CONEXIONES EN LAS VARIEDADES CASI-PRODUCTO Y FOLIACIONES

por

ENRIQUE VIDAL COSTA

INTRODUCCION

Las conexiones en variedades casi-producto complejas y casi-complejas han sido objeto de numerosos estudios, entre otros por A. Lichnerowicz, D. C. Spencer, I. Vaisman y G. Legrand. En variedades casi-producto reales hay también importantes aportaciones en relación con las conexiones asociadas especialmente debidas a A. G. Walker, T. J. Willmore, K. Yano y B.L. Reinhart. En particular A. G. Walker y T. J. Willmore, estudiaron las propiedades geométricas de las estructuras casi-producto y de las foliaciones relacionándolas con diversos tipos de conexiones lineales deducidas a partir de conexiones simétricas y el tensor de Nijenhuis.

El objetivo fundamental que nos hemos propuesto es estudiar las conexiones que cumplen propiedades en relación con los paralelismos de las distribuciones que determinan la estructura y sus condiciones de integrabilidad, sistematizando estudios de los autores citados anteriormente. El principal resultado es la deducción de conexiones a las que llamamos E y C que conservan muchas de las propiedades de las conexiones introducidas por *A. G.* Walker y T. J. Willmore a las que generalizan. Estudiamos las propiedades de las conexiones E y C, dejando establecida la posibilidad de extender a variedades casi-producto complejas, los teoremas deducidos.(*)

(*) Posteriores a la presentación de la tesis doctoral, cuyo resumen es esta memoria, son los trabajos de R. Bott, Lectures on characteristic clasess and foliations, (Lecture Notes on Math. n.º 279. Springer-Verlag 1972), donde se introducen las «basic connections» y de P. Molino, Classe d'Atiyah d'un feuilletage et connexions transverses projetables (C. R, Ac. Sci. París, 272, (1971), 779-781), en el que se estudian las «connexions traverses et projetables» muy relacionadas con las conexiones especiales que nosotros definimos.

La descomposición de las conexiones asociadas en las conexiones inducidas en las distribuciones, nos facilita el estudio de algunas de estas propiedades.

En el capítulo primero hacemos uso de las operaciones sobre formas diferenciales introducidas por A. Frölicher y *A*. Nijenhuis {1}. Consideramos en una forma general la estructura casi-producto con dos distribuciones complementarias, estructura que representamos por (V, T^1, T^2) y hacemos un estudio detallado de su torsión expresando nuevas condiciones de integrabilidad de la estructura (V, T^1, T^2) enunciadas en el Teorema 2-1.

En el Teorema 3-1 determinamos la condición necesaria y suficiente para que exista foliación en términos de G-estructuras, condiciones equivalentes a las señaladas por S. S. Chern {1} utilizando además condiciones locales.

En el capítulo segundo estudiamos en forma global los distintos paralelismos de distribuciones respecto a conexiones lineales. Definimos operadores sobre 2-formas vectoriales, en particular sobre la 2-forma K que determina la estructura (V, T^1, T^2). Esto nos permite encontrar la expresión de todas las conexiones ∇' que hacen (V, T^1, T^2) paralela. Determinamos la torsión de estas conexiones y la relacionamos con el tensor de la estructura, definido anteriormente.

En el capítulo tercero establecemos nuevas conexiones especiales E y C que generalizan las conexiones L y D de Walker y obtenemos en el Teorema 8-2: «La condición necesaria y suficiente para que una estructura (V, T^1, T^2) sea integrable, es que sea paralela respecto a una E-conexión». En el Teorema 9-1 damos una nueva forma del teorema de Frobenius: «La condición necesaria y suficiente para que una distribución T^1 sea integrable es que sea paralela respecto a una C-conexión».

En el último capítulo estudiamos propiedades de las E y C conexiones obteniendo resultados en relación con la torsión y la curvatura de las C-conexiones mediante la descomposición en conexiones inducidas en las distribuciones que determinan la variedad casi-producto.

Deseo hacer constar mi mayor agradecimiento al Profesor J. L. Viviente por la dirección de esta Tesis y por sus valiosos consejos. El tema me fue propuesto por El Profesor E. Vidal Abascal, Jefe del Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Santiago. Este trabajo ha sido elaborado en este Departamento en el que he encontrado apoyo en todos sus componentes.

CAPITULO I

ESTRUCTURA CASI-PRODUCTO. INTEGRABILIDAD

Recordemos algunas operaciones con formas diferenciables. En general en todo el trabajo entenderemos la diferenciabilidad en el sentido C^∞.

Una s-forma vectorial puede considerarse como un campo tensorial de tipo $(1, s)$. En particular si u y v son campos vectoriales arbitrarios, F y G 1-formas vectoriales y α una 2-forma vectorial, Fu, Gu y $\alpha(u, v)$ son al considerar la contracción nuevos campos vectoriales. Siendo M y L formas vectoriales arbitrarias y ω una forma escalar arbitraria, suponemos conocidas las operaciones, llamadas concomitancias diferenciales $\{M, \omega\}$ y $\{M, L\}$, definidas por Frölicher y Nijenhuis $\{1\}$. Representamos por $\{u, v\}$ el producto corchete ordinario; para 1-formas vectoriales el producto de Nijenhuis $\{F, G\}$ puede definirse por la expresión:

$$\{F, G\}\ (u, v) = \{Fu, Gv\} + \{Gu, Fv\} - G\ \{Fu, v\} - F\ \{Gu, v\} -$$
$$- G\ \{u, Fv\} - F\ \{u, Gv\} + GF\ \{u, v\} + FG\ \{u, v\}.$$

Definimos FG, $F\alpha$, αF y $\alpha \cdot F$:

$$FG\,(u) = F\,(G\,(u)) \qquad F\alpha(u, v) = F(\alpha(u, v))$$
$$\alpha F\,(u, v) = \alpha\,(Fu, v) \qquad \alpha \cdot F\,(u, v) = \alpha\,(u, Fu).$$

1. *Estructura casi-producto real.*

Una estructura casi-producto sobre una variedad diferenciable V es un sistema de distribuciones diferenciables en V, T^α, $\alpha = 1, 2, \ldots, m$, tal que en cualquier punto x de V la suma directa de los elementos de contacto determinados por las distribuciones es igual al espacio tangente.

A la variedad V sobre la que se define una estructura casi-producto, la denominamos *variedad casi-producto*.

Todo campo vectorial u admite una única descomposición $u = \sum_{\alpha} u_\alpha$ y *proyectores* P_α, 1-formas vectoriales, tales que $P_\alpha u = u_\alpha$. Estos proyectores satisfacen

$$P_\alpha P_\alpha = P_\alpha, P_\alpha P_\beta = 0, \sum_{\alpha} P_\alpha = I \ (\alpha \neq \beta; \alpha, \beta = 1, ..., m),$$

siendo I la 1-forma vectorial identidad.

Los proyectores determinan la estructura casi-producto. En el caso $m = 2$ consideraremos pues, dos distribuciones complementarias T^1 y T^2, de dimensiones p y $q = n - p$, tal que para todo x arbitrario perteneciente a V

$$T_x = T_x^1 + T^2_x$$

Representaremos esta estructura por (V, T^1, T^2).

Utilizando coordenadas locales se determinan fácilmente las matrices de los proyectores P y Q.

A partir de P y Q podemos definir una 1-forma vectorial $K = P - Q$ tal que $K^2 = I$. Sus valores propios son $+1$ y -1.

Recíprocamente, dada la variedad V y la 1-forma vectorial K sobre T tal que $K^2 = I$ queda determinada la estructura (V, T^1, T^2) tomando $P = 1/2(I + K), Q = 1/2(I - K)$.

Ejemplos generales de estructura casi-producto son estudiados por Reinhart {1}.

2. *Integrabilidad de* (V, T^1, T^2).

La torsión de la estructura casi-producto es un tensor de tipo (1, 2) definido por

$$N = 1/2\,(P\{P, P\} + Q\,\{Q, Q\})$$

De la definición de producto de Nijenhuis deducimos $\{P, P\} = \{Q, Q\}$, $\{P, Q\} = -\{P, P\}$ y $\{P, Q\} = \{Q, P\}$, y teniendo en cuenta $K = P - Q$, $P + Q = I$,

$$N = 1/2\ \{P, P\} = 1/2\ \{Q, Q\} = -1/2\ \{P, Q\} = 1/8\ \{K, K\}. \qquad (I,1)$$

Llamaremos tensor torsión de una distribución T^1 ó T^2 en (V, T^1, T^2) a N_{T^1} ó N_{T^2} respectivamente, definidos por

$$N_{T^1} = 1/2\, Q\{P, P\} \quad , \quad N_{T^2} = 1/2\, P\{P, P\}.$$

Para que T^1 sea integrable, $\{Pu, Pv\} \in T^1$, puesto que

$$\{P, P\}\,(u, v) = \{Pu, Pv\} + P\,\{u, v\} - P\{Pu, v\} - P\{u, Pv\},$$

la condición necesaria y suficiente es

$$Q\{Pu, Pv\} = 0 <===> N_{T^1} = 0.$$

Para que (V, T^1, T^2) sea integrable, es decir, para que lo sean ambas distribuciones, la condición necesaria y suficiente es que el tensor torsión N sea nulo.

Es conocido, Frölicher y Nijenhuis {1}, que la expresión $\{I, \omega\}$ puede ser tomada como definición de diferencial exterior d. Definimos en (V, T^1, T^2) para formas escalares ω los operadores ∂ y $\bar{\partial}$, $\partial\omega = \{P, \omega\}$, $\bar{\partial}\omega = \{Q, \omega\}$, que forman una descomposición de la diferencial exterior. Siendo M una forma vectorial, definimos el operador $DM = \{Q, M\}$.

TEOREMA 2-1

Las condiciones siguientes expresan la condición de integrabilidad de la estructura (V, T^1, T^2) y son equivalentes entre sí:

a) $N = 0$

b) $\partial^2 = 0 \qquad <===> \quad \bar{\partial}^2 = 0$

c) $D^2 = 0$

DEMOSTRACION:

Tendremos en cuenta las identidades, demostradas en A. Nijenhuis {1},

$$\{P, \{P, \omega\}\} = 1/2\,\{\{P, P\}, \omega\}$$
$$\{Q, \{Q, \omega\}\} = 1/2\,\{\{Q, Q\}, \omega\}$$
$$\{P, \{P, M\}\} = 1/2\,\{\{P, P\}, M\}.$$

Deducimos

$$\partial^2 = \{P\{P, \omega\}\} = 1/2 \ \{\{P, P\}, \omega\} = \{N, \omega\}$$

$$\bar{\partial}^2 = \{Q\{Q, \omega\}\} = 1/2 \ \{\{Q, Q\}, \omega\} = \{N, \omega\}$$

$$D^2 M = \{Q \{Q, M\}\} = 1/2 \ \{\{Q, Q\}, M\} = \{N, M\}$$

La anulación de una de las anteriores expresiones es equivalente- a que las otras sean nulas.

Estas condiciones fueron establecidas para estructuras casi-complejas. En la forma a) fue establecida por Eckmann y Frölicher {1} b) por Spencer {1} y c) por Frölicher y Nijenhuis {1}.

Cuando la estructura es integrable los operadores ∂, $\bar{\partial}$ y D permiten definir clases de cohomología, La cohomología de Dolbeault se deduce considerando el operador $\bar{\partial}$ y la GLA-cohomología. (la notación corresponde a las iniciales de «Graded Lie Algebra») considerando el operador D. Pueden encontrarse resultados análogos sobre cohomología para estructuras casi-producto.

3. *G-estructura e integrabilidad.*

La existencia de los proyectores P y Q permite elegir referencias adaptadas, y se prueba que es equivalente a la reducción del grupo estructural del fibrado tangente al subgrupo

$$\begin{pmatrix} GL\,(p, \mathbf{R}) & 0 \\ 0 & GL\,(q, \mathbf{R}) \end{pmatrix}$$

TEOREMA 3-1

La condición necesaria y suficiente para que una distribución T^1 definida en una variedad V sea integrable (exista foliación) es que el grupo estructural del fibrado tangente pueda reducirse a la forma

$$G = \begin{pmatrix} GL\,(p, \mathbf{R}) & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$$

y que las matrices elementos del grupo G sean las matrices de los jacobianos de las transformaciones de coordenadas.

DEMOSTRACION:

Si existe foliación, sean U_1 y U_2 dos abiertos llanos respecto a la misma tales que $U_1 \cap U_2 \neq \phi$, y dos sistemas de coordenadas $(x^1, \ldots, x^p, y^{p+1}, \ldots, y^n)$ y $(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^p, \bar{y}^{p+1}, \ldots, \bar{y}^n)$.

La condición de ser foliación es equivalente a que la transformación de coordenadas está determinada por expresiones de la forma (Haefliger {1}):

$$x^a = x^a(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^p) \tag{I.2}$$

$$y^s = y^s(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^p, \bar{y}^{p+1}, \ldots, \bar{y}^n)$$

$$a, b = 1, 2, \ldots, p. \quad s, t = p+1, p+2, \ldots, n. \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

De $(I, 2)$ deducimos que sus matrices jacobianas son:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^b} & 0 \\ \dfrac{\partial y^s}{\partial \bar{x}^b} & \dfrac{\partial y^s}{\partial \bar{y}^t} \end{pmatrix} \tag{I.3}$$

Recíprocamente si podemos determinar entornos llanos con cambios de coordenadas tales que sus jacobianos sean de la forma $(I, 3)$, se deduce $(I, 2)$ que es equivalente a que exista foliación.

OBSERVACION:

Que sean jacobianas estas matrices es equivalente a las condiciones locales que S. S. Chern {1} añade a la G-estructura para que determine una foliación.

En el caso en que (V, T^1, T^2) sea integrable, podemos elegir coordenadas tales que el cambio de cartas sea de la forma

$$x^a = x^a(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^p)$$

$$y^s = y^s(\bar{y}^{p+1}, \ldots, \bar{y}^n)$$

La integrabilidad de (V, T^1, T^2) es equivalente a que la matriz del cambio de referencias sea de la forma

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^b} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial y^s}{\partial \bar{y}^t} \end{pmatrix}$$

Es decir, las matrices de los cambios de referencias coinciden con las matrices jacobianas de las transformaciones.

4. *Estructura casi-producto compleja.*

Sea $T_x^{\mathbf{C}}$ el complexificado del espacio tangente T_x en un punto x arbitrario de la variedad V de dimensión n, y sea $T^{\mathbf{C}} = T \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ el complexificado del fibrado tangente T a V.

Una estructura casi-producto compleja está definida sobre V dando dos campos de subespacios complementarios de $T_x^{\mathbf{C}}$, $T_x^{\mathbf{C}1}$ y $T_x^{\mathbf{C}2}$ de dimensiones p y q tales que $p + q = n$.

Análogamente a su definición en el caso de la estructura casi-producto real, se define un tensor torsión N(G. Legrand {1}). Al definir una estructura casi-producto compleja, se obtiene una reducción del grupo estructural $GL(n, \mathbf{C})$ a otro de la forma $GL(p, \mathbf{C}) \times GL(q, \mathbf{C})$ en el fibrado tangente $T^{\mathbf{C}}$ y por tanto una G-estructura.

Para definir la *variedad casi-producto compleja más general* comenzaremos siguiendo a Walker {4} definiendola mediante una 1-forma vectorial H tal que

$$H = \sum_{\alpha} \omega_\alpha P_\alpha \qquad \alpha = 1, \ldots, m$$

siendo $\omega_1, \ldots, \omega_m$ las m raices de la unidad y tal que

$$H^m = I.$$

Si los proyectores P_α son reales se tiene la estructura casi producto real, si son complejos todos o parte de ellos se deduce que todas o parte de las distribuciones son complejas. Las distribuciones T^1, $T^2, \ldots, T^m$ están determinadas por los subespacios invariantes de H. En todos los casos dar esa forma es equivalente a dar una 1-forma vectorial en el complexificado de manera natural y por tanto determina una estructura casi producto compleja generalizada. La forma H dada en el complexificado comprende como caso particular las formas dadas por Walker.

El tensor torsión se define por

$$N = 1/2 \sum P_\alpha \{P_\alpha, P_\alpha\}$$

Definiendo la integrabilidad de la estructura cuando toda distribución de la estructura es integrable, se deduce que deben de ser integrables las distribuciones básicas T_α y sus sumas parciales $T_\alpha + T_\beta$, obteniendo las condiciones

$$\{P_\alpha, P_\beta\} = 0 \qquad \alpha, \beta = 1, \dots, m$$

Estas condiciones necesarias y suficientes para la integrabilidad se reducen a $N = 0$, es decir, la anulación del tensor torsión.

CAPITULO II

PARALELISMOS DE DISTRIBUCIONES RESPECTO A CONEXIONES LINEALES

La existencia de conexiones lineales definidas en variedades diferenciables en las que existen sistemas de distribuciones disjuntas que cumplan determinadas condiciones de integrabilidad o paralelismo, respecto a estas conexiones, ha sido estudiada entre otros por Walker {1} y Willmore {1}. El siguiente teorema ha sido demostrado por Kobayashi {1}: «Si V admite un número arbitrario de distribuciones disjuntas, siempre podemos encontrar una conexión lineal tal que las distribuciones sean paralelas».

También fue probado (Walker {2}) que dada una distribución integrable existe una conexión simétrica que la hace paralela y recíprocamente que una distribución paralela respecto a una conexión simétrica, es integrable.

Dado un sistema de distribuciones, Walker llama sistema integrable si toda suma de distribuciones es integrable. Con esta definición, Willmore {2} ha probado que dado un sistema de distribuciones integrable, existe globalmente sobre la variedad una conexión simétrica respecto a la cual el sistema es paralelo.

Así pues en todo lo que sigue admitimos la existencia de conexiones que hacen las distribuciones paralelas, y que si el sistema es integrable existe una conexión simétrica que lo hace paralelo.

5. *Definiciones de paralelismos de distribuciones respecto a una conexión lineal.*

Sean G un campo de tensores y ∇ una conexión lineal definidos en una variedad V. Representamos por ∇G la derivación covariante de G respecto a ∇.

En la estructura casi-producto (V, T^1, T^2) con las operaciones definidas queda determinado un campo tensorial $a(\nabla)$ de tipo (1,2) por la expresión

$$a(\nabla) = P(\nabla P) + Q(\nabla Q)$$

Teniendo en cuenta, $P = 1/2\,(I + K)$, $Q = 1/2\,(I - K)$ y la linealidad de la conexión, $a\,(\nabla)$ puede expresarse en la forma

$$a\,(\nabla) = 1/2\,K\,(\nabla K) \tag{II.1}$$

Deducimos

$$\nabla P = -\nabla Q = Pa\,(\nabla) - Qa\,(\nabla)$$

$$Pa\,(\nabla) = a\,(\nabla) \cdot Q \quad , \quad Qa\,(\nabla) = a\,(\nabla) \cdot P$$

$$Qa\,(\nabla) \cdot Q = 0 \quad , \quad Pa\,(\nabla) \cdot P = 0$$

Una distribución T^1 es paralela respecto a una conexión lineal ∇, si se verifica que dado un campo de vectores u en T^1 y otro campo de vectores v arbitrario, el campo derivada covariante de u respecto a v está en T^1. La condición de paralelismo de T^1 es

$$Q\nabla_v\,(Pu) = 0 \qquad <===> \qquad a\,(\nabla) \cdot P = 0.$$

La estructura (V, T^1, T^2) decimos que es paralela respecto a una conexión si y solo si lo son T^1 y T^2.

La condición necesaria y suficiente para que T^1 y T^2 sean paralelas respecto a ∇ es $\nabla K = 0$.

T^1 es paralela por caminos respecto a ∇ si el sistema de curvas autoparalelas determinadas por los campos en T^1 es un sistema de curvas integrales de T^1. Sea τ el operador transposición, tal que

$$\tau a\,(\nabla)\,(u, v) = a\,(\nabla)\,(v, u)$$

La condición necesaria y suficiente para que T^1 sea paralela por caminos respecto a ∇ es

$$a\,(\nabla)\,P \cdot P + \tau a\,(\nabla)\,P \cdot P = 0$$

Un campo de vectores u es paralelo relativo a un campo de vectores v respecto a una conexión ∇ si para todo punto x de V al desplazar paralelamente u_x a lo largo del campo v sigue en u. Una distribución T^1 es paralela relativa a T^2 respecto a una conexión ∇ si lo son los campos de T^1 respecto a los de T^2.

La condición necesaria y suficiente para que T^1 sea paralela relativa a T^2 respecto a una conexión ∇ es

$$Q \nabla_{Qv} Pu = 0 \quad <====> \quad Q\,(\nabla P)\, Q = 0 \quad <====> \quad a\,(\nabla)\, Q \cdot P = 0$$

Deducimos de las anteriores relaciones que, la condición necesaria y suficiente para que T^1 y T^2 sean paralelas relativas una con respecto a la otra, y ambas paralelas por caminos con respecto a una conexión arbitraria ∇, es

$$a\,(\nabla) + \tau a\,(\nabla) = 0 \tag{II,2}$$

Diremos que la distribución T^1 es autoparalela si es paralela relativa a sí misma. La condición es

$$Q\,(\nabla P) \cdot P = 0 \quad <====> \quad a\,(\nabla)\, P \cdot P$$

6. *Operadores sobre 2-formas vectoriales asociados a K.*

Sea $\mathfrak{A}$ el espacio de 2-formas vectoriales definidas sobre la variedad V. A partir de K podemos definir dos operadores K_1, K_2, sobre tales formas. Sea α un elemento arbitrario de $\mathfrak{A}$ y u, v, campos arbitrarios de vectores tangentes de V. Definimos:

$$K_1\,\alpha = K\,\alpha \cdot K \quad <====> \quad (K_1\,\alpha)\,(u, v) = K\,\alpha\,(u, Kv)$$
$$K_2\,\alpha = K\,\alpha\,K \quad <====> \quad (K_2\,\alpha)\,(u, v) = K\,\alpha\,(Ku, v)$$

Definamos cuatro operadores p_1, p_2, q_1, q_2 sobre elementos de $\mathfrak{A}$

$$p_1 = 1/2\,(I + K_1) \qquad p_2 = 1/2\,(I + K_2)$$
$$q_1 = 1/2\,(I - K_1) \qquad q_2 = 1/2\,(I - K_2)$$

Al aplicar p_1 a los elementos de $\mathfrak{A}$ definimos un subespacio $\mathfrak{A}_{p_1}$. Analogamente al aplicar p_2, q_1, q_2 definimos $\mathfrak{A}_{p_2}$, $\mathfrak{A}_{q_1}$, $\mathfrak{A}_{q_2}$. Las composiciones $p_1\,p_2$, $p_1\,q_2$, $q_1\,p_2$, $q_1\,q_2$; definen cuatro subespacios de $\mathfrak{A}$ tal que

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{p_1p_2} \oplus \mathfrak{A}_{p_1q_2} \oplus \mathfrak{A}_{q_1p_2} \oplus \mathfrak{A}_{q_1q_2}$$

Es decir,

$$\alpha = p_1\,p_2\,\alpha + p_1\,q_2\,\alpha + q_1\,p_2\,\alpha + q_1\,q_2\,\alpha$$

Consideraremos las composiciones de τ con K_1, K_2, como operadores sobre los elementos de $\mathfrak{A}$.

Deducimos,

$$\tau K_1 = K_2 \tau,\ \tau K_2 = K_1 \tau.$$

$$\tau \mathfrak{A}_{p_1 p_2} = \mathfrak{A}_{p_1 p_2},\ \tau \mathfrak{A}_{q_1 q_2} = \mathfrak{A}_{q_1 q_2}, \tag{II,3}$$

$$\tau \mathfrak{A}_{p_1 q_2} = \mathfrak{A}_{q_1 p_2},\ \tau \mathfrak{A}_{q_1 p_2} = \mathfrak{A}_{p_1 q_2}$$

7. *Conexiones que hacen* (V, T^1, T^2) *paralelas.*

PROPOSICION 7-1

Todas las conexiones ∇' *que hacen paralela* (V, T^1, T^2) *pueden expresarse en función de una conexión* ∇ *simétrica en la forma*

$$\nabla' = \nabla - 1/2\,(\nabla K)\cdot K + \beta \quad , \quad \beta \,\varepsilon\, \mathfrak{A}_{p_1} \tag{II,4}$$

DEMOSTRACION:

Sea $\nabla' = \nabla + \alpha$, siendo ∇ una conexión simétrica arbitraria y $\alpha \,\varepsilon\, \mathfrak{A}$. Al aplicar ∇' a K deducimos $\nabla' K = \nabla K + (\alpha, K)$ Calcularemos (α, K). Sean u, v campos vectoriales arbitrarios,

$$\nabla_u (Kv) = (\nabla_u K)\, v + K (\nabla_u v),$$

$$\nabla_u' (Kv) = (\nabla_u' K)\, v + K (\nabla_u' v)$$

Restandolas y teniendo en cuenta $\alpha = \nabla - \nabla'$,

$$\alpha (u, Kv) = (\nabla_u' K - \nabla_u K)\, v + K (\alpha (u, v))$$

$$\alpha \cdot K = \nabla' K - \nabla K + K\alpha \quad , \quad (\alpha, K) = \alpha \cdot K - K$$

Por hacer ∇' paralela (V, T^1, T^2), $\nabla' K = 0$,

$$-\nabla K = \alpha \cdot K - K\alpha, \quad -(\nabla K)\cdot K = \alpha \cdot KK - (K\alpha)\cdot K = \alpha - (K\alpha)\cdot K$$

$$-1/2\,(\nabla K)\cdot K = 1/2\,(I - K_1)\,\alpha = q_1\,\alpha.$$

Las soluciones de α, por ser q_1 y p_1 complementarios son de la forma (II, 4).

PROPOSICION 7-2

Podemos descomponer α en la forma siguiente.

$$\alpha = 1/4\,((\nabla K)\cdot K + (\nabla K)\,K) + \omega_1 + \omega_2 + u,$$

siendo

$$-\,1/4\,((\nabla K)\cdot K) + (\nabla K)\,K)\ \varepsilon\,\mathfrak{A}_{q_1q_2},\ \omega_1\ \varepsilon\,\mathfrak{A}_{p_1p_2},\ \omega_2\ \varepsilon\,\mathfrak{A}_{p_1q_2}$$

$$u\ \varepsilon\,\mathfrak{A}_{q_1p_2}.$$

DEMOSTRACION:

$$K\nabla K = -\,(\nabla K)\cdot K$$

Puesto que, para u y v arbitrarios,

$$\nabla_u v = \nabla_u (K\,(Kv)) = (\nabla_u K)\,K\,v + K\,\nabla_u (Kv) =$$

$$= (\nabla_u K)\,K\,v + K\,(\nabla_u K)\,v + \nabla_u v.$$

De la proposición anterior deducimos

$$q_1\,q_2\,\alpha = 1/2\,(I - K_2)\,(-\,1/2\,(\nabla K)\cdot K) = -\,1/4\,((\nabla K)\,K + (\nabla K)\cdot K).$$

Análogamente calculamos $u = q_1\,p_2\,\alpha$. Descomponemos $\beta\ \varepsilon\,\mathfrak{A}_{p_1}$ en $\beta = \omega_1 + \omega_2$.

PROPOSICION 7-3

Sea $Tor_{\nabla'}$, la torsión de las conexiones ∇' tal que $\nabla' K = 0$

$$Tor_{\nabla'}\,(u, v) = \alpha\,(u, v) - \alpha\,(v, u)$$

DEMOSTRACION:

Por estar ∇' definida por $\nabla' = \nabla + \alpha$ siendo simétrica obtenemos

$$\mathrm{Tor}_{\nabla'}\,(u, v) = \nabla_u'\,v - \nabla_v'\,u - \{u, v\} =$$

$$= \nabla_u v - \nabla_v u - \{u, v\} + \alpha (u, v) - \alpha (v, u) = \alpha (u, v) - \alpha (v, u).$$

Sea $\tilde{a} = 1 - \tau, \qquad \mathrm{Tor}_{\nabla'} = \alpha - \tau\alpha = \tilde{a}\alpha.$ (II, 6)

TEOREMA 7-1

El tensor torsión de todas las conexiones que hacen K paralela tiene la misma componente en $\mathfrak{A}_{q_1 q_2}$.

$$q_1\, q_2\, Tor_{\nabla'} = -1/4\, (\tilde{a}\, (\nabla K) \cdot K + \tilde{a}\, (\nabla K)\, K)$$

DEMOSTRACION:

De (II, 3) y las proposiciones 7-2 y 7-3 deducimos

$$\mathrm{Tor}_{\nabla'} = \tilde{a}\,\alpha = -1/4\, \tilde{a}\, ((\nabla K) \cdot K + (\nabla K)\, K) + \omega_1 - \tau\, \omega_1 + w_2 - \tau\, \omega_2 + u - \tau u.$$

$$-1/4\, ((\nabla K) \cdot K + (\nabla K)\, K)\ \varepsilon\ \mathfrak{A}_{q_1 q_2},\ \omega_1 - \tau\, \omega_1\ \varepsilon\ \mathfrak{A}_{p_1 p_2}$$

$$\tau u + \omega_2\ \varepsilon\ \mathfrak{A}_{p_1 q_2}\quad u - \tau\, \omega_2\ \varepsilon\ \mathfrak{A}_{q_1 p_2}$$

TEOREMA 7-2

La componente en $\mathfrak{A}_{q_1 q_2}$ *del tensor torsión de las conexiones* ∇' *que hacen K paralela es el tensor torsión de la estructura cambiado de signo.*

DEMOSTRACION:

De la definición de torsión de la estructura, (I, 1),

$$N\, (u, v) = 1/4\, (\{Ku, Kv\} - K\{Ku, v\} - K\{u, Kv\} + \{u, v\})$$

Por ser ∇ simétrica, $\{u, v\} = \nabla_u v - \nabla_v u$. Sustituyendo

$$N\, (u, v) = 1/4\, ((\nabla_{Ku} K)\, v - K\, (\nabla_{Kv} K)\, u - K\, (\nabla_u K)\, v + K\, (\nabla_v K)_u \qquad \text{(II, 7)}$$

$$N\, (u, v) = 1/4\, \tilde{a}\, ((\nabla K) \cdot K + (\nabla K)\, K)\, (u, v) \qquad \text{(II, 8)}$$

Como consecuencia del teorema anterior

$$q_1\, q_2\, \mathrm{Tor}_{\nabla'} = -N$$

CAPITULO III

CONEXIONES ESPECIALES

8. *Las E-conexiones.*

DEFINICION 8-1

Las E-conexiones, son las determinadas por la expresión

$$E = \nabla' - N \qquad \text{(III, 1)}$$

Teniendo en cuenta (II, 4) y (II, 8) deducimos para E la expresión.

$$E = \nabla - 1/2\,(\nabla K) \cdot K + \beta - 1/4\,\tilde{a}\,((\nabla K) \cdot K + (\nabla K)\,K)$$

PROPOSICION 8-1

$$N = 1/2\;K\,(EK) \qquad \text{(III, 2)}$$

DEMOSTRACION:

$$K\,(EK) = K\,((\nabla' - N)\,K) = K\,(\nabla' K) - K\,(N, K)$$

Por ser ∇' las conexiones que hacen K paralela $\nabla' K = 0$. El calculo de (N, K) es análogo al hecho en la proposición 7-1 para (α, K) es decir $(N, K) = N \cdot K - KN$. Deducimos

$$K\,(EK) = -\,K\,(N \cdot K - KN) = -\,K\,(N \cdot K) + N$$

Por otra parte, utilizando la definición (II. 7) del tensor N,

$$-\,K\,(N \cdot K)\,(u, v) = -\,1/4\,(K\,(\nabla_{Ku} K)\,K v - K\,(\nabla_v K)\,u - \\ -\,(\nabla_u K)\,K v + (\nabla_{Kv} K)\,u)$$

Haciendo uso de (II. 8)

$$-\,K\,(N \cdot K)\,(u, v) = 1/4\,((\nabla_{Ku} K)\,v - (\nabla_{Kv} K)\,u - K\,(\nabla_u K)\,v + \\ +\,K\,(\nabla_v K)\,u) = N\,(u, v)$$

Es decir

$$K\,(EK) = 2\,N; \qquad N = 1/2\,K\,(EK)$$

TEOREMA 8-1

Las distribuciones T^1 y T^2 son ambas paralelas relativas una respecto a la otra y ambas paralelas por caminos, con respecto a una coxión E.

DEMOSTRACION:

La condición del teorema es (II, 2) que teniendo en cuenta (II, 1) podemos expresar:

$$K\,\overline{\nabla}\,K + \tau\,K\,\overline{\overline{\nabla}}\,K = 0$$

Por la proposición anterior en el caso de las E-conexiones es equivalente a $N + \tau N = 0$, lo cual se satisface siempre, puesto que N es hemisimétrico.

Walker {3} considera las conexiones $L = D + N$ que hacen paralelas a T^1 y a T^2, siendo D una conexión simétrica y deduce: *Las conexiones D hacen a T^1 y T^2* paralelas por caminos y paralelas relativas una respecto a la otra. El teorema anterior generaliza este resultado.

TEOREMA 8-2

La condición necesaria y suficiente para que una estructura casi-producto sea integrable, es que sea paralela respecto a una E-conexión.

DEMOSTRACION:

La condición necesaria y suficiente de integrabilidad de la estructura es $N = 0$, pero, por ser $\nabla' = E + N$, $N = 0$ es la condición necesaria y suficiente para obtener las conexiones ∇' que hacen paralela la estructura.

De la definición de las E-conexiones, $E = \nabla' - N$ deducimos que la torsión de las E-conexiones, Tor_E, es igual a la torsión de ∇' menos el doble del tensor de Nijenhuis, $\mathrm{Tor}_E = \mathrm{Tor}_{\nabla'} - \widetilde{a}\,N = \mathrm{Tor}_{\nabla'} - 2\,\mathrm{N}$.

El tensor torsión N que está univocamente determinado por (V, T^1, T^2) puede calcularse a partir de la E-conexión, siendo el mismo para todas ellas, Cualquier propiedad intrínseca de la estructura que se esprese unívocamente a partir de cualquier conexión E se denomina un E-invariante. El tensor de Nijenhuis es un ejemplo de E-invariante.

9. *Las C-conexiones.*

En este párrafo, el estudio hecho para la distribución T^1, se haría de forma análoga para la T^2.

PROPOSICION 9-1

Todas las conexiones ∇'' *respecto a las cuales la distribución* T^1 *es paralela podemos expresarlas en la forma* $\nabla'' = \nabla - Q \nabla P + \gamma$, *siendo* ∇ *simétrica y* γ *un tensor de tipo* $(1, 2)$ *tal que* $Q\gamma \cdot P = 0$.

DEMOSTRACION:

Escribimos ∇'' como suma de una conexión simétrica mas un tensor arbitrario λ

$$\nabla'' = \nabla + \lambda$$

La aplicamos a P, teniendo en cuenta un calculo analogo al hecho en la proposición 7-1 para encontrar (α, K)

$$\nabla'' P = \nabla P + \lambda \cdot P - P\lambda$$

Aplicando Q deducimos,

$$Q \nabla'' P = Q \nabla P + Q \lambda \cdot P$$

Por ser $Q \nabla'' P = 0$ la condición necesaria y suficiente para que T^1 sea paralela respecto a ∇'',

$$Q \nabla P = - Q \lambda \cdot P$$

De (III, 1) deducimos al aplicar P y tener en cuenta que $PP=P$, $(Q \nabla P) \cdot P = - Q \lambda \cdot P = Q \nabla P$. La expresión general para λ es

$$\lambda = - Q \nabla P + \gamma \quad , \quad Q \gamma \cdot P = 0$$

DEFINICION 9-1

Definimos las C-conexiones por la expresiún

$$C = \nabla - Q \nabla P + 2 N + \gamma \quad , \quad Q \gamma \cdot P = 0 \qquad \text{(III, 3)}$$

siendo ∇ *una conexión simétrica.*

TEOREMA 9-1

La condición necesaria y suficiente para que T^1 *sea integrable es que sea paralela respecto a una C-conexión.*

DEMOSTRACION:

Si es integrable $QN = 0$ y la expresión de C se reduce a la expresión de las conexiones que hacen T^1 paralela. Recíprocamente.

$$Q\,C\,P = Q \nabla P - Q \nabla P + Q N \cdot P + Q \gamma \cdot P = 0 \implies$$

$$Q N \cdot P = 0 \iff Q\,N = 0.$$

PROPOSICION 9-2

$$Q\, Tor_C\, (Pu, Pv) = 0 \qquad \text{(III, 4)}$$

DEMOSTRACION:

Teniendo en cuenta que ∇ es simétrica, $\{u, v\} = \nabla_u v - \nabla_v u$,

$$\mathrm{Tor}_C\,(u, v) = - Q\, \nabla_u Pv + QN\,(u, v) + \gamma\,(u, v) + Q\, \nabla_v Pu -$$
$$- QN\,(v, u) - \gamma\,(v, u),$$
$$QN\,(u, v) = 1/2\, Q\{Pu, Pv\} = 1/2\,(Q\, \nabla_{Pu} Pv - Q\, \nabla_{Pv} Pu)$$

De las relaciones anteriores y $Q\gamma \cdot P = 0$ deducimos

$$Q\ \mathrm{Tor}_C\,(Pu, Pv) = - 2\, QN + 2\, QN = 0.$$

CAPITULO IV

PROPIEDADES DE LAS CONEXIONES ESPECIALES

10. *Conexión inducida en el espacio transversal a una foliación.*

Sea F una foliación de dimensión p, definida en la variedad V, D un abierto de trivialización del fibrado vectorial tangente a V. Consideramos los subespacios fibrados vectoriales $F(D) = (D, \mathbf{R}^p)$ y, $H(D) = (D, \mathbf{R}^q)$, $1 \leqslant p \leqslant n-1$, $p+q=n$. Por ser espacios fibrados vectoriales de dimensión finita, existe una trivialización simultánea

$$\begin{array}{ccccc} F(D) & \to & T(D) & \to & H(D) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ D \times \mathbf{R}^p & \to & D \times \mathbf{R}^n & \to & D \times \mathbf{R}^q \end{array}$$

Sea r' una referencia en $F(D)$. La fibra $\mathbf{R}^p$ en cada punto $x \in D$ es el espacio tangente a la hoja que pasa por x. Completemos esta referencia con una transversal r''. Teniendo en cuenta la G-estructura de la foliación, el grupo estructural de $T(V)$ puede reducirse a la forma

$$G = \begin{pmatrix} GL(p, \mathbf{R}) & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$$

Consideramos una conexión ∇ que hace F paralela y una referencia $r = (r', r'')$. Sobre el abierto D tenemos

$$\nabla r = r \cdot \theta$$

siendo θ la matriz de la conexión, de la forma,

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta' & 0 \\ * & \theta'' \end{pmatrix}$$

θ' y θ'' matrices cuadradas de ordenes p y q.

Deducimos

$$\nabla r' = r' \cdot \theta'$$

$$\nabla r'' = (r'' \cdot *, r'' \theta'') \qquad \text{(IV, 1)}$$

La segunda de las expresiones, al considerar el espacio $H(D)$ como cociente de $T(D)$ por $F(D)$ nos induce a definir una conexión en $H(D)$ por la matriz θ'', $\nabla r'' = r'' \theta''$. Podemos comprobar que ∇ así definida es una conexión.

TEOREMA 10-1

Dada una foliación F en una variedad diferenciable paralela respecto a una C-conexión, C, el tensor curvatura Ω'' de la conexión C'' inducida por C en el espacio transversal H es nulo sobre vectores en los subespacios tangentes a las hojas, si la C-conexión satisface además la condición $Q\, Tor_C\, (Pu, Qv) = 0$.

DEMOSTRACION:

Ya que la matriz de las formas diferenciales de la conexión puede reducirse a la forma

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta' & 0 \\ * & \theta'' \end{pmatrix}$$

la curvatura $\Omega = d\,\theta + \theta \Lambda \theta$ es

$$\Omega = \begin{pmatrix} d\theta' & 0 \\ * & d\,\theta'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \theta' \Lambda\, \theta' & 0 \\ * & \theta'' \Lambda\, \theta'' \end{pmatrix}$$

Sea P el espacio fibrado de las referencias sobre V, Representamos por $T(P)$ el espacio tangente a P, y por Π_* la proyección de $T(P)$ en $T(V)$. El elemento z puede considerarse como aplicación lineal de $\mathbf{R}^n$ sobre $T_{\Pi(z)}\,(V)$. La forma canónica sobre P, ϕ, es la 1-forma definida en $T(P)$ valuada en $\mathbf{R}^n$ por la expresión

$$\phi\,(u^*) = z^{-1}\,\Pi_*\,(u^*) \qquad u^* \in T_z\,(P)$$

Las aplicaciones z^{-1} en un abierto D de $T_{\Pi(Z)}(V)$ las representamos por la forma ϕ_D. Suponemos que la variedad V admite una estructura casi-producto en la que una distribución, integrable, corresponde a la foliación y la otra es transversal a la misma. Sean P y Q los proyectores. Descomponemos ϕ_D en $\phi_D' + \phi_D''$, tal que siendo $\Pi^* (u^*) = u$, se verifique,

$$u = z\,\phi_D(u) = (P + Q)(u) = z(\phi'_D(u) + \phi_D''(u))$$

es decir

$$\phi'_D(u) = \phi_D\, P(u)$$
$$\phi_D''(u) = \phi_D\, Q(u)$$

La torsión de la conexión es

$$\mathrm{Tor}_C = C\,\phi_D = d\,\phi_D + \theta_D\,\Lambda\,\phi_D$$

que en general, no es nula para una C-conexión. Sin embargo por ser una foliación paralela respecto a una C-conexión sabemos, (III, 4) $Q\,\mathrm{Tor}_C(Pu, Pv) = 0$ equivalente a

$$(d\,\phi_C'' + \theta_D''\,\Lambda\,\phi_D'')(Pu, Pv) = 0 \qquad \text{(IV, 2)}$$

De la condición $Q\,Tor_C(Pu, Pv) = 0$ y la de la hipótesis $Q\,Tor_C$ $(Pu, Qv) = 0$ deducinos que $Q\ Tor_C$ se expresa en función de formas de tipo (0, 2). La diferencial $d(Q\,Tor_C)$ es de tipo (1, 2) y (0,3) y se anula sobre (Pu, Pv, w)

Diferenciando (IV, 2) exteriormente

$$(-d\,\theta_D''\,\Lambda\,\phi_D'' + \theta_D''\,\Lambda\,d\,\phi_D'')(Pu, Pv, w) = 0.$$

Sustituyendo $d\,\phi_D''(Pu, Pv) - (\theta_D''\,\Lambda\,\phi_D'')(Pu, Pv)$ deducimos

$$(-d\,\theta_D'' - \theta_D''\,\Lambda\,\theta_D'')\,\Lambda\,\phi''_D(Pu, Pv, w) = 0 \quad <===>$$

$$<===> \quad (\Omega''\,\Lambda\,\phi'')(Pu, Pv, w) = 0 \quad <===>$$

$$\Omega_D''(Pu, Pv)\,\phi_D''(w) + \Omega_D''(Pv, w)\,\phi_D''(Pu) + \Omega_D''(\omega, Pu)\,\phi_D''(Pv) = 0$$

Pero por estar Pu, Pv en T^1, $\phi_D''(Pu) = \phi_D''(Pv) = 0$.

Es decir, la condición anterior es equivalente a

$$\Omega_D'' (Pu, Pv) \phi_D'' (w) = 0 \qquad \text{(IV, 3)}$$

para w arbitrario y D arbitrario, equivalente a $\Omega''(Pu, Pv) = 0$.

11. *Descomposición de las conexiones en las variedades casi-producto.*

Representamos por T^1, T^2 las distribuciones complementarias que determinan la estructura casi-producto y por T_1, T_2 las distribuciones duales. Los campos tensoriales los representamos por D_s^r; los construidos a partir de T^1 por J_s^r y los construidos a partir de T^2 por G_s^r.

Vamos a generalizar varios resultados obtenidos por Fava {1} para las conexiones simétricas, a las C-conexiones.

Sea ∇ una conexión sobre V. Definimos una aplicación

$$\nabla^1 \colon T^1 \times J_s^r \to J_s^s \qquad \text{(IV,4)}$$

determinada por

$$\nabla^1 \colon (Pu, A) \to P(\nabla_{Pu} A) = \nabla^1{}_{Pu} A, \qquad A \in J_s^r$$

La aplicación ∇^1 puede considerarse la proyección sobre T^1 del operador ∇.

Analogamente

$$\nabla^2 \colon T^2 \times G_x^r \to G_s^r$$

$$\nabla^2 \colon (Qv, B) \to Q(\nabla_{Qv} B) = \nabla_{Qv}{}^2 B, \qquad B \in G_s^r \qquad \text{(IV, 5)}$$

Fácilmente comprobaríamos que ∇^1 y ∇^2 satisfacen los axiomas de una conexión.

Definicion 11-1

A la conexión ∇^i $(i = 1, 2)$ la denominaremos conexión inducida sobre T^i por la conexión ∇ definida sobre V.

Consideremos el campo tensorial con valores en T^2 definido por

$V(Pu, Pv) = Q(\nabla_{Pu} Pv)$ para campos u, v arbitrarios. Podemos escribirlo

$$V(Pu, Pv) = \nabla_{Pv} Pv - \nabla_{Pv}{}^1 Pv \qquad \text{(IV, 6)}$$

Representaremos $P\{u, v\} = \{u, v\}^1$ y $Q\{u, v\} = \{u, v\}^2$.

Calcularemos la torsión y la curvatura de la conexión inducida ∇^1

$$\mathrm{Tor}^1(Pu, Pv) = \nabla_{Pu}{}^1 Pv - \nabla_{Pv}{}^1 Pu - \{Pu, Pv\}^1$$

$$\Omega^1(Pu, Pv)\, Pw = (\nabla_{Pu}{}^1 \nabla_{Pv}{}^1 - \nabla_{Pv}{}^1 \nabla_{Pu}{}^1 - \nabla^1 \{Pu, Pv\}^1)\, Pw$$

$$u, v, w \in T \quad , \quad \{Pu, Pv\}^1 = P\{Pu, Pv\}.$$

En el caso en que T^1 es integrable $\{Pu, Pv\}^1 = \{Pu, Pv\}$ y las expresiones de $\mathrm{Tor}^1(u, v)$ y $\Omega^1(u, v)$ coinciden con los campos torsión y curvatura de una conexión ordinaria.

Deducimos de $\nabla_{Pu}{}^1 Pv - \nabla_{Pv}{}^1 Pu - \{Pu, Pv\}^1 = P(\nabla_{Pu} Pv - \nabla_{Pv} Pu - \{Pu, Pv\})$

$$\mathrm{Tor}^1(Pu, Pv) = P\{\mathrm{Tor}(Pu, Pv)\} \qquad \text{(IV, 7)}$$

Definición 11-2

Definimos el tensor vortice γ y el tensor de Killing K relativos a la distribución T^1 por las expresiones

$$\gamma(Pu, Pv) = -\gamma(Pu, Pu) = V(Pu, Pv) - V(Pu, Pu) \qquad \text{(IV, 8)}$$

$$K(Pu, Pv) = K(Pv, Pu) = V(Pu, Pv) + V(Pv, Pu),\ u, v \in T \qquad \text{(IV, 9)}$$

Podremos entonces escribir $V(Pu, Pv)$ en la forma

$$V(Pu, Pv) = 1/2\{\gamma(Pu, Pv) + K(Pu, Pv)\} \qquad \text{(IV, 10)}$$

Veamos el significado geométrico de los campos γ y K.

La distribución T^2 está determinada por campos λ_g y T_2 por μ^g duales de los $\lambda_g, g = p + 1, \ldots, n$.

Introducimos la 2-forma γ^g y el campo tensorial K^g mediante las expresiones

$$\gamma(Pu, Pv) = \gamma^g(Pu, Pv)\, \lambda_g \qquad K(Pu, Pv) = K_g(Pu, Pv)\, \lambda_g \qquad \text{(IV, 11)}$$

Teniendo en cuenta (IV, 6) y la dualidad de λ_g y μ^g deducimos

$$\gamma^g (Pu, Pv) = \mu^g (\nabla_{Pu} Pv - \nabla_{Pv} Pu);\ K^g (Pu, Pv) = \mu^g (\nabla_{Pu} Pv + \nabla_{Pv} Pu)$$

Considerando la definición de la torsión de ∇ podemos escribir,

$$\gamma^g (Pu, Pv) = \mu^g (\mathrm{Tor}\,(Pu, Pv)) + \mu^g (\{Pu, Pv\}) \qquad \text{(IV, 12)}$$

PROPOSICION 11-1

Para una C-conexión el tensor γ no depende de la conexión.

DEMOSTRACIÓN:

$$Q\,\mathrm{Tor}\,(Pu, Pv) = 0 \implies \gamma^g (Pu, Pv) = \mu^g(\mathrm{Tor}\,(Pu, Pv)) +$$

$$+ \mu^g (\{Pu, Pv\}) = Q\{Pu, Pv\}, \qquad \text{(IV, 13)}$$

COROLARIO 11-1

Para una C-conexión $\gamma = 0$ es la condición necesaria y suficiente para que la distribución T^1 sea integrable.

DEMOSTRACION:

Siendo u, v dos campos arbitrarios escribimos

$$\gamma^g (Pu, Pv) = Q\{Pu, Pv\} = Q\,N\,(u, v) = 0,$$

condición de integrabilidad de la distribución, siendo N el tensor de Nijenhuis.

PROPOSICION 11-2

$$P(\Omega\,(Pu, Pv)\,Pw) = \Omega^1 (Pu, Pv)\,Pw + P\,(\nabla_{Pu} V\,(Pv, Pw) -$$

$$- \nabla_{Pv} V\,(Pu, Pw) - \nabla_{\{Pu,\,Pv\}^2} Pw \qquad \text{(IV, 14)}$$

DEMOSTRACION:

De acuerdo con la definición de V

$$\nabla_{Pu} Pv = \nabla_{Pu}{}^1 Pv + V(Pu, Pv)$$

Sustituyendo esta expresión en la fórmula de la curvatura

$$\Omega(Pu, Pv)Pw = \nabla_{Pu}(\nabla_{Pv}{}^1 Pw + V(Pv, Pw)) - \nabla_{Pv}(\nabla_{Pu}{}^1 Pw +$$

$$+ V(Pu, Pw)) - \nabla_{\{Pu, Pv\}^1} Pw - \nabla_{\{Pu, Pv\}^2} Pw.$$

Expresión de la que deducimos (IV,14).

De la definición de V deducimos que la condición de ser T^1 autoparalela es equivalente a $V(u, v) = 0$. Teniendo además en cuenta el Corolario 11-1 y la Proposición 11-2 y el hecho de que la integrabilidad de T^1, $\{u, v\} \varepsilon T^1$, implica $\{u, v\}^2 = 0$, podemos enunciar:

TEOREMA 11-1

Para una C-conexión la condición $V(u, v) = 0$ implica que la distribución es integrable, autoparalela respecto a la C-conexión, y se satisface:

$$P(\Omega(Pu, Pv)Pw) = \Omega^1(Pu, Pv)Pw$$

BIBLIOGRAFIA

S. S. CHERN

1 *The Geometry of G-structures*. Bull. Amer. Math. Soc., 72 (1966), 167-219.

R. DEHEUVELS

1 *Variedades casi-complejas*. Santiago, 1969.

B. ECKMANN et A. FRÖLICHER

1 *Sur l'intégrabilité des structures presque complexes*. C. R. Acad. Sci. París 232 (1951) 2284-2286.

F. FAVA

1 *Distribucioni e structture indotte*. Acad. Sci. Torino, 103, (1969), 93-120.

A. FRÖLICHER, A. NIJENHUIS

1 *Some new Cohomology invariants for complex manifolds I*. Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. Amsterdam. 59, (1956) 540-564.

A. HAEFLIGER

1 *Variétés feuilletées*, Ann. Sc. Nom. Sup. Pisa 3 XVI, (1962) 367-397.

S. KOBAYASHI

1 *La connexion des variétés fibrées*. C. R. Acad. Sci. París, 238, (1954) 318-319.

G. LEGRAND

1 *Sur les variétés à structure de presque produit complexe*. C. R. Acad. Sci. París, t. 242, (1956), 225-337.

A. NIJENHUIS

1 *Theory of vector-valued differential forms*. Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. Amsterdam, 59, (1956) 338-359.

B.L. REINHART

1 *Harmonic integrals on almost product manifolds*. Trans. Amer. Math. Soc., 88, (1958) 243-276 (thesis).

D.C. SPENCER

1 *Differentiable Manifolds*. Princeton Univ. (1954).

E. VIDAL

1 *On regular foliations*. Ann. Inst. Fourier, XVII, 1, (1967) 129-133.

E. VIDAL AND E. VIDAL COSTA

1 *Special connections and almost foliated metrics in manifolds with a complex almost product structures*. A aparecer en: J. of Diff. Geom. 8 (1973) 297-304.

AG. WALKER

1 *Canonical form for a riemannian space with a parallel field of null planes*. Quart. J. Math. Oxford (2), 1, (1950) 60-79
2 *Connexions for parallel distributions in the large*. Quart. J. Math. Oxford (2) vol. 9, (1958) 221-231.
3 *Distributions and Global Connexions*. C.B.R.M. Brussels (1959) 63-74.
4 *Almost product structures*. Proc. of Symposia in Pure Math. Vol. 3, Differential Geometry. Am. Math. Soc (1961), 94-100.

T. J. WILLMORE

1 *Parallel distributions on manifolds*. Proc. London Math. Soc. (3) 6, (1956), 191-204.
2 *Systems of parallel distributions*. J. London Math. Soc. (1956) 153-156.

K. YANO

1 *Differential Geometry on Complex and almost complex espaces*. Pergamon Press. Oxford. 1965.