RADICALES Y POLARIDAD

por

A. R-GRANDJEAN y J. L. GOMEZ PARDO

El concepto de radical dado por KUROŠ para anillos y grupos ((5), (6)) ha sido estudiado en categorías a partir de 1960 por ŠULGEIFER [11] y otros (LIVŠIC, RIABUHIN, SZASZ, WIEGANDT...).

En 1965 ANDERSON, DIVINSKY y SULINSKI [1] demostraron que si un anillo es un ideal de otro anillo, su radical también lo es (la propiedad análoga para grupos es consecuencia de que el radical de un grupo es un subgrupo característico). Esto permite estudiar simultáneamente los radicales de grupos y anillos, como subfuntores normales de la identidad en una categoría conveniente.

En este trabajo se utiliza para ello el concepto de polaridad que habíamos empleado con anterioridad en categorías exactas [3]. Esto da un método para construir los radicales inferior y superior correspondientes a una clase arbitraria de objetos de la categoría.

Aunque no se indica explícitamente ,se supone que la categoría es localmente pequeña, y las notaciones empleadas son las de [8].

1. LA CATEGORÍA C.

Se considera una categoría C, con cero, que verifica los siguientes axiomas:

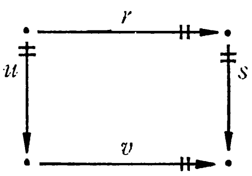
C1. Todo morfismo normal (núcleo) tiene conúcleo.

C2. Todo morfismo conormal (conúcleo) tiene núcleo.

C3. Todo morfismo u se descompone en el producto de un morfismo conormal seguido de un monomorfismo:

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dr, tail, "r"] & \\ \bullet \arrow[ur, two heads, "z'^{c}"] \arrow[rr, "u"'] & & \bullet \end{tikzcd}$$

C4. El producto vu de un morfismo normal u y uno conormal v se descompone en el producto sr de un morfismo conormal r y uno normal s.



Como consecuencia de los axiomas, la factorización de una flecha u es única: $u = u^I u^{ck}$ (u^I imagen de u).

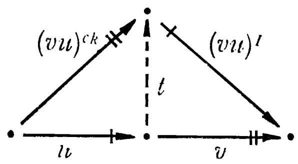
Se obtienen las siguientes propiedades:

1.1. Si $f = vu$ es normal y v mónica, entonces u es normal.

1.2. Si $f = vu$ es conormal y u épica, entonces v es conormal.

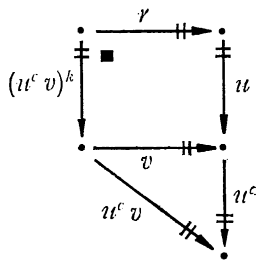
1.3. El producto de dos flechas conormales es conormal.

Sean u y v conormales, $vu = (vu)^I (vu)^{ck}$,



entonces existe t haciendo conmutativos los dos triángulos. Así por 1.2 t es conormal y $(vu)^I$ es también conormal y es por tanto un isomorfismo.

1.4. Existe cuadrado cartesiano de una flecha normal y una conormal con el mismo rango, siendo las opuestas normal y conormal respectivamente.



La existencia de cuadrado cartesiano es consecuencia de [8. 2.4, p. 32].

La sucesión $\Vert\!\xrightarrow{(u^c v)^k}\cdot \mid \xrightarrow{v}\!\Vert\!\!\succ \cdot \xrightarrow{u^c}\!\Vert\!\!\succ \cdot$ es exacta. Se deduce [9. 2.2 Prop. 1b) p. 230) la exactitud $\Vert\!\xrightarrow{(u^c v)^k}\cdot \xrightarrow{v}\!\Vert\!\!\succ \cdot \vdots \xrightarrow{u^c}\!\Vert\!\!\succ$ y así la parte normal de la diagonal del cuadrado es u, y por tanto r es la parte conormal, por C4.

C5. Existe unión de cualquier familia de subobjetos de un objeto dado (menor subobjeto que contiene a todos los de la familia). La unión de una familia de subobjetos normales es normal.

Siguiendo a KUROŠ [5, p. 300], diremos que en la categoría C un radical r está definido cuando existe una clase $\mathcal{R}$ (clase radical) de objetos de C, verificando las siguientes condiciones:

R1. $[X \longrightarrow\!\Vert\!\!\succ Y,\ X \in \mathcal{R}] \Rightarrow Y \in \mathcal{R}$.

R2. Todo objeto X de C tiene un subobjeto normal $r(X)$ que pertenece a $\mathcal{R}$ y es el mayor subobjeto normal de X perteneciente a $\mathcal{R}$. A $r(X)$ se le llama radical del objeto X.

R3. $\forall X \in Ob(C),\ r(X/r(X)) = 0$.

Una flecha normal u se llamará característica cuando para toda flecha normal v, el producto vu es normal.

Por último se impone a C el siguiente axioma:

C6. $\forall X \in Ob(C),\ r(X) \Vert\!\xrightarrow{r_x} X$ es una flecha característica.

2. RADICALES Y FUNTORIALIDAD

Es claro que una clase radical $\mathcal{R}$ está determinada si se conoce $r(X)$ para cada X, pues:

$$X \in \mathcal{R} \iff r(X) = X.$$

Por tanto estudiaremos la función $X \rightsquigarrow r(X)$.

Sea C_{NC} la subcategoría de C, cuyos objetos son los de C, y cuyas flechas son los productos de flechas normales y conormales de la categoría C. Al conjunto de los morfismos de la categoría C_{NC} entre dos objetos X e Y, lo denotaremos $H_{NC}(X, Y)$. Todo elemento $f \in H_{NC}(X, Y)$ es de la forma $f = v_n \dots v_1 u$, con u conormal y $v_1, \dots v_n$

normales, como consecuencia de $C4$. Llamaremos flecha subnormal a un producto de flechas normales.

2.1. Un radical r en la categoría C, define un subfuntor normal de la identidad en la categoría C_{NC}. Este funtor r es idempotente $(r(r(X)) = r(X))$ y verifica $r(X/r(X)) = 0$.

Sea $v_n \dots v_1 u \in H_{NC}(X, Y)$. La flecha ur_X se descompone en conormal por normal (C4), su imagen pertenece a $\mathcal{R}$ por R1, y por tanto se factoriza a través de r_{y_0} por R2, mediante una flecha normal (1.1).

$$\begin{tikzcd}
r(X) \arrow[r] \arrow[d, "r_X"'] & \bullet \arrow[r] \arrow[dr] & r(Y_0) \arrow[r] \arrow[d, "r_{Y_0}"] & r(Y_1) \arrow[r, dashed, no head] \arrow[d] & r(Y_{n-1}) \arrow[r] \arrow[d] & r(Y) \arrow[d, "r_Y"] \\
X \arrow[rr, "u"'] & & Y_0 \arrow[r, "v_1"'] & Y_1 \arrow[r, dashed, no head] & Y_{n-1} \arrow[r, "v_n"'] & Y
\end{tikzcd}$$

En virtud de C6 $v_{i+1} r_{Y_i}$ es normal para todo i, y por tanto existen flechas normales $r(Y_i) \Vert\!\!\longrightarrow r(Y_{i+1})$ haciendo los cuadrados del diagrama conmutativos.

Por tanto, en terminología de Maranda, r es un radical idempotente en C_{NC} [3, 2.2, p. 40].

2.2. Si r es un subfuntor normal de la identidad en la categoría C_{NC}, idempotente y tal que $r(X/r(X)) = 0$, $\forall X \in Ob(C)$, entonces r es un radical en la categoría C.

Sea $\mathcal{R} = \{X \in Ob(C) / r(X) = X\}$. Entonces $\mathcal{R}$ es una clase radical:

R1. Sea $X \longrightarrow\!\!\Vert\!\!\!> Y$ con $X \in \mathcal{R}$; se obtiene

$$\begin{tikzcd}
 & r(Y) \arrow[d, "r_Y"] \\
r(X) = X \arrow[ur] \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

r_Y es épica, por tanto $r(Y) = Y$.

R2. $\forall\, X \in Ob(C)\ r(X) \in \mathcal{R}$ por ser r idempotente.

Sea Z un subobjeto normal de X perteneciente a $\mathcal{R}$, entonces:

$$\begin{tikzcd} X & Z = (Z)_{\mathcal{A}} \arrow[l] \arrow[dl] \\ (X)_{\mathcal{A}} \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

Z está contenido en $r(X)$.

R3. Se verifica por hipótesis.

2.3. Como consecuencia de 2.1 y 2.2 se obtiene que dar un radical en C es equivalente a dar un subfuntor normal de la identidad r en C_{NC}, idempotente, verificando $r(X/r(X)) = 0\ \forall\, X \in Ob(C)$.

2.4. Una clase $\mathcal{R}$ de objetos de C es radical si y sólo si es cerrada para i) objetos conormales; ii) extensiones; iii) uniones de subobjetos normales.

$\mathcal{R}$ radical $\Rightarrow$ i), ii), iii).

i) Por definición.

ii) Sea $X \xrightarrow{u} Z \xrightarrow{u^c} Y$ una extensión con X e Y pertenecientes a $\mathcal{R}$. Se obtiene el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & r(Z) \arrow[d, "r_Z"] & \\ r(X) = X \arrow[ur] \arrow[r, "u"'] & Z \arrow[r, "u^c"] \arrow[d, "r_Z^c"'] & Y = r(Y) \arrow[dl, "v"] \arrow[d, dashed] \\ & Z/r(Z) & r(Z/r(Z)) = 0 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

La flecha v es conormal por 1.2. Por tanto se factoriza a través de $r(Z/r(Z)) = 0$. Así $v = 0 \Rightarrow r_Z^c = 0 \Rightarrow r(Z) = Z$.

iii) Si $(X_i)_{i \in I}$ es una familia de subobjetos normales de X, con $X_i \in \mathcal{R}$ $\forall\, i \in I$, entonces:

$$\begin{tikzcd}
& r(\bigcup X_i) \arrow[d] \\
r(X_i) = X_i \arrow[ur, dashed] \arrow[r] \arrow[dr] & \bigcup X_i \arrow[d] \\
& X
\end{tikzcd}$$

$r(X_i) = X_i \Rightarrow X_i \subset r(\bigcup X_i)$ $\forall\, i \in I \Rightarrow r(\bigcup X_i) = \bigcup X_i$.

$\mathcal{R}$ verifica i), ii), iii) $\Rightarrow$ $\mathcal{R}$ clase radical.

R1. Es la condición i).

R2. $\forall\, X \in Ob(C)$, sea $r(X) = \bigcup\limits_{i \in I} X_i$, siendo $(X_i)_{i \in I}$ la familia de los subobjetos normales de X perteneciente a $\mathcal{R}$. $r(X)$ es un subobjeto normal de X como consecuencia de C5, y pertenece a $\mathcal{R}$ por iii).

R3. Sea el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& r(X) \arrow[dl] \arrow[d, "r_X"] \\
Z \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\blacksquare"] & X \arrow[d, "r_X^c"] \\
Y \arrow[r, "u"'] & X/r(X)
\end{tikzcd}$$

con Y subobjeto normal de $X/r(X)$, $Y \in \mathcal{R}$. Se construye el cuadrado cartesiano de u y r_X^c (1.4). se obtiene la extensión $r(X) \rightarrowtail Z \twoheadrightarrow Y$ y por ii) $Z \in \mathcal{R}$. Así $Z = r(X)$ y por tanto $Y = 0$.

3. Radicales y Polaridad

La relación $H_{NC}(X, Y) = 0$ entre objetos de C define una conexión de Galois o polaridad [3, p. 16].

Dada una clase $\mathcal{A}$ de objetos de $\mathcal{C}$ se definen:

$R(\mathcal{A}) = \{B \in Ob(\mathcal{C}) / H_{NC}(A, B) = 0 \ \forall A \in \mathcal{A}\}$

$L(\mathcal{A}) = \{B \in Ob(\mathcal{C}) / H_{NC}(B, A) = 0 \ \forall A \in \mathcal{A}\}$

Un par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ de clases de objetos de $\mathcal{C}$, se llamará un par polar radical cuando $\mathcal{A} = L(\mathcal{B})$ y $\mathcal{B} = R(\mathcal{A})$ ($(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par polar de pretorsión en $\mathcal{C}_{NC}$ [3, 1.2.5, p. 16]).

3.1. Si $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par polar radical en $\mathcal{C}$, entonces $\mathcal{A}$ es cerrada para i) objetos conormales, ii) extensiones, iii) uniones de subobjetos normales.

i) Sea $X \xrightarrow{u} Y$ con $X \in \mathcal{A}$, entonces si $v \in H_{NC}(Y, B)$ con $B \in \mathcal{B}$, $vu \in H_{NC}(X, B)$ y $vu = 0$, $v = 0$.

ii) Si $X \rightarrowtail Z \twoheadrightarrow Y$ es una extensión con X e Y pertenecientes a $\mathcal{A}$, entonces:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] & Z \arrow[r, "u^c"] \arrow[d, "v"'] & Y \arrow[dl, dashed, "t"] \\
 & B &
\end{tikzcd}$$

Si $v \in H_{NC}(Z, B)$ con $B \in \mathcal{B}$, entonces $vu = 0$ y existe t verificando $tu^c = v$. Así $t \in H_{NC}(Y, B)$, $t = 0$ y $v = 0$.

iii) Sea $(X_i)_{i \in I}$ una familia de subobjetos normales de X pertenecientes a $\mathcal{A}$,

$$\begin{tikzcd}
 & X_i \arrow[d, "h_i"] \arrow[dl, dashed] & \\
Y \arrow[r, "v^k"] & \bigcup X_i \arrow[r, "v"] \arrow[d] & B \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

si $v \in H_{NC}(\bigcup X_i, B)$ con $B \in \mathcal{B}$, entonces $vh_i = 0 \ \forall i \in I$, y así las h_i se factorizan a través de Y, $Y = \bigcup X_i$ y $v = 0$.

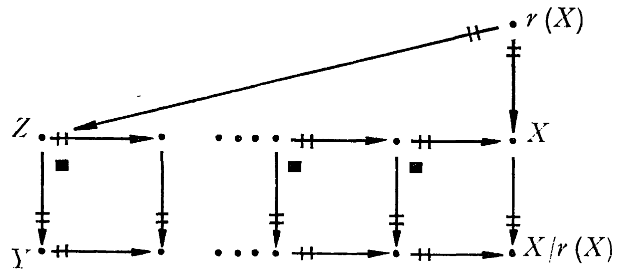
3.2. Una clase $\mathcal{R}$ de objetos de C es clase radical si y sólo si existe una clase S tal que $(\mathcal{R}, S)$ es un par polar radical.

« $\Leftarrow$ » Es consecuencia de 2.4 y 3.1.

« $\Rightarrow$ » Sea $S = R\mathcal{R}$. Basta probar que $LS = \mathcal{R}$.

Trivialmente $R \subset LR\mathcal{R} = LS$.

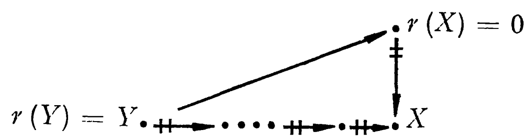
Sea $X \in LS$, es suficiente probar que $X/r(X) \in S$. Como $\mathcal{R}$ es cerrada para objetos conormales (R1), basta demostrar que cualquier subobjeto subnormal de $X/r(X)$, perteneciente a $\mathcal{R}$ es el subobjeto cero. Se tiene el diagrama:



que se obtiene al construir cuadrados cartesianos y utilizar que los núcleos de flechas opuestas tienen el mismo dominio [8, 2.2.8, p. 28], que da una extensión $r(X) \Vert\!\!\longrightarrow Z \longrightarrow\!\!\Vert\!\!\triangleright\, Y$. Por 2.4 ii) $Z \in \mathcal{R}$. Por la funtorialidad de r, $Z = r(X)$ y por tanto $Y = 0$.

3.3. Si $\mathcal{R}$ es una clase radical en C, y $(\mathcal{R}, S)$ es el par polar radical correspondiente, entonces X es semisimple $(r(X) = 0)$ si y sólo si $X \in S$.

« $\Rightarrow$ »



Si $u \in H_{NC}(Y, X)$ es una flecha subnormal con $Y \in \mathcal{R}$, entonces u se factoriza a través de $r(X) = 0$, y así $u = 0$.

« $\Leftarrow$ » Trivial.

Se obtiene que una clase S de objetos de C es la clase de los objetos semisimples respecto a un radical r si y sólo si forma parte de un par polar radical $(\mathcal{R}, S)$. Existe una correspondencia biunívoca entre clases radicales y clases semisimples en C.

4. Generacion de Radicales

En la clase de radicales de la categoría C se considera la relación de orden usual:

$$r \leq r' \Leftrightarrow r(X) \subset r'(X) \quad \forall X \in Ob(C)$$

Si $(\mathcal{R}, S)$ y $(\mathcal{R}', S')$ son los pares polares radicales correspondientes a r y r' respectivamente, entonces:

$$r \leq r' \Leftrightarrow \mathcal{R} \subset \mathcal{R}' \Leftrightarrow S' \subset S.$$

Dada una clase $\mathcal{A}$ de objetos de C, se llama radical inferior de $\mathcal{A}$, r_A al menor radical de C tal que todos los objetos de $\mathcal{A}$ son de la clase radical.

Análogamente se llama radical superior de $\mathcal{A}$, r^A, al mayor radical de C, tal que todos los objetos de $\mathcal{A}$ son semisimples.

4.1. Para cualquier clase $\mathcal{A}$ de objetos de C existen r_A y r^A.

En efecto, r_A es el radical correspondiente al par polar radical $(LR\mathcal{A}, R\mathcal{A})$ y r^A es el correspondiente a $(L\mathcal{A}, RL\mathcal{A})$, puesto que LR y RL son respectivamente la menor clase radical y la menor clase semisimple que contienen a $\mathcal{A}$.

4.2. Si $\mathcal{A}$ es una clase de objetos de C, entonces $LR\mathcal{A}$ está formada por todos los objetos X de C que verifican la condición:

«Si $0 \neq u : X \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\shortparallel\!\!\succ Y$, entonces existe $0 \neq v \in H_{NC}(A, Y)$ siendo $A \in \mathcal{A}$».

En efecto $X \in LR\mathcal{A}$, junto con $u \neq 0$ implica que $Y \notin R\mathcal{A}$ y por tanto existe $0 \neq v \in H_{NC}(A, Y)$ para algún $A \in \mathcal{A}$.

Recíprocamente, si X verifica la condición, entonces si $u \in H_{NC}(X, B)$ con $B \in R\mathcal{A}$, por ser $R\mathcal{A}$ cerrada para subobjetos normales

$$X \cdot \longrightarrow Y \;\Vert\!\!\xrightarrow[u]{}\; \cdots\cdots \;\Vert\!\!\longrightarrow \cdot B$$

$Y \in R\mathcal{A}$, y así $\forall A \in \mathcal{A}$ $H_{NC}(A, Y) = 0$, y por tanto $u = 0$.

Los objetos de la clase radical superior estan dados por la definición de $L\mathcal{A}$.

BIBLIOGRAFÍA

[1] ANDERSON, T.; DIVINSKY, N.; SULINSKI, A. *Hereditary radicals in associative and alternative rings*. Canad. J. Math. 17, pp. 594-603 (1965).

[2] DIVINSKY, N. *Rings and radicals*. George Allen Unwin Ltd. London (1965).

[3] GÓMEZ PARDO, J. L. *Teorías de torsión en categorías exactas*. Alxebra 9. Santiago (1972).

[4] GRAY, M. *A radical approach to algebra*. Addison-Wesley (1970).

[5] KUROŠ, A. G. *Radicals of rings and algebras*. Coll. Math. Soc. Janos Bolyai, 6. pp. 297-314. North-Holland (1973).

[6] KUROŠ, A. G. *Radicals in the theory of groups*. Coll. Math. Soc. Janos Bolyai, 6. pp. 271-296. North-Holland (1973).

[7] PLOTKIN, B. J. *Groups of automorphisms of algebraic systems*. Wolters-Noordhoff. Groningen (1972).

[8] R-GRANDJEAN L-VALCARCEL, A. *Homología en categorías exactas*. Alxebra 4. Santiago (1970).

[9] R-GRANDJEAN L-VALCARCEL, A. *Sucesión de homología en una categoría hofmaniana*. Collectanea Mathematica. Vol. XXII, pp. 229-239 (1971).

[10] ROBINSON, D. J. *Finiteness conditions and generalized soluble groups*. Part I. Springer Verlag (1972).

[11] SULGEIFER, E. G. *On the general theory of radicals in categories*. Amer. Math. Soc. Transl. (2) 59, pp. 150-162 (1966).

[12] SULINSKI, A.; ANDERSON, R.; DIVINSKY, N. *Lower radical properties for associative and alternative rings*. J. London Math. Soc. 41, pp. 417-424 (1966).

[13] SZASZ, F.; WIEGANDT, R. *On the duality of radical and semi-simple objects in categories*. Acta Math. Acad. Scient, Hung. T. 21 (1-2), pp. 175-182 (1970).

Dept. Algebra y Fund.
Universidad de Santiago