak{J}_0]$ ist genau dann abgeschlossen, wenn die Durchschnitte $M \cap B_n$ $\mathfrak{J}_0$-abgeschlossen sind.

Beweis. Sei $M \cap B_n$ abgeschlossen für alle $n = 1, 2, \ldots$, und sei $x_0 \notin M$. Wir zeigen, daß x_0 nicht in $\overline{M}$ liegt. O. B. d. A. können wir $x_0 \in B_1$ annehmen. Dann ist $x_0 \notin M \cap (B_1 + B_1)$. Es gibt also eine abgeschlossene kreisförmige Nullumgebung $U^{(1)}$ von $E[\mathfrak{J}_0]$ mit

$$(x_0 + U^{(1)}) \cap M \cap (B_1 + B_1) = \phi.$$

Also ist auch $(x_0 + U^{(1)} \cap B_1) \cap M \cap (B_1 + B_1) = \phi$ und wegen $x_0 \in B_1$ sogar $(x_0 + U^{(1)} \cap B_1) \cap M = \phi$. Insbesondere ist dann auch

$$(x_0 + U^{(1)} \cap B_1) \cap M \cap (B_2 + B_2) = \phi.$$

Da $x_0 + U^{(1)} \cap B_1$ und $M \cap (B_2 + B_2)$ kompakt sind, gibt es eine abgeschlossene kreisförmige Nullumgebung $U^{(2)}$ von $E[\mathfrak{J}_0]$, so daß auch

$$(x_0 + U^{(1)} \cap B_1 + U^{(2)}) \cap M \cap (B_2 + B_2) = \phi,$$

also

$$(x_0 + U^{(1)} \cap B_1 + U^{(2)} \cap B_2) \cap M \cap (B_2 + B_2) = \phi.$$

Da $(x_0 + U^{(1)} \cap B_1 + U^{(2)} \cap B_2) \subset (B_1 + B_1 + B_2) \subset (B_2 + B_2)$, gilt

$$(x_0 + U^{(1)} \cap B_1 + U^{(2)} \cap B_2) \cap M = \phi.$$

Eine Fortsetzung dieses Verfahrens ergibt eine Folge $(U^{(n)})$ von kreisförmigen abgeschlossenen Nullumgebungen von $E[\mathfrak{J}_0]$, so daß für $V = \sum_{n=1}^{\infty} (U^{(n)} \cap B_n)$ gilt

$$(x_0 + V) \cap M = \phi.$$

Seien $\mathfrak{U}_n = (U_j^{(n)})$ topologische Fäden von $E[\mathfrak{J}_0]$ mit $U_{(1)}^{(n)} = U^{(n)}$. Dann ist $\mathfrak{V} = (V_j)$ mit $V_j = \sum_{n=1}^{\infty} (U_j^{(n)} \cap B_{n-j+1})$ nach 3. (2) ein topologischer Faden von $E(\mathfrak{J}_0)$. Also gilt $x_0 \notin \overline{M}$.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] N. ADASCH: *Topologische Produkte gewisser topologischer Vektorräume.* Math. Ann. *189*, 280-284 (1970).

[2] N. ADASCH: *Über die Vollständigkeit von* L_σ (E, F). Math. Ann. *191*, 290-292 (1971).

[3] N. ADASCH: *Der Graphensatz in topologischen Vektorräumen.* Math. Z. *119*, 131-142 (1972).

[4] N. ADASCH: *Lokalkonvexe Räume mit einer Fundamentalfolge beschränkter Teilmengen.* Math. Ann. *199*, 257-261 (1972).

[5] N. ADASCH UND B. ERNST: *Teilräume gewisser topologischer Vektorräume.* Collectanea Math. XXIV, 27-39 (1973).

[6] N. ADASCH UND B. ERNST: *Ultra-DF-Räume mit relativ kompakten beschränkten Teilmengen.* Math. Ann. *206*, 79-87 (1973).

[7] N. ADASCH UND R. WAGNER: *Ultra-Schwartz-Räume.* (erscheint demnächst).

[8] B. ERNST: *Ultra-(DF)-Räume. J. reine angew.* Math. *258*, 87-102 (1973).

[9] B. ERNST UND R. WAGNER: *Räume mit einer absorbierenden Folge kompakter Mengen.* (erscheint demnächst).

[10] S. O. IYAHEN: *On certain classes of linear topological spaces.* Proc. London Math. Soc. (3) *18*, 285-307 (1968).

[11] J. KÖHN: *Induktive Limiten nicht lokalkonvexer topologischer Vektorräume.* Math. Ann. *181*, 269-278 (1969).

[12] G. KÖTHE: *Topologische lineare Räume I. 2. Aufl.*, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1966.

[13] D. A. RAIKOW: *Vollständigkeitskriterien für lokalkonvexe Räume.* Usp. Mat. Nauk *14*, 1, 223-229 (1959).

[14] W. ROELCKE: *On the finest locally convex topology agreeing with a given topology on a sequence of absolutely convex sets.* Math. Ann. *198*, 57-80 (1972).

[15] L. WAELBROECK: *Topological Vector Spaces and Algebras.* Lecture Notes in Mathematics, Springer (1971).

[16] M. DE WILDE UND C. HOUET: *On Increasing Sequences of Absolutely Convex Sets in Locally Convex Spaces.* Math. Ann. 192, 257-261 (1971).

[17] A. WIWEGER: *Linear spaces with mixed topology.* Studia Math. XX, 47-68 (1961).

N. Adasch
Fachbereich Mathematik
der Universität
D-6000 Frankfurt
Robert-Mayer-Str. 10
Bundesrepublik Deutschland

B. Ernst
Fachbereich Mathematik
der Universität
D-6750 Kaiserslautern
Pfaffenbergstr. 95
Bundesrepublik Deutschland