HOMOTOPIA E INYECTIVIDAD

por

JOSÉ R. CARUNCHO CASTRO y CONSTANTINO TOUZÓN PÉREZ

El objeto del presente trabajo es el desarrollo y generalización de las teorías de Homotopía Algebráica, como han sido expuestas por ECKMANN B. (Homotopie et Dualité. Colloque de Topologie Algebrique. Junio 1956) y HILTON P. (Homotopy Theory and Duality. Nelson 1967) mediante la introducción del concepto de Σ-inyectividad (inyectividad respecto a una clase arbitraria de morfismos, Σ). La categoría base basta, en general, que sea aditiva. La teoría clásica resulta al tomar la categoría de R-módulos (o una categoría abeliana arbitraria) y Σ la clase de flechas mónicas.

La primera parte del trabajo está dedicada al estudio del concepto de Σ-inyectividad y al de su dual (Σ-proyectividad) así como al estudio del funtor $\pi_0\ (A, -)$ que en cierto sentido es análogo al funtor grupo de Poincaré de Topología Algebráica. En la segunda parte se introducen las nociones de resoluciones Σ-inyectivas y de Σ-cilindro de un morfismo, estudiandose la existencia de dichas resoluciones con objeto de obtener los teoremas de factorización y extensión de homotopías.

I: Σ-INYECTIVIDAD

Sea $\underline{A}$ una categoría y Σ una clase de morfismo arbitraria.

(1-1) Diremos que un objeto I es *Σ-inyectivo* cuando todo diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "g"'] & B \\ I & \end{tikzcd}$$

con α perteneciente a Σ, puede extenderse a un diagrama commutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[dl, "\bar{g}"] \\ I \end{tikzcd}$$

(1-2) Ejemplos:

i) Si I es Σ-inyectivo y $J \approx I$ entonces J es Σ-inyectivo.

ii) El $\varprojlim$ de una familia de Σ-inyectivos es Σ-inyectivo. En particular el producto de Σ-inyectivos es Σ-inyectivo.

iii) Si A tiene cero, entonces si un producto es Σ-inyectivo lo es cada uno de sus factores.

iv) Si Σ es la clase de flechas mónicas en la categoría de grupos abelianos entonces los objetos Σ-inyectivos son los grupos abelianos divisibles.

v) Si en *Top* consideramos a Σ la clase de las flechas $A \hookrightarrow X$, inclusión de A, subespacio cerrado de X y X normal, entonces los Σ-inyectivos son los espacios topológicos sólidos.

Se obtiene entonces que el producto de grupos divisibles es divisible y que el producto de espacios sólidos es sólido.

(1-3) Si Σ_1 y Σ_2 son clases de morfismos tales que $\Sigma_1 \subset \Sigma_2$ se verifica que Σ_2-inyectivo $\Rightarrow$ Σ_1-inyectivo.

(1-4) Sea Σ una clase de morfismo; un morfismo f se dice *Σ-inyectivamente homotópico* a cero, $f \underset{\Sigma}{\sim} 0$ si todo diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & C \\ B \end{tikzcd} \qquad (\alpha \in \Sigma)$$

puede extenderse a un diagrama commutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[dl, "\bar{f}"] \\ B \end{tikzcd}$$

(1-5) Si $\underline{A}$ es aditiva diremos que f es *Σ-inyectivamente homotópico* a g, $f \underset{\Sigma}{\sim} g$, si $f - g \underset{\Sigma}{\sim} 0$.

(1-6) En las hipótesis de (1-3) se tiene $f \underset{\Sigma_2}{\sim} g \Rightarrow f \underset{\Sigma_1}{\sim} g$.

(1-7) Sean f y g morfismos de $[A, B]$ y h morfismo de $[B, D]$; se verifica que si $f \underset{\Sigma}{\sim} g$ entonces $hf \underset{\Sigma}{\sim} hg$.

(1-8) Diremos que $\underline{A}$ *tiene Σ-inyectivos* cuando para cualquier objeto A en $\underline{A}$ hay un morfismo $\phi : A \to I$, donde ϕ está en Σ y además I es Σ-inyectivo.

(1-9) Sean f y g morfismos de $[A, B]$ tales que $f \underset{\Sigma}{\sim} g$; si h es otro morfismo arbitrario de $[A, B]$ se verifica $f + h \underset{\Sigma}{\sim} g + h$.

(1-10) Sea $\{\phi_i, i \in I\}$ una familia de morfismos tales que $\phi_i \underset{\Sigma}{\sim} 0$ para todo $i \in I$. Si existe $\prod_{i \in I} \phi_i$ y la categoría tiene Σ-inyectivos entonces $\prod_{i \in I} \phi_i \underset{\Sigma}{\sim} 0$.

Basta para ello considerar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[rr, dotted] \arrow[ddl, dotted] & & \overline{X}_i \arrow[ddl, dotted] \\
\Pi X_i \arrow[ur, "u"] \arrow[rr] \arrow[d, "\prod_{i \in I} \phi_i"'] & & X_i \arrow[ur, "\alpha_i"] \arrow[d, "\phi_i"] & \\
\Pi Y_i \arrow[rr] & & Y_i &
\end{tikzcd}$$

donde u es un morfismo arbitrario de Σ y donde $\overline{X}_i$ es el Σ-inyectivo sobre X_i para todo $i \in I$.

(1-11) Sean $\{f\}_{i \in I}$ y $\{g_i\}_{i \in I}$ familia de morfismos en $[X_i, Y_i]$ tales que para todo i, $f_i \underset{\Sigma}{\sim} g_i$. Si $\underline{A}$ tiene Σ-inyectivos se verifica $\prod_{i \in I} f_i \underset{\Sigma}{\sim} \prod_{i \in I} g_i$.

(1-12) Si $\underline{A}$ tiene Σ-inyectivos entonces se verifica que $f \underset{\Sigma}{\sim} g \Rightarrow fk \underset{\Sigma}{\sim} gk$ siendo f y g morfismos en $[A, B]$ y k un morfismo de $[K, A]$.

(1-13) La relación «$\underset{\Sigma}{\sim}$» en $[A, B]$ es de equivalencia y compatible con la composición si la categoría tiene Σ-inyectivos.

(1-14) Un objeto B es Σ-inyectivo si y solo si para todo A y para cualesquiera f, g en $[A, B]$ se tiene $f \underset{\Sigma}{\sim} g$.

(1-15) Teniendo en cuenta (1-14) B Σ-inyectivo si y solo si para cualquier A, $\Pi_0 (A, B)_\Sigma = 0$. Con $\Pi_0 (A, B)_\Sigma$ denotamos al conjunto cociente $[A, B] / \underset{\Sigma}{\sim}$.

(1-16) Si A es Σ-inyectivo entonces $\Pi_0 (A, B)_\Sigma = 0$ para todo objeto B de la categoría.

(1-17) Si para todo objeto B se verifica $\Pi_0 (A, B)_\Sigma = 0$ y la categoría tiene Σ-inyectivos entonces A es Σ-inyectivo.

(1-18) El conjunto $\Pi_0 (A, B)_\Sigma$ posee estructura de grupo abeliano.

(1-19) Existe un funtor $A \xrightarrow{\Pi_0 (A, -)_\Sigma}$ Gab definido por

$$\Pi_0 (A, -)_\Sigma (B) = \Pi_0 (A, B)_\Sigma$$

covariante y aditivo.

Analogamente puede hablarse del funtor $\Pi_0 (-, A)_\Sigma$ si la categoría tiene Σ-inyectivos.

(1-20) Sean A y B objetos en $\underline{A}$. Definimos $\mathrm{Hom}_0 (A, B)_\Sigma = \{f \in \mathrm{Hom}_0 (A, B) / f \underset{\Sigma}{\sim} 0\}$; se obtiene el isomorfismo canónico

$$\tau : \Pi_0 (A, B)_\Sigma \longrightarrow \mathrm{Hom} (A, B) / \mathrm{Hom}_0 (A, B)_\Sigma$$

dado por $\tau [(f)] = f + \mathrm{Hom}_0 (A, B)_\Sigma$.

(1-21) Sean Σ_1 y Σ_2 dos clases de morfismos tales que $\Sigma_1 \subset \Sigma_2$. Existe un morfismo de grupos abelianos

$$\Phi : \Pi_0 (A, B)_{\Sigma_2} \longrightarrow \Pi_0 (A, B)_{\Sigma_1}$$

cuyo núcleo es $\Phi^k = \mathrm{Hom}_0 (A, B)_{\Sigma_1} / \mathrm{Hom}_0 (A, B)_{\Sigma_2}$

(1-22) Dualmente se podrían definir la relación de proyectividad respecto a una clase de morfismos Σ, «$\overset{\Sigma}{\sim}$».

(1-23) Sean Σ_1 y Σ_2 dos clases de morfismos. Supongamos que en la categoría se verifica la equivalencia

$$A \ \Sigma_1\text{-inyectivo} \Leftrightarrow A \ \Sigma_2\text{-proyectivo}.$$

Entonces si la categoría tiene Σ_1-inyectivos y Σ_2-proyectivos se obtiene la siguiente equivalencia $\alpha \underset{\Sigma_1}{\sim} 0 \Leftrightarrow \alpha \overset{\Sigma_2}{\sim} 0$

« $\Rightarrow$ » Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "\alpha"] \\ X \arrow[r, "\varepsilon"'] & B \end{tikzcd}$$

donde ε es un morfismo arbitrario de Σ_2. Como la categoría tiene Σ_1-inyectivo, existe $i : A \longrightarrow I$ en Σ_1 con I Σ_1-inyectivo; por hipótesis $\alpha \underset{\Sigma_1}{\sim} 0$, entonces existe $\bar{\alpha}$ tal que $\bar{\alpha}\, i = \alpha$.

Además I Σ_1-inyectivo $\Leftrightarrow$ I Σ_2-proyectivo lo que nos garantiza la existencia de un morfismo $\chi : I \longrightarrow X$ tal que $\bar{\alpha} = \varepsilon\, \chi$; basta entonces considerar $\chi\, i$ para obtener que $\alpha \overset{\Sigma_2}{\sim} 0$.

« $\Leftarrow$ » Su demostración es dual de la anterior.

(1-24) Si Σ_1 y Σ_2 son dos clases de morfismos y si en la categoría se verifica la equivalencia $\alpha \underset{\Sigma_1}{\sim} 0 \Leftrightarrow \alpha \overset{\Sigma_2}{\sim} 0$ entonces también es cierta la nueva equivalencia A Σ_1-inyectivo $\Leftrightarrow$ A Σ_2-proyectivo.

(1-25) [A Σ_1-inyectivo $\Leftrightarrow$ A Σ_2-proyectivo] $\Leftrightarrow$ [$f \underset{\Sigma_1}{\sim} g \Leftrightarrow f \overset{\Sigma_2}{\sim} g$] siempre que la categoría tenga Σ_1-inyectivos y Σ_2-proyectivos.

II : Equivalencia de Σ-inyectividad

(2-1) Sea $\underline{A}$ una categoría aditiva y Σ una clase arbitraria de morfismos en $\underline{A}$. Dados dos objetos A y B, diremos que A es *Σ-inyectivamente equivalente* a B, $A \underset{\Sigma}{\sim} B$, si y sólo si existen morfismos $\Phi : A \longrightarrow B$ y $\psi : B \longrightarrow A$ / $\Phi\psi \underset{\Sigma}{\sim} 1_B$, $\psi\phi \underset{\Sigma}{\sim} 1_A$.

A los morfismos ϕ y ψ se les llamará *Σ-equivalencias de homotopía*. En particular los isomorfismos son Σ-equivalencias de homotopía.

(2-2) Sea $\underline{A}$ una categoría aditiva con Σ-inyectivos. En el diagrama commutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "w"'] & & B \arrow[dl, "v"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

si dos morfismos son Σ-equivalencias lo es el tercero.

En efecto, si u y v son Σ-equivalencias existen morfismos p y $q \,/\, pu \underset{\Sigma}{\sim} 1_A,\ up \underset{\Sigma}{\sim} 1_B,\ qv \underset{\Sigma}{\sim} 1_B,\ vq \underset{\Sigma}{\sim} 1_C$. Considerando el morfismo pq se tiene $w\,(p\,q) \underset{\Sigma}{\sim} 1_C,\ (p\,q)\,w \underset{\Sigma}{\sim} 1_A$ como fácilmente se comprueba

(2-3) Un objeto A es Σ-inyectivamente equivalente al objeto cero si y sólo si $1_A \underset{\Sigma}{\sim} 0$.

(2-4) $A \underset{\Sigma}{\sim} 0$ si y sólo si todo morfismo de Σ con dominio A es corretracción.

(2-5) Diremos que A es *Σ-contráctil* cuando $A \underset{\Sigma}{\sim} 0$.

(2-6) En una categoría con Σ-inyectivos se verifica la siguiente equivalencia A Σ-contráctil $\Longleftrightarrow$ A Σ-inyectivo.

(2-7) Si la categoría tiene Σ-inyectivos y si f es un morfismo de A en B, se verifica
$f \underset{\Sigma}{\sim} 0 \Longleftrightarrow f$ puede factorizarse a través de algún objeto Σ-inyectivo.

(2-8) Sea $\underline{A}$ una categoría con Σ-inyectivos y productos y $\{A_i\}_{i \in I}$, $\{B_i\}_{i \in I}$ familias de objetos en $\underline{A} / A_i \underset{\Sigma}{\sim} B_i$ para todo $i \in I$. Se verifica que $\prod\limits_{i \in I} A_i \underset{\Sigma}{\sim} \prod\limits_{i \in I} B_i$.

Demostración: Por hipótesis existen morfismos $u_i : A_i \longrightarrow I_i$ en Σ con I_i Σ-inyectivo para todo $i \in I$. De $A_i \underset{\Sigma}{\sim} B_i$ para todo $i \in I$ existen morfismos $\phi_i : A_i \longrightarrow B_i$, $\psi_i : B_i \longrightarrow A_i$ tales que $\psi_i\, \phi_i \underset{\Sigma}{\sim} 1_{A_i}$, $\phi_i\, \psi_i \underset{\Sigma}{\sim} 1_{B_i}$. Por (1-9) existen morfismos χ_i tales que $\chi_i\, u_i = \psi_i\, \phi_i - 1_{A_i}$ para todo $i \in I$. Consideremos ahora los siguientes diagramas commutativos obtenidos por la universalidad del producto

$$\begin{tikzcd}
\prod\limits_{i\in I} A_i \arrow[r, "p_i"] \arrow[d, "\phi"'] & A_i \arrow[d, "\phi_i"] \\
\prod\limits_{i\in I} B_i \arrow[r, "r_i"] \arrow[d, "\psi"'] & B_i \arrow[d, "\psi_i"] \\
\prod\limits_{i\in I} A_i \arrow[r, "p_i"] & A_i
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\prod\limits_{i\in I} A_i \arrow[d, "\psi\phi - 1_{\prod\limits_{i\in I} A_i}"'] \arrow[dr, "(\psi_i \phi_i - 1_{A_i})\, p_i"] & \\
\prod\limits_{i\in I} A_i \arrow[r, "p_i"] & A_i
\end{tikzcd}$$

(donde $\phi = \prod\limits_{i\in I} \phi_i$, $\psi = \prod\limits_{i\in I} \psi_i$) y por la verificación de las relaciones $p_i\,(\psi\phi - 1_{\prod\limits_{i\in I} A_i}) = p_i\,\psi\phi - p_i = \psi_i\, r_i\, \phi - p_i = \psi_i\,\phi_i\, p_i - p_i = (\psi_i\,\phi_i - 1_{A_i})\, p_i$ para todo $i \in I$.

Análogamente podemos hablar de los morfismos $\chi = \prod\limits_{i\in I} \chi_i$, $u = \prod u_i$ verificando las relaciones $p_i\ \chi = \chi_i\, q_i$, $q_i\, u = u_i\, p_i$;

Finalmente teniendo en cuenta el diagrama que a continuación se expone y las relaciones $p_i\,\chi\, u = \chi_i\, q_i\, u = \chi_i\, u_i\, p_i = (\psi_i\,\phi_i - 1_{A_i})\, p_i$ para todo $i \in I$ se obtiene que el triángulo de la izquierda es commutativo:

$$\begin{tikzcd}
\prod\limits_{i\in I} A_i \arrow[dd, "\psi\phi - 1_{\prod\limits_{i\in I} A_i}"'] \arrow[dr, "u"] \arrow[ddrr, "(\psi_i\phi_i - 1_{A_i})\, p_i"] & & \\
& \prod\limits_{i\in I} I_i \arrow[dl, "\chi"] & \\
\prod\limits_{i\in I} A_i \arrow[rr, "p_i"'] & & A_i
\end{tikzcd}$$

Hemos llegado a que $\chi u = \psi \phi - 1_{\underset{i\in I}{\Pi} A_i}$ lo que por (1-2) y (2-7) nos dice que $\psi \phi - 1_{\underset{i\in I}{\Pi} A_i} \underset{\Sigma}{\sim} 0$ y teniendo en cuenta (1-9) que $\phi \psi \underset{\Sigma}{\sim} 1_{\underset{i\in I}{\Pi} A_i}$. Análogamente se demostraría que $\phi \psi \underset{\Sigma}{\sim} 1_{\underset{i\in I}{\Pi} B_i}$, con lo cual la afirmación dada al principio queda totalmente probada.

(2-9) En las hipótesis de (2-8) se verifican las siguientes proposiciones

I) Si I es finito $\underset{i\in I}{\oplus} A_i \underset{\Sigma}{\sim} \underset{i\in I}{\oplus} B_i$ y por consiguiente si $A \underset{\Sigma}{\sim} B$, $A' \underset{\Sigma}{\sim} B'$ se tiene $A \oplus A' \underset{\Sigma}{\sim} B \oplus B'$.

II) $A \underset{\Sigma}{\sim} 0 \Rightarrow A \oplus B \underset{\Sigma}{\sim} B$ para todo objeto B de la categoría.

III) $A \underset{\Sigma}{\sim} O,\ B \underset{\Sigma}{\sim} O \Rightarrow A \oplus B \underset{\Sigma}{\sim} O.$

(2-10) Sea $f: A \longrightarrow B$ un morfismo en una categoría aditiva con Σ-inyectivos y productos finitos; entonces existe un morfismo $\alpha: A \longrightarrow X_0$ de Σ y X_0 Σ-inyectivo; consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} & & A \arrow[dll, "\alpha"'] \arrow[drr, "f"] & & \\ X_0 \arrow[rr, shift right, "v"'] & & X_0 \oplus B \arrow[ll, shift right, "p"'] \arrow[rr, shift left, "q"] & & B \arrow[ll, shift left, "u"] \end{tikzcd}$$

donde por la universalidad del producto existe un único morfismo λ tal que $p\ \lambda = \alpha$ y $q\ \lambda = f$.

A la terna (f, λ, q) se le llama el *Σ-cilindro* de f.

(2-11) Si (f, λ, q) es el cilindro de f, entonces $B \underset{\Sigma}{\sim} X_0 \oplus B$ sin más que considerar el par de morfismos q y u.

(2-12) Lema. I) Si $\underline{A}$ tiene Σ-inyectivos y conúcleos podemos construir para cualquier objeto A de $\underline{A}$ la siguiente serie $A \longrightarrow X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3 \ .....$
donde X_i es Σ-inyectivo $i = 0, 1, 2, 3, ...$

II) Además dadas $A \longrightarrow X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_2 \ ...$ y $B \longrightarrow Y_0 \longrightarrow Y_1 \ ...$
si $f: A \longrightarrow B$ es un morfismo arbitrario, existen morfismos $f_i: X_i \longrightarrow Y_i$ $i = 0, 1, 2, ...$ haciendo commutativos los cuadrados

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[r] \arrow[d, "f_i"'] & X_{i+1} \arrow[d, "f_{i+1}"] \\
Y_i \arrow[r] & Y_{i+1}
\end{tikzcd}$$

Dado A, a la serie obtenida mediante I) se le llamará *Σ-resolución inyectiva* sobre A y al conjunto $\{f_i\}_{i=0,1,2,\ldots}$ lo llamaremos *Σ-levantamiento* del morfismo f.

Demostración: I) Dado A, como la categoría tiene Σ-inyectivos existe un morfismo $\alpha : A \longrightarrow X_0$ de Σ y X_0 Σ-inyectivo. Como la categoría tiene conúcleos existe $\alpha^C : X_0 \longrightarrow X_0^C$. Entonces consideramos el morfismo $\bar{\alpha_0} : X_0^C \longrightarrow X_1$ donde X_1 es un objeto Σ-inyectivo y $\bar{\alpha}_0^C$ es un morfismo de Σ, el cual existe por hipótesis. Ya hemos construido $\bar{\alpha}_0^C\,\alpha^C : X_0 \longrightarrow X_1$. Reiterando el razonamiento se obtiene la Σ-resolución inyectiva buscada.

II) Es trivial sin más que considerar el diagrama que sigue, construido teniendo en cuenta las propiedades universales del conúcleo y la definición de objeto Σ-inyectivo.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha", "\in\Sigma"'] \arrow[dd, "f"'] & X_0 \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, dashed, "f_0"] & & X_1 \arrow[r] \arrow[dd, dashed, "f_1"] & X_2 \arrow[dd, dashed] & \cdots \\
& & \cdot \arrow[ur, "\varepsilon\Sigma"'] \arrow[dd, dashed] & & & \\
B \arrow[r, "\beta", "\in\Sigma"'] & Y_0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y_1 \arrow[r] & Y_2 & \cdots \\
& & \cdot \arrow[ur, "\in\Sigma"'] & & &
\end{tikzcd}$$

(2-13) Sea A una categoría aditiva con conúcleos y Σ-inyectivos y sean (f, λ, q) y (f, μ, q') dos Σ-cilindros de f. Se verifica $X_0 \oplus B \underset{\Sigma}{\sim} Y_0 \oplus B$.

Demostración: Supongamos que $A \longrightarrow X_0 \longrightarrow X_1 \ldots$ y $A \longrightarrow Y_0 \longrightarrow Y_1 \ldots$ son dos Σ-resoluciones inyectivas sobre A. Por el lema anterior podemos considerar Σ-levantamientos de la identidad

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, leftrightarrow] & X_0 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, shift left, "\eta_0"] & X_1 \arrow[d, shift left, "\eta_1"] & \cdots \\ A \arrow[r, "\beta"] & Y_0 \arrow[r, "\beta"] \arrow[u, shift left, "\zeta_0"] & Y_1 \arrow[u, shift left, "\zeta_1"] & \cdots \end{tikzcd}$$

Los morfismos ζ_0 y η_0 nos garantizan que $X_0 \underset{\Sigma}{\sim} Y_0$. El resultado requerido se sigue de (2-9).

(2-14) Si $A \underset{\Sigma}{\sim} B$ entonces $\Pi_0(X, A)_\Sigma = \Pi_0(X, B)_\Sigma$ para todo objeto X de la categoría siempre que ésta posea Σ-inyectivos.

(2-15) Si la categoría tiene Σ-inyectivos y si $A \underset{\Sigma}{\sim} B$ entonces $\Pi_0(A, X)_\Sigma = \Pi_0(B, X)_\Sigma$ para todo objeto X de la categoría.

(2-16) TEOREMA DE EXTENSIÓN. Si $\underline{A}$ es una categoría con Σ-inyectivos entonces dados $\phi : A \longrightarrow B$ y $u : A' \longrightarrow A$, el último monomorfismo, en el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] & B \\ A' \arrow[u, "u"] \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \phi' = \phi\, u$$

Si $\Sigma u \subset \Sigma$ y si existe $\psi' : A' \longrightarrow B/\phi' \underset{\Sigma}{\sim} \psi'$ entonces se verifica la existencia de un morfismo $\psi : A \longrightarrow B$ tal que $\psi u = \psi'$ y $\phi \underset{\Sigma}{\sim} \psi$.

(2-17) TEOREMA DE FACTORIZACIÓN. — Si la categoría tiene Σ-inyectivos, todo homomorfismo $\phi : A \longrightarrow B$ se puede factorizar a través de una Σ-equivalencia de homotopía.

Su demostración es trivial utilizando la noción de Σ-cilindro de morfismo ϕ.

(2-18) Sea $\underline{A}$ una categoría con Σ-inyectivos; si un morfismo $\phi : A \longrightarrow B$ admite una factorización de la forma

$$A \xrightarrow{\ j_A\ } A \oplus I \xrightarrow{\ \phi'\ } B \oplus J \xrightarrow{\ \delta_B\ } B$$

donde j_A es la inclusión, δ_B la proyección, I y J Σ-inyectivos y ϕ'isomorfismo, entonces ϕ es una Σ-equivalencia de homotopía.

En efecto, al ser ϕ'isomorfismo llamemos ψ' a su inverso y construyamos $\psi = \delta_A \, \psi' j_B$. Probaremos que $\phi = \delta_B \phi' j_A$ y $\psi = \delta_A \, \psi' j_B$ verifican $\phi \, \psi \underset{\Sigma}{\simeq} 1_B$, $\psi \phi \, {}_\Sigma 1_A$, sin más que tener en cuenta la relación $\phi \, \psi - 1_B = \phi \, \psi - \delta_B j_B = \delta_B \, \phi' j_A \delta_A \psi' j_B - \delta_B j_B = \delta_B \, (\phi' j_A \, \delta_A \, \psi' - 1_{B \oplus J}) \, j_B = \delta_B \, \phi' \, (j_A \, \delta_A - 1_{A \oplus I}) \, \psi' \, j_B = \delta_B \, \phi' \, (- \, j_i \, \delta_i) \, \psi' \, j_B$ y su análoga. La afirmación buscada se obtiene de (2-7).

(2-19) Recíprocamente. Sea $\underline{A}$ una categoría exacta con Σ-inyectivos tal que la composición de una flecha mónica con una de Σ de como resultado una flecha de Σ. Si $\phi : A \longrightarrow B$ es una Σ-equivalencia de homotopía, tal que si $(\phi, \lambda, \delta_B)$ es su cilindro λ es mónica, entonces admite una descomposición

$$A \xrightarrow{j_A} A \oplus I \xrightarrow{\quad \phi' \quad} B \oplus J \xrightarrow{\delta_B} B$$

donde j_A es la inclusión, δ_B la proyección, ϕ' isomorfismo e I y J son Σ-inyectivos.

Su demostración se sigue utilizando 18-5 y 19-1 Cap. I [6].

BIBLIOGRAFÍA

1 ECKMANN B. — *Homotopía y dualidad*. Colloque de Topologie Algebrique. Junio 1956.

2 ECKMANN B. — *Groupes d'homotopie et dualité*. Bull. Soc. Math. France 86 (1958).

3 HILTON P. — *Homotopy Theory and duality*. Nelson 1967.

4 HILTON P. — *Homotopy theory of modules and duality*. Simp. Mat. de Top. Alg. Mexico (1956), 273-281 (13).

5 KLEISLI H. — *Homotopy theory in abelian categories*. Can. J. Math. 14 (1962) 139-169.

6 MITCHELL B. — *Theory of categories*. Academic Press. New York and London 1965.