

HOMOTOPIA E INYECTIVIDAD

por

JOSÉ R. CARUNCHO CASTRO y CONSTANTINO TOUZÓN PÉREZ

El objeto del presente trabajo es el desarrollo y generalización de las teorías de Homotopía Algebraica, como han sido expuestas por ECKMANN B. (Homotopie et Dualité. Colloque de Topologie Algébrique. Junio 1956) y HILTON P. (Homotopy Theory and Duality. Nelson 1967) mediante la introducción del concepto de Σ -inyectividad (inyectividad respecto a una clase arbitraria de morfismos, Σ). La categoría base basta, en general, que sea aditiva. La teoría clásica resulta al tomar la categoría de R -módulos (o una categoría abeliana arbitraria) y Σ la clase de flechas mónicas.

La primera parte del trabajo está dedicada al estudio del concepto de Σ -inyectividad y al de su dual (Σ -proyectividad) así como al estudio del funtor $\pi_0(A, -)$ que en cierto sentido es análogo al funtor grupo de Poincaré de Topología Algebraica. En la segunda parte se introducen las nociones de resoluciones Σ -inyectivas y de Σ -cilindro de un morfismo, estudiándose la existencia de dichas resoluciones con objeto de obtener los teoremas de factorización y extensión de homotopías.

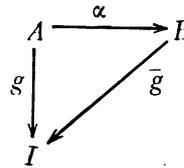
I: Σ -INYECTIVIDAD

Sea A una categoría y Σ una clase de morfismo arbitraria.

(1-1) Diremos que un objeto I es Σ -inyectivo cuando todo diagrama de la forma

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ g \downarrow & & \\ I & & \end{array}$$

con α perteneciente a Σ , puede extenderse a un diagrama conmutativo



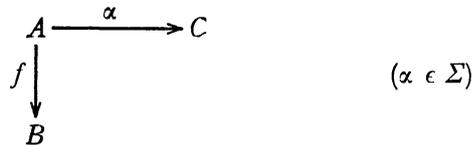
(1-2) Ejemplos:

- i) Si I es Σ -inyectivo y $J \approx I$ entonces J es Σ -inyectivo.
- ii) El \varprojlim de una familia de Σ -inyectivos es Σ -inyectivo. En particular el producto de Σ -inyectivos es Σ -inyectivo.
- iii) Si A tiene cero, entonces si un producto es Σ -inyectivo lo es cada uno de sus factores.
- iv) Si Σ es la clase de flechas mónicas en la categoría de grupos abelianos entonces los objetos Σ -inyectivos son los grupos abelianos divisibles.
- v) Si en Top consideramos a Σ la clase de las flechas $A \hookrightarrow X$, inclusión de A , subespacio cerrado de X y X normal, entonces los Σ -inyectivos son los espacios topológicos sólidos.

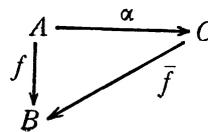
Se obtiene entonces que el producto de grupos divisibles es divisible y que el producto de espacios sólidos es sólido.

(1-3) Si Σ_1 y Σ_2 son clases de morfismos tales que $\Sigma_1 \subset \Sigma_2$ se verifica que Σ_2 -inyectivo \Rightarrow Σ_1 -inyectivo.

(1-4) Sea Σ una clase de morfismo; un morfismo f se dice Σ -inyectivamente homotópico a cero, $f \underset{\Sigma}{\sim} 0$ si todo diagrama



puede extenderse a un diagrama conmutativo



(1-5) Si \underline{A} es aditiva diremos que f es Σ -inyectivamente homotópico a g , $f \underset{\Sigma}{\sim} g$, si $f - g \underset{\Sigma}{\sim} 0$.

(1-6) En las hipótesis de (1-3) se tiene $f \underset{\Sigma_2}{\sim} g \Rightarrow f \underset{\Sigma_1}{\sim} g$.

(1-7) Sean f y g morfismos de $[A, B]$ y h morfismo de $[B, D]$; se verifica que si $f \underset{\Sigma}{\sim} g$ entonces $hf \underset{\Sigma}{\sim} hg$.

(1-8) Diremos que \underline{A} tiene Σ -inyectivos cuando para cualquier objeto A en \underline{A} hay un morfismo $\phi: A \rightarrow I$, donde ϕ está en Σ y además I es Σ -inyectivo.

(1-9) Sean f y g morfismos de $[A, B]$ tales que $f \underset{\Sigma}{\sim} g$; si h es otro morfismo arbitrario de $[A, B]$ se verifica $f + h \underset{\Sigma}{\sim} g + h$.

(1-10) Sea $\{\phi_i, i \in I\}$ una familia de morfismos tales que $\phi_i \underset{\Sigma}{\sim} 0$ para todo $i \in I$. Si existe $\prod_{i \in I} \phi_i$ y la categoría tiene Σ -inyectivos entonces $\prod_{i \in I} \phi_i \underset{\Sigma}{\sim} 0$.

Basta para ello considerar el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & M & \xrightarrow{\quad} \bar{X}_i \\
 & \nearrow u & \nearrow \alpha \\
 \prod X_i & \xrightarrow{\quad} & X_i \\
 \downarrow \prod_{i \in I} \phi_i & & \downarrow \phi_i \\
 \prod Y_i & \xrightarrow{\quad} & Y_i
 \end{array}$$

donde u es un morfismo arbitrario de Σ y donde \bar{X}_i es el Σ -inyectivo sobre X_i para todo $i \in I$.

(1-11) Sean $\{f\}_{i \in I}$ y $\{g_i\}_{i \in I}$ familia de morfismos en $[X_i, Y_i]$ tales que para todo i , $f_i \underset{\Sigma}{\sim} g_i$. Si \underline{A} tiene Σ -inyectivos se verifica $\prod_{i \in I} f_i \underset{\Sigma}{\sim} \prod_{i \in I} g_i$.

(1-12) Si \underline{A} tiene Σ -inyectivos entonces se verifica que $f \underset{\Sigma}{\sim} g \Rightarrow fk \underset{\Sigma}{\sim} gk$ siendo f y g morfismos en $[A, B]$ y k un morfismo de $[K, A]$.

(1-13) La relación « \sim_{Σ} » en $[A, B]$ es de equivalencia y compatible con la composición si la categoría tiene Σ -inyectivos.

(1-14) Un objeto B es Σ -inyectivo si y solo si para todo A y para cualesquiera f, g en $[A, B]$ se tiene $f \sim_{\Sigma} g$.

(1-15) Teniendo en cuenta (1-14) B Σ -inyectivo si y solo si para cualquier A , $\Pi_0(A, B)_{\Sigma} = 0$. Con $\Pi_0(A, B)_{\Sigma}$ denotamos al conjunto cociente $[A, B] / \sim_{\Sigma}$.

(1-16) Si A es Σ -inyectivo entonces $\Pi_0(A, B)_{\Sigma} = 0$ para todo objeto B de la categoría.

(1-17) Si para todo objeto B se verifica $\Pi_0(A, B)_{\Sigma} = 0$ y la categoría tiene Σ -inyectivos entonces A es Σ -inyectivo.

(1-18) El conjunto $\Pi_0(A, B)_{\Sigma}$ posee estructura de grupo abeliano.

(1-19) Existe un funtor $A \xrightarrow{\Pi_0(A, -)_{\Sigma}}$ Gab definido por

$$\Pi_0(A, -)_{\Sigma}(B) = \Pi_0(A, B)_{\Sigma}$$

covariante y aditivo.

Analogamente puede hablarse del funtor $\Pi_0(-, A)_{\Sigma}$ si la categoría tiene Σ -inyectivos.

(1-20) Sean A y B objetos en \mathcal{A} . Definimos $\text{Hom}_0(A, B)_{\Sigma} = \{f \in \text{Hom}_0(A, B) / f \sim_{\Sigma} 0\}$; se obtiene el isomorfismo canónico

$$\tau : \Pi_0(A, B)_{\Sigma} \longrightarrow \text{Hom}(A, B) / \text{Hom}_0(A, B)_{\Sigma}$$

dado por $\tau[(f)] = f + \text{Hom}_0(A, B)_{\Sigma}$.

(1-21) Sean Σ_1 y Σ_2 dos clases de morfismos tales que $\Sigma_1 \subset \Sigma_2$. Existe un morfismo de grupos abelianos

$$\Phi : \Pi_0(A, B)_{\Sigma_2} \longrightarrow \Pi_0(A, B)_{\Sigma_1}$$

cuyo núcleo es $\Phi^k = \text{Hom}_0(A, B)_{\Sigma_1} / \text{Hom}_0(A, B)_{\Sigma_2}$

(1-22) Dualmente se podrían definir la relación de proyectividad respecto a una clase de morfismos Σ , « $\overset{\Sigma}{\sim}$ ».

(1-23) Sean Σ_1 y Σ_2 dos clases de morfismos. Supongamos que en la categoría se verifica la equivalencia

$$A \text{ } \Sigma_1\text{-inyectivo} \Leftrightarrow A \text{ } \Sigma_2\text{-proyectivo.}$$

Entonces si la categoría tiene Σ_1 -inyectivos y Σ_2 -proyectivos se obtiene la siguiente equivalencia $\alpha \underset{\Sigma_1}{\sim} 0 \Leftrightarrow \alpha \underset{\Sigma_2}{\sim} 0$
 « \Rightarrow » Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & A \\ & & \downarrow \alpha \\ X & \xrightarrow{\varepsilon} & B \end{array}$$

donde ε es un morfismo arbitrario de Σ_2 . Como la categoría tiene Σ_1 -inyectivo, existe $i: A \rightarrow I$ en Σ_1 con I Σ_1 -inyectivo; por hipótesis $\alpha \underset{\Sigma_1}{\sim} 0$, entonces existe $\bar{\alpha}$ tal que $\bar{\alpha}i = \alpha$.

Además I Σ_1 -inyectivo $\Leftrightarrow I$ Σ_2 -proyectivo lo que nos garantiza la existencia de un morfismo $\chi: I \rightarrow X$ tal que $\bar{\alpha} = \varepsilon\chi$; basta entonces considerar χi para obtener que $\alpha \underset{\Sigma_2}{\sim} 0$.

« \Leftarrow » Su demostración es dual de la anterior.

(1-24) Si Σ_1 y Σ_2 son dos clases de morfismos y si en la categoría se verifica la equivalencia $\alpha \underset{\Sigma_1}{\sim} 0 \Leftrightarrow \alpha \underset{\Sigma_2}{\sim} 0$ entonces también es cierta la nueva equivalencia $A \text{ } \Sigma_1\text{-inyectivo} \Leftrightarrow A \text{ } \Sigma_2\text{-proyectivo}$.

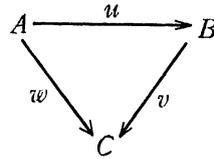
(1-25) [$A \text{ } \Sigma_1\text{-inyectivo} \Leftrightarrow A \text{ } \Sigma_2\text{-proyectivo}$] \Leftrightarrow [$f \underset{\Sigma_1}{\sim} g \Leftrightarrow f \underset{\Sigma_2}{\sim} g$]
 siempre que la categoría tenga Σ_1 -inyectivos y Σ_2 -proyectivos.

II: EQUIVALENCIA DE Σ -INYECTIVIDAD

(2-1) Sea \underline{A} una categoría aditiva y Σ una clase arbitraria de morfismos en \underline{A} . Dados dos objetos A y B , diremos que A es Σ -inyectivamente equivalente a B , $A \underset{\Sigma}{\sim} B$, si y sólo si existen morfismos $\Phi: A \rightarrow B$ y $\psi: B \rightarrow A$ $\psi \underset{\Sigma}{\sim} 1_B$, $\psi\Phi \underset{\Sigma}{\sim} 1_A$.

A los morfismos ϕ y ψ se les llamará Σ -equivalencias de homotopía. En particular los isomorfismos son Σ -equivalencias de homotopía.

(2-2) Sea \underline{A} una categoría aditiva con Σ -inyectivos. En el diagrama conmutativo



si dos morfismos son Σ -equivalencias lo es el tercero.

En efecto, si u y v son Σ -equivalencias existen morfismos p y q $| p u \underset{\Sigma}{\sim} 1_A, u p \underset{\Sigma}{\sim} 1_B, q v \underset{\Sigma}{\sim} 1_B, v q \underset{\Sigma}{\sim} 1_C$. Considerando el morfismo $p q$ se tiene $w(p q) \underset{\Sigma}{\sim} 1_C, (p q) w \underset{\Sigma}{\sim} 1_A$ como fácilmente se comprueba

(2-3) Un objeto A es Σ -inyectivamente equivalente al objeto cero si y sólo si $1_A \underset{\Sigma}{\sim} 0$.

(2-4) $A \underset{\Sigma}{\sim} 0$ si y sólo si todo morfismo de Σ con dominio A es corrección.

(2-5) Diremos que A es Σ -contráctil cuando $A \underset{\Sigma}{\sim} 0$.

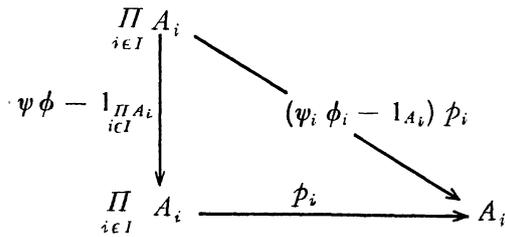
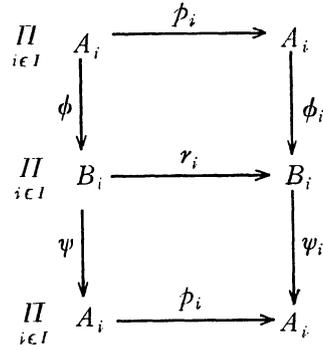
(2-6) En una categoría con Σ -inyectivos se verifica la siguiente equivalencia A Σ -contráctil $\Leftrightarrow A$ Σ -inyectivo.

(2-7) Si la categoría tiene Σ -inyectivos y si f es un morfismo de A en B , se verifica

$f \underset{\Sigma}{\sim} 0 \Leftrightarrow f$ puede factorizarse a través de algún objeto Σ -inyectivo.

(2-8) Sea \underline{A} una categoría con Σ -inyectivos y productos y $\{A_i\}_{i \in I}, \{B_i\}_{i \in I}$ familias de objetos en $\underline{A}/A_i \underset{\Sigma}{\sim} B_i$ para todo $i \in I$. Se verifica que $\prod_{i \in I} A_i \underset{\Sigma}{\sim} \prod_{i \in I} B_i$.

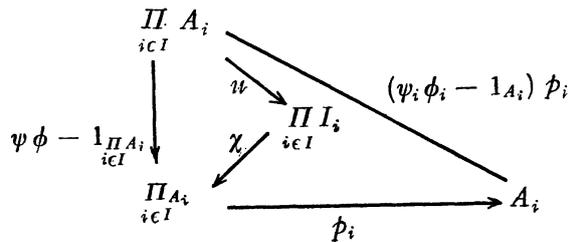
Demostración: Por hipótesis existen morfismos $u_i : A_i \rightarrow I_i$ en Σ con I_i Σ -inyectivo para todo $i \in I$. De $A_i \underset{\Sigma}{\sim} B_i$ para todo $i \in I$ existen morfismos $\phi_i : A_i \rightarrow B_i, \psi_i : B_i \rightarrow A_i$ tales que $\psi_i \phi_i \underset{\Sigma}{\sim} 1_{A_i}, \phi_i \psi_i \underset{\Sigma}{\sim} 1_{B_i}$. Por (1-9) existen morfismos χ_i tales que $\chi_i u_i = \psi_i \phi_i - 1_{A_i}$ para todo $i \in I$. Consideremos ahora los siguientes diagramas conmutativos obtenidos por la universalidad del producto



(donde $\phi = \prod_{i \in I} \phi_i$, $\psi = \prod_{i \in I} \psi_i$) y por la verificaci3n de las relaciones $p_i (\psi \phi - 1_{\prod_{i \in I} A_i}) = p_i \psi \phi - p_i = \psi_i r_i \phi - p_i = \psi_i \phi_i p_i - p_i = (\psi_i \phi_i - 1_{A_i}) p_i$ para todo $i \in I$.

An3logamente podemos hablar de los morfismos $\chi = \prod_{i \in I} \chi_i$, $u = \prod_{i \in I} u_i$ verificando las relaciones $p_i \chi = \chi_i q_i$, $q_i u = u_i p_i$;

Finalmente teniendo en cuenta el diagrama que a continuaci3n se expone y las relaciones $p_i \chi u = \chi_i q_i u = \chi_i u_i p_i = (\psi_i \phi_i - 1_{A_i}) p_i$ para todo $i \in I$ se obtiene que el tri3ngulo de la izquierda es conmutativo:



Hemos llegado a que $\chi u = \psi \phi - 1_{\prod_{i \in I} A_i}$, lo que por (1-2) y (2-7) nos dice que $\psi \phi - 1_{\prod_{i \in I} A_i} \underset{\Sigma}{\sim} 0$ y teniendo en cuenta (1-9) que $\phi \psi \underset{\Sigma}{\sim} 1_{\prod_{i \in I} A_i}$. Análogamente se demostraría que $\phi \psi \underset{\Sigma}{\sim} 1_{\prod_{i \in I} B_i}$, con lo cual la afirmación dada al principio queda totalmente probada.

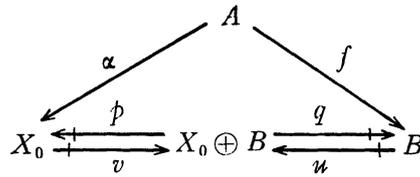
(2-9) En las hipótesis de (2-8) se verifican las siguientes proposiciones

I) Si I es finito $\bigoplus_{i \in I} A_i \underset{\Sigma}{\sim} \bigoplus_{i \in I} B_i$ y por consiguiente si $A \underset{\Sigma}{\sim} B$, $A' \underset{\Sigma}{\sim} B'$ se tiene $A \oplus A' \underset{\Sigma}{\sim} B \oplus B'$.

II) $A \underset{\Sigma}{\sim} 0 \Rightarrow A \oplus B \underset{\Sigma}{\sim} B$ para todo objeto B de la categoría.

III) $A \underset{\Sigma}{\sim} 0, B \underset{\Sigma}{\sim} 0 \Rightarrow A \oplus B \underset{\Sigma}{\sim} 0$.

(2-10) Sea $f: A \longrightarrow B$ un morfismo en una categoría aditiva con Σ -inyectivos y productos finitos; entonces existe un morfismo $\alpha: A \longrightarrow X_0$ de Σ y X_0 Σ -inyectivo; consideremos el diagrama



donde por la universalidad del producto existe un único morfismo λ tal que $p \lambda = \alpha$ y $q \lambda = f$.

A la terna (f, λ, q) se le llama el Σ -cilindro de f .

(2-11) Si (f, λ, q) es el cilindro de f , entonces $B \underset{\Sigma}{\sim} X_0 \oplus B$ sin más que considerar el par de morfismos q y u .

(2-12) Lema. I) Si \underline{A} tiene Σ -inyectivos y conúcleos podemos construir para cualquier objeto A de \underline{A} la siguiente serie $A \longrightarrow X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3 \dots$ donde X_i es Σ -inyectivo $i = 0, 1, 2, 3, \dots$

II) Además dadas $A \longrightarrow X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_2 \dots$ y $B \longrightarrow Y_0 \longrightarrow Y_1 \dots$ si $f: A \longrightarrow B$ es un morfismo arbitrario, existen morfismos $f_i: X_i \longrightarrow Y_i$ $i = 0, 1, 2, \dots$ haciendo commutativos los cuadrados

Demostración: Supongamos que $A \longrightarrow X_0 \longrightarrow X_1 \dots$ y $A \longrightarrow Y_0 \longrightarrow Y_1 \dots$ son dos Σ -resoluciones inyectivas sobre A . Por el lema anterior podemos considerar Σ -levantamientos de la identidad

$$\begin{array}{ccccccc}
 A & \xrightarrow{\alpha} & X_0 & \xrightarrow{\alpha} & X_1 & \dots & \\
 \updownarrow & & \updownarrow \zeta_0 & & \updownarrow \zeta_1 & & \\
 A & \xrightarrow{\beta} & Y_0 & \xrightarrow{\beta} & Y_1 & \dots &
 \end{array}$$

Los morfismos ζ_0 y η_0 nos garantizan que $X_0 \underset{\Sigma}{\sim} Y_0$. El resultado requerido se sigue de (2-9).

(2-14) Si $A \underset{\Sigma}{\sim} B$ entonces $\Pi_0(X, A)_{\Sigma} = \Pi_0(X, B)_{\Sigma}$ para todo objeto X de la categoría siempre que ésta posea Σ -inyectivos.

(2-15) Si la categoría tiene Σ -inyectivos y si $A \underset{\Sigma}{\sim} B$ entonces $\Pi_0(A, X)_{\Sigma} = \Pi_0(B, X)_{\Sigma}$ para todo objeto X de la categoría.

(2-16) TEOREMA DE EXTENSIÓN. Si \underline{A} es una categoría con Σ -inyectivos entonces dados $\phi : A \longrightarrow B$ y $u : A' \longrightarrow A$, el último monomorfismo, en el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\phi} & B \\
 \uparrow u & & \nearrow \phi' = \phi u \\
 A' & &
 \end{array}$$

Si $\Sigma u \subset \Sigma$ y si existe $\psi' : A' \longrightarrow B/\phi' \underset{\Sigma}{\sim} \psi'$ entonces se verifica la existencia de un morfismo $\psi : A \longrightarrow B$ tal que $\psi u = \psi'$ y $\phi \underset{\Sigma}{\sim} \psi$.

(2-17) TEOREMA DE FACTORIZACIÓN. — Si la categoría tiene Σ -inyectivos, todo homomorfismo $\phi : A \longrightarrow B$ se puede factorizar a través de una Σ -equivalencia de homotopía.

Su demostración es trivial utilizando la noción de Σ -cilindro de morfismo ϕ .

(2-18) Sea \underline{A} una categoría con Σ -inyectivos; si un morfismo $\phi : A \longrightarrow B$ admite una factorización de la forma

$$A \xrightarrow{j_A} A \oplus I \xrightarrow{\phi'} B \oplus J \xrightarrow{\delta_B} B$$

donde j_A es la inclusión, δ_B la proyección, I y J Σ -inyectivos y ϕ' isomorfismo, entonces ϕ es una Σ -equivalencia de homotopía.

En efecto, al ser ϕ' isomorfismo llamemos ψ' a su inverso y construyamos $\psi = \delta_A \psi' j_B$. Probaremos que $\phi = \delta_B \phi' j_A$ y $\psi = \delta_A \psi' j_B$ verifican $\phi \psi \underset{\Sigma}{\sim} 1_B$, $\psi \phi \underset{\Sigma}{\sim} 1_A$, sin más que tener en cuenta la relación $\phi \psi - 1_B = \phi \psi - \delta_B j_B = \delta_B \phi' j_A \delta_A \psi' j_B - \delta_B j_B = \delta_B (\phi' j_A \delta_A \psi' - 1_{B \oplus J}) j_B = \delta_B \phi' (j_A \delta_A - 1_{A \oplus I}) \psi' j_B = \delta_B \phi' (-j_i \delta_i) \psi' j_B$ y su análoga. La afirmación buscada se obtiene de (2-7).

(2-19) Recíprocamente. Sea \underline{A} una categoría exacta con Σ -inyectivos tal que la composición de una flecha mónica con una de Σ de como resultado una flecha de Σ . Si $\phi : A \longrightarrow B$ es una Σ -equivalencia de homotopía, tal que si $(\phi, \lambda, \delta_B)$ es su cilindro λ es mónica, entonces admite una descomposición

$$A \xrightarrow{j_A} A \oplus I \xrightarrow{\phi'} B \oplus J \xrightarrow{\delta_B} B$$

donde j_A es la inclusión, δ_B la proyección, ϕ' isomorfismo e I y J son Σ -inyectivos.

Su demostración se sigue utilizando 18-5 y 19-1 CAP. I [6].

BIBLIOGRAFÍA

- 1 ECKMANN B. — *Homotopía y dualidad*. Colloque de Topologie Algebrique. Junio 1956.
- 2 ECKMANN B. — *Groupes d'homotopie et dualité*. Bull. Soc. Math. France 86 (1958).
- 3 HILTON P. — *Homotopy Theory and duality*. Nelson 1967.
- 4 HILTON P. — *Homotopy theory of modules and duality*. Simp. Mat. de Top. Alg. Mexico (1956), 273-281 (13).
- 5 KLEISLI H. — *Homotopy theory in abelian categories*. Can. J. Math. 14 (1962) 139-169.
- 6 MITCHELL B. — *Theory of categories*. Academic Press. New York and London 1965.