INTRODUCTION A LA THÉORIE AXIOMATIQUE DES STRUCTURES

par

J. CHACRON

La théorie que nous proposons est motivée par les divers exemples courants de structure: structure ordinale, algébrique ou topologique. Le cadre commun que nous proposons est celui d'une sous-catégorie de la catégorie des applications munie de produits et certaines propriétés correspondantes aux équivalences associées aux morphismes. Les axiomes que nous choisissons, sont on le verra, assez maniables: leur expression est relativement simple, et leur ensemble constitue un outil puissant puisqu'il permet de retrouver les quatre premiers théorèmes fondamentaux en Algèbre, en Ordre, et en Topologie. C'est pourquoi nous pensons qu'une conception catégorielle des structures est maintenant indispensable aussi bien sur le plan pédagogique que sur le plan scientifique; une particularité d'un type de structure peut à l'aide de ce schéma général donner diverses applications dans d'autres types de structure, et conduire ainsi à la découverte de nouvelles notions algébriques, topologiques ou ordinales. Mais notre travail n'est qu'une introduction à cette conception synthétique de l'Algèbre, de l'Ordre ou de la Topologie, et nous pensons développer dans les années à venir un programme de recherche à propos des structures commutatives, des structures finies, des congruences discrètes, etc.

Bien que certains résultats sont valables indépendament de certains axiomes, nous avons voulu d'emblée donner la liste de toutes les hypothèses qui seront utilisées afin de ne pas alourdir les énoncés de nos propositions, ni de créer de suite une multitude de sous-théories, ni de différencier les trois principales structures: l'Algèbre, l'Ordre et la Topologie.

NOTATIONS

Si $f: E \to E'$ est une application la relation $\mathfrak{I}_f$ est l'ensemble des couples (a, b) tels que $f(a) = f(b)$, c'est bien sûr une équivalence dans E, que nous appellerons l'équivalence associée à f. L'application canonique de E vers $E/\mathfrak{I}_f$ est notée π_f, et l'application de $E/\mathfrak{I}_f$ vers E' qui à la classe $\mathfrak{I}_f(x)$ associe $f(x)$ est désignée par, g_f.

Si $f_i: E \to E_i$ est une famille d'applications pour $i \in I$, le produit de source constante des f_i est l'applications $f: E \to \prod_{i \in I} E_i$ qui à $x \in E$ associe la famille $(f_i(x))_{i \in I}$.

Si $f_i: E_i \to E_i'$ est une famille d'applications pour $i \in I$, le produit de source non constante des f_i est l'application $f: \prod_{i \in I} E_i \to \prod_{i \in I} E_i'$ qui à la famille $(x_i)_{i \in I}$ associe la famille $(f_i(x_i))_{i \in I}$.

Si $f: E \to E'$ est une application, les applications identiques $1_E: E \to E$ et $1_{E'}: E' \to E'$ sont notées respectivement $\beta(f)$ et $\alpha(f)$. Si $g: F \to F'$ est une application telle que $\alpha(f) = \beta(g)$, l'application $f \, o \, g: E \to F'$ est définie par $f \, o \, g(x) = g(f(x))$.

Si $f: E \to E'$ est une application surjective, pour toute équivalence R de $E, f \times f(R)$ est l'ensemble des couples $(f(a), f(b))$ pour $(a, b) \in R$. $(f \times f)^{-1} (R')$ si R' est une équivalence de R', est l'ensemble des couples (a, b) tels que $(f(a), f(b)) \in R$.

On sait que si $f: E \to E'$ est une application surjective, et si g: $E' \to E''$ est une application, que $(f \times f)^{-1} (\mathfrak{I}_g) = \mathfrak{I}_{fog}$.

De même que si $f: E \to E'$ est une application surjective, si $h: E \to E''$ est une autre application de source E telle que $\mathfrak{I}_f \subseteq \mathfrak{I}_h$, alors $f \times f(\mathfrak{I}_h) = \mathfrak{I}_t$ où t est la seule application $E' \to E''$ telle que $f \, o \, t = h$.

§ 1. *Définition d'une espèce de structure et exemples*

Une espèce de structure est une classe T d'applications dont chaque élément est appelé T-morphisme, ou *s' il n' y — a* aucune confusion à craindre, un morphisme, vérifiant les propriétés suivantes:

T-1) Si $f \in T$, $\alpha(f), \beta(f) \in T$.

T-2) Si $f, g \in T$, si $\alpha(f) = \beta(g)$, fog $\in T$.

T-3) Si f: $E \to E'$ est un morphisme, les deux applications π_f: $E \to E/\mathfrak{I}_f$ et $g_f: E/\mathfrak{I}_f \to E'$ sont deux morphismes.

T-4) Si $f_i \colon E \to E_i$ est une famille de morphismes pour $i \in I$, le produit de source constante f des f_i est un morphisme.

T-5) Si $f \colon E \to \prod_{i \in I} E_i$ est un morphisme, les projections $pr_i \colon \prod_{i \in I} E_i \to E_i$ sont pour tout $i \in I$ des morphismes.

T-6 Si $f_i \colon E_i \to E_i'$ est une famille de morphismes pour $i \in I$, le produit de source non constante f des f_i est un morphisme.

T-7) Si $f_i \colon E \to E_i$ est une famille de morphismes pour $i \in I$, telle que la famille des équivalences $(\mathfrak{J}_{f_i})_{i \in I}$ soit totalement ordonnée par l'inclusion, il existe un morphisme $f \colon E \to E'$ tel que:

$$\cup \mathfrak{J}_{fi} = \mathfrak{J}_f .$$

Remarques: 1) Il est facile de montrer que la classe des applications continues entre espaces topologiques, la classe de homomorphismes entre demi-groupes (respec. groupes), (respec. anneaux), (respec. corps), sont des espèces de structures.

2) La classe des applications croissantes entre ensembles ordonnés vérifie les axiomes T-1 à T-6, et nous ne savons pas si T-7 est aussi vérifié. Cependant l'axiome T-7 est automatiquement vérifié pour toute famille finie de morphismes $f_i \colon E \to E_i$ telle que la famille des équivalences $(\mathfrak{J}_{fi})_{i \in I}$ soit totalement ordonnée par l'inclusion.

§ 2. Ier *THÉORÈME D'ISOMORPHISME*

Définition. — Nous dirons qu'un morphisme $f \colon E \to E'$ est un isomorphisme, lorsque f est une application bijective, et si l'application inverse $f^{-1} \colon E' \to E$ est un morphisme.

Dans l'espèce topologique, c'est-à-dire la classe des applications continues, un morphisme $f \colon E \to E'$ qui est bijectif, n'est pas nécessairement un isomorphisme.

Proposition 1. — *Pour tout morphisme $f \colon E \to E'$, $\beta(f)$ et $\alpha(f)$ sont deux isomorphismes. Si f et g sont deux isomorphismes tels que $\alpha(f) = \beta(g)$, alors $f \circ g$ est un isomorphisme. Si $f \colon E \to E'$ est un isomorphisme, $f^{-1} \colon E' \to E$ est un isomorphisme.*

Démonstration

Conséquences immédiate de T-1 et T2.

Définition. — Un morphisme $f: E \to E'$ où f est une application bijective sera appelé un *semi-isomorphisme*.

Il est clair que:

Proposition 2. — *Si f et g sont deux semi-isomorphismes tels que $\alpha(f) = \beta(g)$, alors $f \circ g$ est un semi-isomorphisme.*

Définition. — Nous dirons que E et E' sont T-semi-isomorphes, (respec. T-isomorphes), s'il existe un semi-isomorphisme $f: E \to E'$ (respec. un isomorphisme $f: E \to E'$).

Théorème 1. — *Si $f: E \to E'$ est un morphisme surjectif, $E/\mathfrak{I}_f$ et E' sont semi-isomorphes.*

Démonstration

D'après l'axiome T-3, l'application $g_f: E/\mathfrak{I}_f \to E'$ est un morphisme. Comme f est surjective, g_f est bijectif.

§ 3. II$^{\text{ième}}$ *THÉORÈME D'ISOMORPHISME*

Définition. — Nous dirons que le morphisme $f: E \to E'$ est un *hypermorphisme* si l'application f est surjective, et si pour tout morphisme $g: E \to E'$ tel que $\mathfrak{I}_f \subseteq \mathfrak{I}_g$ il existe un morphisme $h: E' \to E''$ tel que:

$$f \circ h = g.$$

Exemples: 1) Toute application surjective continue et ouverte (respec. fermée) est un hypermorphisme dans l'espece topologique.

2) Tout morphisme surjectif dans les espèces des demi-groupes, des groupes, est un hypermorphisme.

3) Toute application surjective et monotone $f: E \to E'$ est un hypermorphisme si en désignant par 0 et 0′ respectivement les ordres de E et E', on *a*:

$$f \times f(0) = 0'.$$

4) Tout morphisme surjectif entre demi-groupes partiels qui est injectif sur l'ensemble des unités est un hypermorphisme dans cette espèce.

PROPOSITTION 3. — *Si f et g sont deux hypermorphismes tels que $\alpha(f) = \beta(g)$, $f \circ g$ est un hypermorphisme.*

Démonstration

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & E' \arrow[r, "g"] \arrow[dl, "t"] & E'' \arrow[dll, "k"] \\ E''' & & \end{tikzcd}$$

Soit en effet h un morphisme $E \to E'''$ tel que $\mathfrak{J}_h \supseteq \mathfrak{J}_{fog}$. Montrons que $\mathfrak{J}_f \subseteq \mathfrak{J}_h$. Si en effet $f(a) = f(b)$ dans E, alors $g(f(a)) = g(f(b))$, soit $f \circ g(a) = f \circ g\,(b)$, et $h(a) = h(b)$. Comme f est un hypermorphisme, il existe un morphisme t: $E' \to E'''$ tel que $f \circ t = h$. Montrons que $\mathfrak{J}_g \subseteq \mathfrak{J}_t$. Soit à cet effet $g(a') = g(b')$. Il existe $a, b \in E$ tels que $a' = f(a)$, $b' = f(b)$. Par conséquent $f \circ g(a) = f \circ g(b)$, $h(a) = h(b)$, $f \circ t(a) = f \circ t(b)$. Par suite $t(f(a)) = t(f(b))$, et $t(a') = t(b')$. Comme g est un hypermorphisme, il existe un morphisme k: $E'' \to E'''$ tel que $g \circ k = t$. D'où $f \circ g \circ k = f \circ t = h$. Ainsi $(f \circ g) \circ k = h$. D'après T-2, $f \circ g$ est un hypermorphisme.

THÉORÈME 2. — *Si f: $E \to E'$ est un hypermorphisme, l'ensemble des morphismes h: $E \to E''$ tels que $\mathfrak{J}_f \subseteq \mathfrak{J}_h$ est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des morphismes k: $E' \to E''$ de source E'.*

Démonstration

1) Supposons que h: $E \to E''$ soit un morphisme tel que $\mathfrak{J}_f \subseteq \mathfrak{J}_h$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & E' \arrow[dl, "t"] \\ E'' & \end{tikzcd}$$

Puisque f est un hypermorphisme, il existe un morphisme t:$E' \to E''$ tel que $f \circ t = h$. Cette application est bien sûr unique, car si $f' \circ t' = h$, on aurait $f \circ t = f \circ t'$, et du fait que f est surjective, il vient $t = t'$. Associons au morphisme h le morphisme t de source E', et montrons que cette application est injective. Si en effet h' est un autre morphisme $E \to E_1''$, et t' le morphisme tel que $f \circ t' = h'$, et si $t = t'$, il vient $f \circ t = f \circ t'$, soit $h = h'$.

2) Montrons maintenant que notre application $h \to t$ réalise une correspondance biunivoque. Soit en effet $k: E' \to E''$ un morphisme de source E'. D'après T-2, $f \circ k$ est un morphisme. Mais il est clair que $\Im_f \subseteq \Im_{f \circ k}$. Par conséquent il existe un morphisme t tel que $f \circ t = f \circ k$. On a alors la disposition suivante:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & E' \arrow[ddl, "t"] \\
E' \arrow[d, "k"'] & \\
E'' &
\end{tikzcd}$$

Comme $f \circ t = f \circ k$, et que f est une application surjective, il vient $t = k$. Ce qui prouve que l'application $h \to t$ est surjective.

Définition. — Dans E, toute équivalence $\Im_g$ associée à un morphisme $g: E \to E''$ est appelée congruence dans E.

II$^{\text{ième}}$ *THÉORÈME D'ISOMORPHISME. — Si $f: E \to E'$ est un hypermorphisme, l'ensemble des congruences dans E contenant $\Im_f$ est en correspondance biunivoque avec* l'*ensemble des congruences dans E'.*

Démonstration

On sait que l'application $R \to f \times f(R)$ si R est une équivalence dans E contenant $\Im_f$, réalise une correspondance biunivoque entre les équivalences de E contenant $\Im_f$ et les équivalences de E' [(3 — 2)].

Ceci dit, si R est une congruence de E, il existe un morphisme $h: E \to E''$. tel que $\Im_h = R$. Si de plus $\Im_f \subseteq \Im_h$, on sait qu'il existe un morphisme $t: E' \to E''$ tel que $f \circ t = h$, et que $f \times f(R) = \Im_t$. Par conséquent $f \times f(R)$ est une congruence de E'.

Si R' est une congruence de E', il existe un morphisme k: $E' \to E'''$ tel que $\mathfrak{I}_k = R$, et l'on sait que $(f \times f)^{-1}(R') = \mathfrak{I}_{fok}$, et est donc une congruence de E contenant $\mathfrak{I}_f$.

PROPOSITION 4. — *Si h: $E \to E'$ est un hypermorphisme, et si π_h: $E \to E/\mathfrak{I}_h$, et g_h: $E/\mathfrak{I}_h \to E'$ est la décomposition canonique de h, alors g_h est un isomorphisme, et π_h un hypermorphisme.*

Démonstration

Remarquons qu'en premier lieu que si h: $E \to E''$ est un hypermorphisme, la décomposition canonique de g assurée d'après l'axiome T-3 nous montre que g_h: $E/R \to E''$ est un morphisme tel que $\pi_h \; o \; g_h = h$. Mais comme h est un hypermorphisme et que $\mathfrak{I}\pi_h = \mathfrak{I}_h$, il existe un morphisme t: $E'' \to E/R$ tel que $h \; o \; t = \pi_h$. D'où $h \; o \; t \; o \; g_h = h$, et puisque h est surjectif, il vient que l'application inverse de g_h est un morphisme, et que g_h est un isomorphisme.

Prouvons maintenant que π_h est un hypermorphisme. Supposons à cet effet que k: $E \to E''$ est un morphisme tel que $\mathfrak{I}\pi_h \subseteq \mathfrak{I}_k$. Comme $\mathfrak{I}\pi_h = \mathfrak{I}_h$, il existe un morphisme t: $E' \to E''$ tel que $h \; o \; t = k$. Mais $h = \pi_h \; o \; g_h$. D'où $\pi_h \; o \; (g_h \; o \; t) = k$. Ce qui prouve que l'on peut trouver un morphisme $i = g_h \; o \; t$ tel que $\pi_h \; o \; i = k$, et que π_h est un hypermorphisme.

§ 4. *Intersection, produit de congruences*

Rappelons que dans E, une équivalence R est dite congruence s'il existe un morphisme h: $E \to E'$ tel que $\mathfrak{I}_h = R$.

PROPOSITION 5. — *Si $(R_i)_{i \in I}$ est une famille de congruences dans E, $\bigcap_{i \in I} R_i$ est une congruence dans E.*

Démonstration

Par hypothèse il existe une famille de morphismes f_i: $E \to E_i$ telle que $R_i = \mathfrak{I}_{fi}$ pour $i \in I$. D'après T-4, l'application $x \to (f_i(x))_{i \in I}$ est un morphisme $E \to \prod_{i \in I} E_i$. Or il est clair, si f est cette application, que l'on a:

$$\mathfrak{I}_f = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{I}_{fi},$$

ce qui prouve que l'intersection des R_i est une congruence dans E.

Proposition 6. — *Si pour tout $i \in I$, R_i est une congruence dans E_i, le produit $\prod_{i \in I} R_i$ est une congruence dans $\prod_{i \in I} E_i$.*

Démonstration

Pour tout $i \in I$, il existe un morphisme f_i: $E_i \to E_i'$ tel que $R_i = \mathfrak{I}_{fi}$. D'après l'axiome T-6, l'application f: $\prod_{i \in I} E_i \to \prod_{i \in I} E_i'$ est un morphisme. Or il est clair que:

$$\prod_{i \in I} R_i = \mathfrak{I}_f,$$

ce qui prouve que le produit des R_i est une congruence.

Proposition 7. — *Pour tout morphisme f: $E \to E'$ les diagonales respectives de E et de E' sont deux congruences.*

Démonstration

Conséquence inmédiate de $T - 1$.

Proposition 8. — *L'ensemble $C(a,b)$ des congruences de E qui ne contiennent pas un couple (a, b) d'élément de E, est ordonné inductif maximalement.*

Démonstration

Il est clair que $C(a, b)$ contient au moins un élément: Δ_E. Ceci dit soit $(R_i)_{i \in I}$ une famille de congruences de E telle que $(a, b) \notin R_i$, et qui est totalement ordonnée par l'inclusion. D'après l'axiome T-7, il existe un morphisme f: $E \to E''$ tel que:

$$f = \bigcup \mathfrak{I}_{fi}.$$

Ce qui prouve que cette réunion d'équivalences est une congruence de E. Comme $(a, b) \notin R_i$ pour tout $i \notin I$, $(a, b) \notin \mathfrak{I}_f$, et $\mathfrak{I}_f$ est un majorant des R_i dans $C(a, b)$.

§ 5. *Hypercongruences*

Pour étudier les propriétés d'une congruenece associée à un hypermorphisme établissons la proposition:

Proposition 9. — *Si $f: E \to E'$, $g: E \to E''$ sont deux hypermorphismes tels que $\mathfrak{I}_f \subseteq \mathfrak{I}_g$, il existe un hypermorphisme $t: E' \to E''$ tel que $f \circ t = g$.*

Démonstration

$$\begin{tikzcd}
f:\ E \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & E' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "s"] & \\
E'' \arrow[rr, "h"] & & E'''
\end{tikzcd}$$

Puisque f est un hypermorphisme, il existe un morphisme $t: E' \to E''$ tel que $f \circ t = g$. Montrons que t est un hypermorphisme. Soit à cet effet $s: E' \to E'''$ un morphisme tel que $\mathfrak{I}_t \subseteq \mathfrak{I}_s$. Il est clair que $\mathfrak{I}_{fot} \subseteq \mathfrak{I}_{fos}$, et par suite $\mathfrak{I}_g \subseteq \mathfrak{I}_{fos}$. Mais comme g est un hypermorphisme, il existe un morphisme $h: E'' \to E'''$ tel que $g \circ h = f \circ s$ D'où $(f \circ t) \circ h = f \circ s$, par suite $f \circ (t \circ h) = f \circ s$. Mais comme f est surjective, il vient $t \circ h = s$.

Définition. — Une hypercongruence est l'équivalence associée à un hypermorphisme.

Proposition 10. — *Si $f: E \to E'$ est un hypermorphisme, l'ensemble des hypercongruences dans E contenant l'équivalence associée à f est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des hypercongruences de E'.*

Démonstration

$$\begin{tikzcd}
f:\ E \arrow[r] \arrow[d, "t"] & E' \arrow[dl, "h"] \arrow[d, "k"] \\
F & E''
\end{tikzcd}$$

1) Soit R une hypercongruence de E contenant $\mathfrak{I}_f$. Il existe un morphisme $t: E' \to F$ tel que $\mathfrak{I}_t = R$. Comme $\mathfrak{I}_f \subseteq \mathfrak{I}_t$ et que f est un hypermorphisme, il existe un morphisme $h: E' \to F$ tel que $foh = t$. On sait alors que $(f \times f)\ (R) = \mathfrak{I}_h$. Mais comme t est aussi un hypermorphisme, d'après la proposition 9, h est un hypermorphisme, et par conséquent $\mathfrak{I}_h$ est une hypercongruence.

2) Supposons que R' soit une hypercongruence dans E', il existe un hypermorphisme $k: E' \to E''$ tel que $\mathfrak{I}_k = R'$. D'après la proposition 3, $f\ o\ k$ est un hypermorphisme. En outre $(f \times f)^{-1}\ (R') = \mathfrak{I}_{fok}$. Par conséquent $(f \times f)^{-1}\ (R')$ est une hypercongruence dans E.

Remarques: 1) La notion d'hypermorphisme appliquée dans une espèce algébrique (comme par exemple les homomorphismes entre demi-groupes) est triviale: un hypermorphisme est simplement un morphisme surjectif.

2) Dans l'espèce topologique (la classe des applications continues entre espaces topologiques), un morphisme surjectif n'est pas toujours un hypermorphisme. Une application surjective, continue ouverte ou fermée est un hypermorphisme. Mais la notion d'hypermorphisme appliquée dans ce contexte donne une classe d'applications plus générales que les applications continues et ouvertes ou fermées.

3) Dans l'espèce topologique, une équivalence ouverte ou fermée est une hypercongruence, mais une hypercongruence peut ne pas être ouverte ou fermée.

4) L'ensemble des propositions 1 à 10 et des théorèmes 1 et 2 est valable dans une «espèce» de structure qui vérifierait seulement T-1, T-2 et T-3.

§ 6. *Pseudoproduit*

Définition. — Nous dirons que (P, Ψ) est un pseudoproduit d'une famille $(E_i)_{i \in I}$, si: 1) $\Psi: P \to \prod_{i \in I} E_i$ est morphisme injectif.

2) Pour tout $i \in I$, $pr_i\ (\Psi(P)) = E_i$.

Proposition 11. — *Si (P, Ψ) est un pseudoproduit des E_i, si $f: P' \to P$ est un semi-isomorphisme, P' définit un pseudoproduit des E_i.*

Démonstration

L'application $f \circ \Psi$ est évidemment un morphisme injectif. En outre l'on a: $pr_i\,(f \circ \Psi(P')) = pr_i(\Psi(f(P'))) = pr_i\,(\Psi(P)) = E_i$ pour tout $i \in I$.

PROPOSITION 12. — *Si (P, Ψ) est un pseudoproduit des E_i, si chaque E_i est semi-isomorphe à un E_i' par un morphisme f_i, si f est l'application de $\prod_{i \in I} E_i$ vers $\prod_{i \in I} E_i'$ produit de source non constante des f_i, alors $(P, \Psi \circ f)$ est un pseudoproduit des E_i'.*

Démonstration

Du point de vue ensembliste il est facile de prouver que [(3 — 1)]: $pr_i'\,(\Psi \circ f\,(P)) = E_i'$ pour tout $i \in I$, si pr_i' est la projection "i" de $\prod_{i \in I} E_i'$ vers E_i'.

Ceci dit, d'après T-6, l'application f est un morphisme, par conséquent $\Psi \circ f$ est un morphisme, et $(P, \Psi \circ f)$ est un pseudoproduit des E_i'.

THÉORÈME 3. — *Pour que P définisse un pseudoproduit d'une famille $(E_i)_{i \in I}$ il faut et il suffit qu'il existe dans P une famille $(R_i)_{i \in I}$ de congruences telles que:*

$$- \bigcap_{i \in I} R_i = \Delta_p,$$

— pour tout $i \in I$, P/R_i est semi-isomorphe à E_i.

Démonstration

a) Supposons que (P, Ψ) soit un pseudoproduit des E_i. Pour tout $i \in I$, l'application $\Psi \circ pr_i$ est un morphisme surjectif de P vers E_i. Si l'on pose $R_i = \mathfrak{I}_{f \circ pr_i}$, on a:

1) $(a, b) \in \bigcap_{i \in I} R_i$ entraîne $pr_i\,(\Psi(a)) = pr_i\,(\Psi(b))$ pour tour $i \in I$, et par conséquent $\Psi(a) = \Psi(b)$, et comme Ψ est injective, il vient $a = b$.

2) P/R_i, est d'après le théorème 1, semi-isomorphe à E_i.

b) Supposons que les conditions de l'hypothèse sont vérifiées.

Pour tout $i \in I$, il existe un morphisme f_i: $P \to X_i$ tel que $R_i = \mathfrak{I}_{f_i}$. D'après l'axiome T-3, pour tout $i \in I$, l'application canonique π_i: $E \to E/R_i$ est un morphisme. D'après l'axiome T-4, l'application:

$$x \in P,\ x \to (R_i(x))_{i \in I},$$

est un morphisme. Or si Ψ désigne cette application, il est clair que (P, Ψ) est un pseudoproduit des E/R_i. D'après la proposition 12, P définit un pseudoproduit des E_i.

§ 6. *T-ensembles premiers*

Définition. — E est dit T-premier si pour toute famille $(R_i)_{i \in I}$ de congruences dans E telle que $\bigcap_{i \in I} R_i = \Delta_E$, il existe un $i \in I$ tel que $R_i = \Delta_E$.

Proposition 13. — *Si E est T-premier, il existe dans E une plus petite congruence distincte de Δ_E, si Δ_E n'est pas la seule congruence de E.*

Démonstration

Désignons par $(R_i)_{i \in I}$ la famille des congruences de E qui sont distinctes de Δ_E. D'après la proposition 5, $\bigcap_{i \in I} R_i$ est une congruence de E. Si cette congruence est différente de Δ_E, il est clair qu'elle est la plus petite congruence E. Sinon on aurait $\bigcap_{i \in I} R_i = \Delta_E$, et comme E est T-premier, il existe $i \in I$ tel que $R_i = \Delta_E$, ce qui est contraire à la définition des R_i.

Proposition 14. — *E est T-premier si, et seulement si, chaque fois que (E, Ψ) est un pseudoproduit d'une famille $(E_i)_{i \in I}$, il existe un $i \in I$ tel que E et E_i soient semi-isomorphes pour $\Psi \circ pr_i$.*

Démonstration

1) Supposons que E est T-premier, et soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille telle que (P, Ψ) soit un pseudoproduit des E_i. D'après le théorème 3, il existe une famille $(R_i)_{i \in I}$ de congruences (qui sont les équivalences associées aux $\Psi \circ pr_i$) telle que $\bigcap_{i \in I} R_i = \Delta_E$ et E/R_i est semi-isomor-

phe à E_i. Comme E est T-premier, il existe un $i \in I$ tel que $R_i = \Delta_E$, ce qui signifie que Ψ o pr_i est un semi-isomorphisme de E vers E_i.

2) Supposons que E vérifie la condition qui vient d'être démontrée, et soit $(R_i)_{i \in I}$ une famille de congruences dans E telle que $\bigcap_{i \in I} R_i = \Delta_E$. D'après le théorème 3, E est un pseudoproduit des E/R_i. Par conséquent il existe un $i \in I$ tel que E et E_i soient semi-isomorphes par $\Psi o\ pr_i$. Montrons que $R_i = \Delta_E$. Soit à cet effet $(a, b) \in R_i$, on a $\Psi o\ pr_i (a) = \Psi o\ pr_i (b)$, car $R_i(a) = R_i(b)$. Par conséquent $a = b$, et $R_i = \Delta_E$. Ce qui achève la démonstration de notre proposition.

Nous allons maintenant démontrer le:

THÉORÈME 4. — *Tout* E (source d'un morphisme) *définit un pseudoproduit d'une famille de T-ensembles premiers.*

LEMME 1. — *Si* $f: E \to E'$ *est un morphisme pour toute congruence* R' *de* E', $(f \times f)^{-1} (R')$ *est une congruence de* E.

Démonstration

Si en effet R' est une congruence de E', il existe un morphisme $t: E' \to E''$ tel que $\mathfrak{I}_t = R'$. On sait alors que $(f \times f)^{-1} (R')$ est encore l'équivalence $\mathfrak{I}_{fot}$, et par conséquent est une congruence dans E.

LEMME 2. — *Pour tout couple* $a, b \in E$ *tels que* $a \neq b$, *il existe une congruence* R_{ab} *dans* E *telle que* $(a, b) \notin R_{ab}$ et E/R_{ab} *T-premier.*

Démonstration

D'après la proposition 8, l'ensemble $C(a, b)$ des congruences de E qui ne contiennent pas (a, b) est ordonné inductif maximalement. D'après l'axiome du choix soit R_{ab} un élément maximal de $C(a, b)$. Montrons que E/R_{ab} est T-premier. Soit à cet effet $(R_i)_{i \in I}$ une famille de congruences de E/R_{ab} telle que:

$$\bigcap_{i \in I} R_i = \Delta_{E/R_{ab}}.$$

En considérant l'application canonique $\Pi_{ab}: E \to E/R_{ab}$, la famille:

$$(\Pi_{ab} \times \Pi_{ab})^{-1} (R_i) \text{ pour } i \in I,$$

est d'après le lemme 1 une famille de congruences dans E.

Mais en outre,

$$\bigcap_{i \in I} (\Pi_{ab} \times \Pi_{ab})^{-1} (R_i) = R_{ab}.$$

Comme $(a, b) \notin R_{ab}$, il existe au moins un $i \in I$ tel que:

$$(a, b) \notin (\Pi_{ab} \times \Pi_{ab})^{-1} (R_i).$$

Comme $R_{ab} \subseteq (\Pi_{ab} \times \Pi_{ab})^{-1} (R_i)$, et que R_{ab} est une congruence maximale de E ne contenant pas (a, b), il vient:

$$(\Pi_{ab} \times \Pi_{ab})^{-1} (R_i) = R_{ab}, \quad R_i = \Delta_{E/R_{ab}}.$$

Lemme 3. — On a $\bigcap_{a \neq b} R_{ab} = \Delta_E$.

Démonstration

Si en effet (x, y) appartient à l'intersection considérée, et si $x \neq y$ on aurait $(x, y) \in R_{xy}$, ce qui est contraire à la définition de R_{xy}.

Démonstration du théorème 4

Pour tout couple $a, b \in E$ tel que $a \neq b$, désignons par R_{ab} un élément maximal de $C(a, b)$. D'après le lemme 3 et le théorème 3, E définit un pseudoproduit des E/R_{ab}, qui d'après le lemme 2 sont tous des T-ensembles premiers.

§ 7. — *Principe de l'image morphique maximale de type donné*

Nous supposons que L est une sous-classe de T vérifiant les propriétés suivantes:

1) L est composée d'hypermorphismes.

2) Si $f, g \in L$ et $\alpha(f) = \beta(g)$, alors $f \circ g \in L$.

3) Si $f \in L$, $g \in T$ sont tels que $\alpha(f) = \beta(g)$, $\exists\, h \in L$ tel que $\mathfrak{I}_g = \mathfrak{I}_h$.

Il est facile de montrer que dans l'espèce des morphismes entre demi-groupes, les sous-classes suivantes:

— Les morphismes surjectifs entre demi-groupes et bandes (c'est-à-dire demi-groupes idempotents)

— Les morphismes surjectifs entre demi-groupes et demi-groupes commutatifs.

— Les applications continues surjectives entre espaces topologiques et espaces discrets

— Les applications croissantes surjectives entre ensembles ordonnés et ensembles ordonnés discrets.

Revenons au cas général: vérifient les propriétés (1), (2) et (3).

DÉFINITION — Un élément $f\colon E \to E'$ de L est libre si pour tout $g\colon E \to E''$ élément de L, il existe un morphisme $t\colon E' \to E''$ tel que $f \circ t = g$.

REMARQUE. — Si $f\colon E \to E'$ est libre et si $t\colon E' \to E''$ est un élément de L, le fait que f est surjective entraîne qu'il existe une et une seule application $t\colon E' \to E''$ telle que $f \circ t = h$.

PROPOSITION 15. — *Si $f\colon E \to E'$ et $g\colon E \to E''$ sont deux morphismes libres, il existe un isomorphisme k tel que $f = g \circ k$.*

Démonstration

$$\begin{tikzcd} f\colon E \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & E' \arrow[dl, shift right, "t"'] \\ E'' \arrow[ur, shift right, "k"'] & \end{tikzcd}$$

Puisque f est libre, il existe un morphisme $t\colon E' \to E''$ tel que:

$$f \circ t = g.$$

Puisque g est libre, il existe un morphisme $k\colon E'' \to E'$ tel que

$$g \circ k = f.$$

Par conséquent $g \circ (k \circ t) = g$ et $f \circ (t \circ k) = f$.

Comme f et g sont surjectives, il vient $k \circ t = \alpha(g)$ *et* $t \circ k = \alpha(f)$.

Par conséquent k et t sont inverses l'une de l'autre et sont donc deux isomorphismes. En particulier $f = g \circ k$.

Définition. — Lorsqu'un morphisme $f: E \to E'$ est libre, nous dirons que E' est une image morphique maximale de L-type de E.

Remarque. — La proposition 15 nous montre que l'image morphique maximale de L-type de E, si elle existe, est unique à un isomorphisme près.

Définition. — Nous appelons une L-congruence, l'équivalence associée à un morphisme élément de L.

Théorème 5. — *E admet une image morphique maximale de* L-type, *si et seulement si, il existe dans E une plus petite L-congruence.*

Démonstration

1) Supposons que $f: E \to E'$ soit libre. Si R est l'équivalence associées à f, montrons que R est la plus petite L-congruence dans E. Si en effet P est une L-congruence dans E, il existe un morphisme $g: E \to E''$ tel que $g \in L$. Mais il existe aussi un morphisme $t: E' \to E''$ tel que $f \circ t = g$. Ce qui entraîne que $\mathfrak{I}_f \subseteq \mathfrak{I}_{f \circ t} = \mathfrak{I}_g$, et par suite $\mathfrak{I}_f \subseteq \mathfrak{I}_g$, c'est-à-dire que $R \subseteq P$.

2) Supposons que R est la plus petite L-congruence dans E. Il existe un morphisme $f: E \to E'$ élément de L tel que $\mathfrak{I}_f = R$. Soit alors $g: E \to E''$ un autre morphisme élément de L. Comme $\mathfrak{I}_f \subseteq \mathfrak{I}_g$, et par définition de l'hypermorphisme, il existe un morphisme $t: E' \to E''$ tel que $f \circ t = g$.

Théorème 6. — *E admet une image morphique maximale de L-type si et seulement si, toute intersection de L-congruences dans E est une L-congruence..*

Démonstration

1) Si toute intersection de L-congruences dans E est une L-congruence, E admet une plus petite L-congruence, et d'après le théorème 5, E admet une image morphique de L-type maximale.

2) Supposons que $f: E \to E'$ est libre. Démontrons que l'ensemble ordonné des L-congruences dans E est isomorphe à l'ensemble ordonné des congruences dans E'.

Soit à cet effet R une L-congruence dans E. D'après le théorème 5, $\mathfrak{I}_f \subseteq R$. D'après le théorème 2, $(f \times f)\ (R)$ est une congruence dans E'.

Soit maintenant une congruence R' dans E'. Il existe un morphisme $t: E' \to E''$ tel que $\mathfrak{I}_t = R$. Mais d'après la deuxième propriété de définition de L, il existe un morphisme $g: E' \to E'''$ élément de L tel que $\mathfrak{I}_t = \mathfrak{I}_g$. Or $(f \times f)^{-1}\ (R') = \mathfrak{I}_{f \circ t}$. Comme évidemment $\mathfrak{I}_{f \circ t} = \mathfrak{I}_{f \circ g}$, il vient $(f \times f)^{-1}\ (R') = \mathfrak{I}_{f \circ g}$. D'après la première propriété de définition de $L, f \circ g \in L$, et par conséquent $(f \times f)^{-1}\ (R')$ est une L-congruence dans E.

D'après la proposition 6 toute intersection de congruences dans E' est une congruence. Ayant l'isomorphisme de l'ensemble ordonné des congruences de E' avec l'ensemble des L-congruences de E, nous avons démontré le théorème.

Note. — Pendant la correction des épreuves, le professeur B. M. SCHEIN nous a communiqué une résponse à la question posée en [remarque 2, p. 5] en démontrant ainsi que la classe des applications croissantes entre ensembles ordonnés est bien une espèce de structure.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BASTIANI, A.
Théorie des Ensembles, C.D.U., Paris (1970)

[2] BOURBAKI, N.
Eléments de Mathématique, Hermann, Paris (1965)
1) *Théorie des ensembles*, Ch. 4
2) *Topologie générale*, Ch. 1 et 2.

[3] CHACRON, J.
1) *Les trois premiers théorèmes d'isomorphisme fondamentaux*, C.D.U., Paris (1971)
2) *Un Théorème en Algèbre et en Analyse*, Coll. Math., Vol. XX, Fasc. 2, (1969)
3) *Théorie des équivalences discrètes, applications aux espaces semi-connexes ou hyperdiscontinus*, Bull. Soc. Math. Belg. (à paraître).

[4] TAMURA, T. et KIMURA, N.
Existence of greatest decomposition of a semigroup, Ködai, Math. Sem. Rep., Vol 7, p. 83-84 (1955).

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
33, rue Saint-Leu
80 — Amiens