LOS OPERADORES ACOTADOS EN RELACION CON UNA DESCOMPOSICION DE VARIEDADES LINEALES EN EL ESPACIO DE HILBERT

por

PEDRO J. BURILLO LÓPEZ

Consideremos el espacio de HILBERT separable real o complejo H.

Sea A un operador lineal definido en una variedad lineal D densa en H. Desde luego, es un hecho simple que si D se puede expresar como suma directa topológica

$$D = D_1 \oplus D_2 \tag{1}$$

de dos subvariedades D_1 y D_2, entonces A es acotado en D si y sólo si las restricciones de A a D_1 y D_2 son acotadas. El problema que vamos a abordar en este trabajo es estudiar bajo qué condiciones la descomposición (1) se puede asegurar, para caracterizar la acotación del operador en términos de la acotación en las subvariedades de dicha descomposición.

Dixmier (v. [1]) (*) da la definición de variedades en posición simple respecto a una variedad de Julia, definición que extenderemos aquí para variedades cualesquiera:

DEFINICION 1. — *Sea D una variedad cualquiera de H. Diremos que dos variedades lineales cerradas V_1 y V_2 de H forman una pareja en posición simple respecto a D si*

i) $\bar{D} = V_1 \oplus V_2$

ii) $D = (V_1 \cap D) \oplus (V_2 \cap D)$

siendo la *suma* ii *topológica (la de* i *lo es trivialmente, pues V_1 y V_2 son cerradas).*

(*) Los números entre corchetes hacen referencia a la bibliografía.

En un primer paso demostraremos que el problema de la descomposición (1) es equivalente a encontrar dos variedades en posición simple respecto a D.

TEOREMA 1. — *Sea D una variedad lineal densa en H. Entonces es válida la descomposición* (1) *para D sí y solo si existe una pareja de variedades lineales cerradas en posición simple respecto a D.*

Dem.: La condición suficiente es trivial, pues (1) viene expresado por ii). Para demostrar la condición necesaria, sea $D = D_1 \oplus D_2$. Consideremos $\overline{D}_1$ y $\overline{D}_2$. Desde luego, como $\alpha(\overline{D}_1, \overline{D}_2) > 0$ (**) pues $\alpha(D_1, D_2) > 0$, la suma directa $\overline{D}_1 \oplus \overline{D}_2$ es topológica. Además

$$H = \overline{D} = \overline{D_1 \oplus D_2} = \overline{D}_1 \oplus \overline{D}_2. \tag{2}$$

Demostraremos ahora que

$$D = (\overline{D}_1 \cap D) \oplus (\overline{D}_2 \cap D). \tag{3}$$

Sea para ello $\mathbf{x} \in D$. Como $D = D_1 \oplus D_2$, se tiene que

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z} \quad \text{con} \quad \mathbf{y} \in D_1 \subset \overline{D}_1, \quad \mathbf{z} \in D_2 \subset \overline{D}_2,$$

y al ser $\mathbf{y} \in D \wedge \mathbf{z} \in D$ resulta

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z} \quad \text{con} \quad \mathbf{y} \in \overline{D}_1 \cap D, \quad \mathbf{z} \in \overline{D}_2 \cap D.$$

En definitiva se deduce de (2) y (3) que $\overline{D}_1$ y $\overline{D}_2$ están en posición simple respecto de D, c. q. d.

Dixmier, en la obra antes citada demuestra que siempre, para variedades D de Julia se pueden encontrar pares de variedades en posición simple, con lo que según el teorema anterior, el problema de la descomposición (1) queda resuelto favorablemente para el caso de variedades D de Julia.

En lo que sigue, estudiaremos el problema de la descomposición (1) para el caso de variedades en general densas en H.

Dixmier llama núcleo de una variedad lineal a cualquier subvariedad cerrada de infinitas dimensiones contenida en ella. Es obvio que cualquier variedad lineal posee subespacios (cerrados) de dimensión finita. Según ésto, distinguiremos tres casos.

(**) Seguimos la notación de ángulos α y β de DIXMIER (v. [1]).

1. — Caso general.

2. — Caso en que D posee núcleos.

3. — Caso en que los únicos subespacios cerrados de D son los de dimensión finita.

1. — Caso general. Supondremos para fijar ideas que las variedades D_1 y D_2 de la descomposición (1) son ortogonales. En este sentido demostraremos el

TEOREMA 2. — *Sea D una variedad lineal densa en H. La condición necesaria y suficiente para que $D = D_1 \oplus D_2$ es que*

$$\text{i)} \quad P_{\bar{D}_1} D = D_1 \qquad \text{ii)} \quad P_{\bar{D}_2} D = D_2$$

designando con P el operador proyección ortogonal en H.

Dem.:

Condición necesaria. Si $D = D_1 \oplus D_2$ con $D_1 \perp D_2$, según el teorema 1 sabemos que $H = \bar{D}_1 \oplus \bar{D}_2$. Además es claro que $\bar{D}_1 \perp \bar{D}_2$.
Sea $\mathbf{y} \in P_{\bar{D}_1} D$. Entonces existe $\mathbf{x} \in D$ tal que

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z} \in \bar{D}_1 \oplus \bar{D}_2$$

pero al ser $\mathbf{x} \in D$,

$$\mathbf{x} = \mathbf{y}' + \mathbf{z}' \in D_1 \oplus D_2 \subset \bar{D}_1 \oplus \bar{D}_2$$

con lo que

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}' \in D_1$$

luego

$$P_{\bar{D}_1} D \subset D_1 \tag{4}$$

Recíprocamente, sea $\mathbf{y} \in D_1$. Construimos $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z} \in D_1 \oplus D_2$ con $\mathbf{z} \in D_2$ cualquiera. Entonces $x \in D$ y se tendrá

$$\mathbf{x} = \mathbf{y}' + \mathbf{z}' \in \bar{D}_1 \oplus \bar{D}_2$$

con lo que

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}' \in P_{\bar{D}_1} D$$

es decir

$$D_1 \subset P_{\bar{D}_1} D \tag{5}$$

De (4) y (5) se sigue la igualdad i). La demostración de ii) es completamente análoga.

Condición suficiente. Supongamos ahora que D_1 y D_2 son subvariedades ortogonales de D que verifican i) y ii). La evidente ortogonalidad de las clausuras $\bar{D}_1$ y $\bar{D}_2$ permite escribir

$$\bar{D}_1 \subset \bar{D}_2^{\perp} \quad \text{y} \quad \bar{D}_2 \subset \bar{D}_1^{\perp}. \tag{6}$$

Sea pues $\mathbf{x} \in D$. Se tendrá

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z} \in \bar{D}_1 \oplus \bar{D}_1^{\perp}$$
$$\mathbf{x} = \mathbf{y}' + \mathbf{z}' \in \bar{D}_2 \oplus \bar{D}_2^{\perp}$$

de donde por i) y ii) se puede escribir

$$\mathbf{y} = \mathrm{proy}_{\bar{D}_1} \mathbf{x} \in D_1 \tag{7}$$
$$\mathbf{y}' = \mathrm{proy}_{\bar{D}_2} \mathbf{x} \in D_2 \tag{8}$$

Pero de (6) se tiene

$$\mathbf{x} = \mathbf{z} + \mathbf{y} \in \bar{D}_1^{\perp} \oplus \bar{D}_2^{\perp}$$
$$\mathbf{x} = \mathbf{y}' + \mathbf{z}' \in \bar{D}_1^{\perp} \oplus \bar{D}_2^{\perp}$$

de donde $\mathbf{z} = \mathbf{y}' \in D_2$. En definitiva, de (7) y (8) se tiene

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z} \in D_1 \oplus D_2$$

con lo que

$$D = D_1 \oplus D_2 \qquad \text{c. q. d.}$$

2.° Caso en que D posee núcleos.

TEOREMA 3. — *Si V es un núcleo de D, variedad densa, se tiene*

$$D = V \oplus \hat{V}$$

con

$$\hat{V} = D \cap V^{\perp}.$$

Dem.: Por ser V cerrado, se puede escribir $H = V \oplus V^{\perp}$. Siendo $\hat{V} = D \cap V^{\mathsf{T}} \neq \{\mathbf{o}\}$ se verifica que $\alpha(V, \hat{V}) > 0$ con lo que la suma $V \oplus \hat{V}$ es topológica.

Trivialmente, $V \oplus \hat{V} \subset D$. Para ver el contenido inverso, sea $x \in D$ cualquiera, desde luego admitirá la descomposición

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z} \in V \oplus V^{\perp}.$$

Como $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y} \in D$, se tiene $\mathbf{z} \in \widehat{V}$, quedando probado pues que

$$D = V \oplus \widehat{V}.$$

3.^{er} Caso en que los únicos subespacios cerrados de D son los de dimensión finita. Se ha obtenido en este caso el siguiente resultado:

TEOREMA 4. — *Se verifica la descomposición $D = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n] \oplus \widehat{V}$ con $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ ortonormales si y solo si $\widehat{V} = D \cap E$, siendo E un subespacio cerrado de codimensión finita n en H.*

Dem.:

Condición necesaria: Consideremos $\overline{\widehat{V}}$ y sea $H = \overline{\widehat{V}} \oplus \overline{\widehat{V}}^{\perp}$. Según la hipótesis de la condición, se verifica que

$$\alpha([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n], \overline{\widehat{V}}) > 0. \tag{9}$$

Descomponemos ortogonalmente cada uno de los vectores $\mathbf{a}_i$, $i = 1, \dots, n$, y escribimos

$$\mathbf{a}_i = \widehat{\mathbf{a}}_i + \widehat{\mathbf{a}'}_i \in \overline{\widehat{V}} \oplus \overline{\widehat{V}}^{\perp} \qquad i = 1, \dots, n$$

Trivialmente, $\widehat{\mathbf{a}'}_i \neq 0 \ \forall i$, pues $\mathbf{a}_i \notin \overline{\widehat{V}}$ por (9), y además forman un conjunto de vectores linealmente independientes, pues si

$$\sum_1^n \lambda_i \widehat{\mathbf{a}'}_i = 0$$

se tendría

$$\sum_1^n \lambda_i \mathbf{a}_i = \sum_1^n \lambda_i \widehat{\mathbf{a}} \in \overline{\widehat{V}}$$

en contra de (9).

Sea ahora E la variedad complementaria ortogonal del subespacio $[\widehat{\mathbf{a}'}_1, \widehat{\mathbf{a}'}_2, \dots, \widehat{\mathbf{a}'}_n] \subset \overline{\widehat{V}}^{\perp}$. Se tendrá

$$H = [\widehat{\mathbf{a}'}_1, \widehat{\mathbf{a}'}_2, \dots, \widehat{\mathbf{a}'}_n] \oplus E. \tag{10}$$

Desde luego, E es cerrado y codim. $E = n$. Como además los elementos de $\overline{\widehat{V}}$ son ortogonales a $\widehat{\mathbf{a}'}_1, \widehat{\mathbf{a}'}_2, \dots, \widehat{\mathbf{a}'}_n$ se tiene

$$\widehat{V} \subset \overline{\widehat{V}} \subset E$$

de donde

$$\widehat{V} \subset D \cap E. \tag{11}$$

Sea ahora $\mathbf{x} \in D \cap E$. Podemos escribir

$$\mathbf{x} = \widehat{\mathbf{x}} + \widehat{\mathbf{y}} \in [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n] \oplus \widehat{V}$$

pero de

$$\mathbf{x} \in D \cap E \subset E, \quad \widehat{\mathbf{y}} \in E$$

se sigue que

$$\widehat{\mathbf{x}} \in [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n] \cap E.$$

Se podrá tener entonces

$$\widehat{\mathbf{x}} = \sum_1^n \lambda_i \mathbf{a}_i = \sum_1^n \lambda_i \widehat{\mathbf{a}} + \sum_1^n \lambda_i \widehat{\mathbf{a}}'_i \in E$$

y como

$$\sum_1^n \lambda_i \widehat{\mathbf{a}}_i \in E$$

se sigue que

$$\sum_1^n \lambda_i \widehat{\mathbf{a}}'_i = \widehat{\mathbf{x}} - \sum_1^n \lambda_i \widehat{\mathbf{a}}_i \in E$$

que junto con (10) nos asegura que $\lambda_i = 0 \ \forall \ i$ y que por consiguiente $\widehat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$, resultando de ésto que

$$\mathbf{x} = \widehat{\mathbf{y}} \in \widehat{V}$$

con lo que $D \cap E \subset \widehat{V}$, relación que con la (11) demuestran completamente la condición necesaria.

Condición suficiente. Sea ahora E un subespacio cerrado de codimensión finita n en H. Si consideramos $\widehat{V} = D \cap E$, se verifica evidentemente que

$$\widehat{V} \neq \{\mathbf{0}\}$$
$$\widehat{V} \neq D \quad \text{(por densidad)}.$$

Demostraremos que se puede encontrar un sistema $\{\mathbf{a}_i\}_1^n \subset D - \widehat{V}$ de vectores ortonormales tales que

i) $D = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n] \oplus \widehat{V}$ ii) $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n] \cap \widehat{V} = \{\mathbf{0}\}$.

Para demostrar ii) procederemos por inducción: si $n = 1$, E es hiperplano cerrado, existe un vector $\mathbf{a}$ unitario en $D - \widehat{V}$ verificando $[\mathbf{a}] \cap E = \{\mathbf{o}\}$. Supuesta cierta la propiedad para el valor $n - 1$, demostrarémosla para codim $E = n$: Sea para ello $\mathbf{a} \in D - \widehat{V}$, y consideremos el subespacio

$$E' = E \oplus [\mathbf{a}]$$

que es cerrado (v. [2]) y de codimensión $n - 1$ ($\mathbf{a} \notin E$). Por la hipótesis de inducción, existe un sistema ortonormal $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}$ en $D - (D \cap E')$ tal que

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_{n-1}] \cap E' = \{\mathbf{o}\}. \tag{12}$$

Entonces el conjunto de vectores linealmente independientes formado por $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{a}\}$ de $D - \widehat{V}$ verifica

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{a}] \cap E = \{\mathbf{o}\},$$

pues si $\mathbf{c}$ es un vector de la intersección, se tendría

$$\mathbf{c} = \sum_1^{n-1} \lambda_i \mathbf{a}_i + \lambda \mathbf{a} \in E \qquad (\lambda_i \text{ no todos nulos})$$

de donde

$$\sum_1^{n-1} \lambda_i \mathbf{a}_i = - \lambda \mathbf{a} + \mathbf{c} \in [\mathbf{a}] \oplus E = E'$$

en contra de (12). Basta ahora ortonormalizar el sistema de vectores $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{a}\}$ obteniéndose $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ verificando ii).

Para probar i) es preciso demostrar primero que

$$H = E \oplus [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n].$$

En efecto, es sabido que $H = E \oplus E^\perp$. Si $\mathbf{x} \in H$ se puede escribir

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}} \in E \oplus E^\perp$$
$$\mathbf{a}_i = \bar{\mathbf{a}}_i + \bar{\mathbf{y}}_i \in E \oplus E^\perp \qquad i = 1, \ldots, n,$$

en donde $\{\bar{\mathbf{y}}_1, \bar{\mathbf{y}}_2, \ldots, \bar{\mathbf{y}}_n\} \in E^\perp$ son todos no nulos, pues $\mathbf{a} \notin E \quad \forall\, i._i$

Siendo $\dim E^{\perp} = \operatorname{codim} E = n$, los vectores $\{\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{y}}_1, \bar{\mathbf{y}}_2, \ldots, \bar{\mathbf{y}}_n\}$ son linealmente dependientes, pero a su vez los $\bar{\mathbf{y}}_1, \bar{\mathbf{y}}_2, \ldots, \bar{\mathbf{y}}_n$ son independientes, pues si $\sum_1^n \lambda_i \bar{\mathbf{y}}_i = o$, se seguiría que

$$\sum_1^n \lambda_i \mathbf{a}_i = \sum_1^n \lambda_i \bar{\mathbf{a}}_i \in E$$

en contra de ii).

En definitiva se tendrá

$$\bar{\mathbf{y}} = \sum_1^n \beta_i \bar{\mathbf{y}}_i$$

con lo que

$$\mathbf{x} - \sum_1^n \beta_i \mathbf{a}_i = \bar{\mathbf{x}} - \sum_1^n \beta_i \bar{\mathbf{a}}_i \in E$$

luego

$$\mathbf{x} = (\bar{\mathbf{x}} - \sum_1^n \beta_i \bar{\mathbf{a}}_i) + (\sum_1^n \beta_i \mathbf{a}_i) \in E \oplus [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n]$$

es decir

$$H = E \oplus [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n]. \tag{13}$$

Demostremos ya i). Sea $\mathbf{x} \in D$: en virtud de (13) se escribe

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}} \in E \oplus [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n]$$

y al ser $\mathbf{x}$ e $\bar{\mathbf{y}}$ vectores de D, con su diferencia $\bar{\mathbf{x}} \in D \cap E = \widehat{V}$, luego

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}} \in \widehat{V} + [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n]$$

con lo que queda probado que

$$D = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n] + \widehat{V}$$

siendo ésta suma directa algebráica. Para comprobar el carácter de suma directa topológica, veamos que

$$\alpha([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n], \overline{\overline{\widehat{V}}}) > 0.$$

En efecto, si existiera $\mathbf{x} \in [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n] \wedge \mathbf{x} \in \overline{\overline{\widehat{V}}}$, como $\overline{\overline{\widehat{V}}} \subset E$ sería

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n] \cap E \neq \{\mathbf{o}\} \text{ en contra de ii).}$$

En último término, se verifica que

$$D = [\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n] \oplus \widehat{V} \qquad \text{c. q. d.}$$

Una vez estudiado en todos estos casos el problema de la descomposición (1) planteado al principio, se puede caracterizar en cada uno de ellos la acotación de un operador lineal A en su dominio D en términos de acotaciones de las restricciones de A a cada una de las subvariedades de dicha descomposición. Detallaremos aquí ésta caracterización desarrollada únicamente en el tercer caso expuesto, caso que naturalmente es aplicable a cualquier variedad densa. En este sentido, se demuestra el

TEOREMA 5. — *Un operador lineal A definido en una variedad lineal D_A densa en H es acotado en D_A sí y solo si lo es en la intersección de D_A con cualquier subespacio cerrado de codimensión finita en H.*

Dem.: La condición necesaria es trivial. Para demostrar la suficiente, supondremos que A es acotado en $\widehat{D}_A = D_A \cap E$ siendo E cerrado de codimensión finita n en H. En virtud del teorema anterior, se tiene la descomposición

$$D_A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n] \oplus \widehat{D}_A. \tag{14}$$

La hipótesis de la condición suficiente permite asegurar que

$$||A\mathbf{y}|| \leq M\,||\bar{\mathbf{y}}|| \qquad \forall \bar{\mathbf{y}} \in \widehat{D}_A \quad (M \text{ constante fija}).$$

Sea pues $\mathbf{x} \in D_A$: la expresión (14) permite escribir

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}} \in [\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n] \oplus \widehat{D}_A$$

de donde

$$A\mathbf{x} = A\bar{\mathbf{x}} + A\bar{\mathbf{y}}$$

y de aquí

$$||A\mathbf{x}|| \leq ||A\bar{\mathbf{x}}|| + ||A\bar{\mathbf{y}}|| \leq ||A\bar{\mathbf{x}}|| + M\,||\bar{\mathbf{y}}||. \tag{15}$$

Pero las proyecciones de D_A en $[\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n]$ y $\widehat{D}_A$ son continuas luego existen constantes fijas N' y N'' tales que

$$||\bar{\mathbf{x}}|| \leq N' \cdot ||\mathbf{x}||, \quad \text{y,} \quad ||\bar{\mathbf{y}}|| \leq N'' \cdot ||\mathbf{x}||$$

con lo que (15) toma la forma

$$||A\mathbf{x}|| \leq ||A\bar{\mathbf{x}}|| + M N'' \cdot ||\mathbf{x}||. \qquad (16)$$

Ahora bien, como $\bar{\mathbf{x}} \in [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n]$ será $\bar{\mathbf{x}} = \sum_1^n \lambda_i \mathbf{a}_i$ y de aquí

$$A\bar{\mathbf{x}} = \sum_1^n \lambda_i A \mathbf{a}_i,$$

pero al ser

$$||\bar{\mathbf{x}}||^2 = \sum_1^n |\lambda_i|^2 \leq (N' \cdot ||\mathbf{x}||)^2$$

resulta

$$|\lambda_i| \leq N' \, ||\mathbf{x}|| \qquad i = 1 \dots n$$

de donde

$$||A\bar{\mathbf{x}}|| \leq \sum_1^n |\lambda_i| \cdot ||A\mathbf{a}_i|| \leq (N' \sum_1^n ||A\mathbf{a}_i||) \cdot ||\mathbf{x}||$$

resultando pues en (16)

$$||A\mathbf{x}|| \leq (N' \sum_1^n ||A\mathbf{a}_i|| + M N'') \cdot ||\mathbf{x}||, \qquad \forall \mathbf{x} \in D_A$$

Luego A es acotado en D_A, c. q. d.

NOTA BIBLIOGRAFICA

1. — J. DIXMIER: «*Etude sur les variétés et les operateurs de Julia, avec quelques applications*». Bull. Soc. Mat. France 77, pp. 11-101, 1949.

2. — H. H. SCHAEFER: *Topological vector spaces*. Advanced Matem. London 1966.

Departamento de Geometría y Topología
Facultad de Ciencias
Zaragoza