MEDIAS EN ESPACIOS LOCALMENTE CONVEXOS Y SEMI-REFLEXIVIDAD

por

F. BOMBAL Y G. VERA

SUMARIO

En este trabajo se introduce el concepto de media para funciones acotadas definidas sobre un semigrupo S, con valores en un espacio localmente convexo E, generalizando algunos resultados de G. VERA [10]. Se dan condiciones necesarias y suficientes para la existencia de medias sobre ciertos subespacios de funciones acotadas. Especialmente se estudia el problema de la existencia de medias invariantes sobre el espacio $B(S, E)$ de todas las funciones acotadas de S en E. Para una clase amplia de semigrupos, se prueba que si E es casi-completo para la topología de Mackey, una condición necesaria y suficiente para la existencia de una media invariante sobre $B(S, E)$ es que E sea semi-reflexivo. Como consecuencia, se han obtenido algunos resultados interesantes de la teoría de espacios localmente convexos (Prop 30 y Cor 33.)

Cuando S es un grupo topológico, se estudia el problema de la existencia de medias invariantes sobre los subespacios de las funciones continuas acotadas y de las funciones débilmente casi-periódicas.

§ 1. MEDIAS CON VALORES EN ESPACIOS LOCALMENTE CONVEXOS

Sea S un semigrupo y E un espacio vectorial topológico sobre $\mathbf{R}$, localmente convexo (1). Designaremos por $B(S, E)$ el espacio vectorial de las aplicaciones $f\colon S \to E$, tales que $f(S)$ es un conjunto acotado en E. Cuando $E = \mathbf{R}$ escribiremos $B(S)$ en vez de $B(S, \mathbf{R})$. X_0

(1) Todos los espacios topológicos que aparezcan en este trabajo, se supondrán siempre de Hausdorff.

designará el subespacio de $B(S, E)$ engendrado por las aplicaciones de la forma $s \to \alpha(s)x$, siendo $\alpha \in B(S)$ y $x \in E$. $TB(S, E)$ designará el subespacio de $B(S, E)$ formado por las aplicaciones cuya imagen es un conjunto totalmente acotado (precompacto) de E.

Si $(p_i)_{i\in I}$ es una familia filtrante de seminormas que define la topología $\mathcal{T}$ de E, para cada $f \in B(S, E)$ sea

$$p_i^*(f) = \operatorname{Sup}\{p_i(f(s)) : s \in S\}.$$

La familia $(p_i^*)_{i\in I}$ es una familia filtrante de seminormas en $B(S, E)$, que le dota de estructura de espacio localmente convexo; designaremos por $\mathcal{T}^*$ la topología localmente convexa definida por esta familia de seminormas.

Para cada $s \in S$ y cada $f \in B(S, E)$, denotaremos por ${}_sf$ (resp. f_s) la función de S en E definida por

$$({}_sf)(t) = f(st), \quad \forall t \in S \quad (\text{resp. } (f_s)(t) = f(ts), \quad \forall t \in S).$$

Es claro que las funciones ${}_sf$ y f_s también pertenecen a $B(S, E)$.

Un subespacio vectorial X de $B(S, E)$ diremos que es invariante a la izquierda (resp. derecha), si para cada $f \in X$ y $s \in S$, la función ${}_sf$ (resp. f_s) también pertenece a X. Cuando X sea invariante a la derecha y a la izquierda, diremos simplemente que X es invariante. Es inmediato que X_0 y $TB(S, E)$ son invariantes.

Si $M \subset E$, co (M) designará la envoltura convexa de M.

Sea $X \subset B(S, E)$ un subespacio vectorial que contiene las aplicaciones constantes.

1. Definición. Una *media μ sobre X* es una aplicación lineal de X en E tal que:

$$M\ 1. \qquad \mu(f) \in \overline{\operatorname{co}(f(S))}.$$

Si además X es invariante a la izquierda (resp. derecha), una media μ sobre X se llama *invariante a la izquierda* (resp. *derecha*) si verifica:

$$M\ 2. \quad \mu({}_sf) = \mu(f) \quad (\text{resp. } \mu(f_s) = \mu(f)), \quad \text{para todo } f \in X \text{ y } s \in S.$$

Si X es invariante y μ es una media sobre X, invariante a la izquierda y a la derecha, diremos que μ es *invariante*.

2. OBSERVACIONES.

a) Si μ es una media sobre X, de M 1 se deduce que $\mu(f)$ es límite de una red de combinaciones convexas $\Sigma\alpha_k f(s_k)$, con $\alpha_k \geqslant 0$, $\Sigma\alpha_k = 1$.

Para cada seminorma p_i se tiene:

$$p_i(\Sigma\alpha_k f(s_k)) \leqslant \Sigma\alpha_k p_i(f(s_k)) \leqslant \Sigma\alpha_k p_i^*(f) = p_i^*(f),$$

luego $p_i(\mu(f)) \leqslant p_i^*(f)$, lo que prueba que μ es continua para las topologías $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}^*$ sobre E y $B(S, E)$.

b) Si μ es una media sobre X, entonces μ también es una media sobre X cuando E se considera dotado de cualquier otra topología $\mathcal{T}_1$ localmente convexa, compatible con la dualidad (E, E'), ya que los conjuntos cerrados y convexos son los mismos para todas estas topologías. Por tanto, μ también es continua para las topologías $\mathcal{T}_1$ y la correspondiente topología $\mathcal{T}_1^*$ en $B(S, E)$.

c) En el caso $E = \mathbf{R}$, la definición 1 es equivalente a que μ sea una aplicación lineal que cumpla

i) $\operatorname{Inf}\{f(s) : s \in S\} \leqslant \mu(f) \leqslant \operatorname{Sup}\{f(s) : s \in S\}$, para todo $f \in X$.

o bien:

ii) $\mu(1) = 1$; $\mu(f) \geqslant 0$ si $f \geqslant 0$.

Por tanto, la definición 1 coincide con la usual (Véase, por ejemplo, [4], pág. 230).

d) La condición M 1 se puede sustituir por las dos siguientes:

M 1a. Si $f(s) = x$ para todo $s \in S$, entonces $\mu(f) = x$.

M 1b. $\mu(f) \in f(S)^{00}$ (2)

En efecto, de M 1 se deduce M 1a y M 1b. Recíprocamente, nótese que para cada $y \in E$ se tiene

$$\mu(f) - y = \mu(f - y) \in (f(S) - y)^{00},$$

---

(2) Para cada conjunto $M \subset E$ designamos por M^0 su polar (absoluta):

$$M^0 = \{x' \in E' : |\langle x, x'\rangle| \leq 1, \quad \forall x \in M\},$$

y por M^{00} la polar de M^0 en E.

como consecuencia de M 1a y M 1b. Entonces se verifica M 1 en virtud del siguiente

LEMA. *Para todo conjunto acotado A de un espacio localmente convexo E, se tiene*

$$\overline{\text{co}\,(A)} = \bigcap \{y + (A - y)^{00} : y \in E\}$$

DEMOSTRACIÓN. Bastará demostrar que

$$\bigcap \{y + (A - y)^{00} : y \in E\} \subset \overline{\text{co}\,(A)},$$

ya que la otra inclusión es evidente.

Se sabe que $x \in \overline{\text{co}\,(A)}$ si y solo si

$$\langle x, x' \rangle \leqslant \text{Sup}\,\{\langle a, x' \rangle : a \in A\}, \quad \text{para todo} \quad x' \in E'.$$

(véase, por ejemplo, [7], Teorema 12.1). Supongamos que

$$x \in \bigcap \{y + (A - y)^{00} : y \in E\} \quad \text{y} \quad x \notin \overline{\text{co}\,(A)}.$$

Entonces existe $x' \in E'$ tal que

$$\langle a, x' \rangle < \alpha < \langle x, x' \rangle, \quad \text{para todo} \quad a \in A.$$

Como A es acotado, existe $y \in E$ tal que

$$\langle y, x' \rangle < \text{Inf}\,\{\langle a, x' \rangle : a \in A\}.$$

Entonces $\langle a - y, x' \rangle > \langle a, x' \rangle - \text{Inf}\,\{\langle a, x' \rangle : a \in A\} \geqslant 0$, para cada $a \in A$.

Por tanto $0 \leqslant \langle a - y, x' \rangle < \alpha - \langle y, x' \rangle < \langle x - y, x' \rangle$, para todo $a \in A$.

Sea $y' = x'/\beta$, donde $\beta = \alpha - \langle y, x' \rangle > 0$. Entonces se tiene

$$0 \leqslant \langle a - y, y' \rangle < 1, \quad \text{para todo} \quad a \in A,$$

luego $y' \in (A - y)^0$. Sin embargo $\langle x - y, y' \rangle > 1$, lo que está en contradicción con $x - y \in (A - y)^{00}$.

Cuando S es el semigrupo N de los números naturales, las medias invariantes sobre los subespacios de $B\,(N, E)$ coinciden, por tanto, con los *límites generalizados de Banach,* definidos mediante M 1a y M 1b, y estudiados por VERA en su Tesis [10].

3. EJEMPLOS

a) Si G es un grupo finito de cardinal n y E es arbitrario, existe una única media invariante sobre $B(G, E)$, definida por

$$\mu(f) = n^{-1} \sum_{s \in G} f(s).$$

b) Si G es un grupo topológico compacto y E es casi-completo, existe una única media invariante sobre el subespacio de $B(G, E)$ formado por las aplicaciones continuas de G en E (Véase [1], Teorema 6.7).

c) Si S es el semigrupo $\mathbf{N}$ de los números naturales, y E es casi-completo para la topología de Mackey, una condición necesaria y suficiente para que exista una media invariante sobre $B(\mathbf{N}, E)$, es que E sea semi-reflexivo (Véase [10], Cap. IV).

Hay muchas propiedades de las medias sobre $B(S)$ que se generalizan sin dificultad al caso de medias con valores en E. En la siguiente proposición indicamos algunas de ellas:

4. PROPOSICIÓN

4.1. *Si existe una media invariante a la izquierda μ_1 y una media invariante a la derecha μ_2 sobre $B(S, E)$, entonces existe una media invariante sobre $B(S, E)$.*

4.2. *Si G es un grupo y existe una media invariante a la izquierda sobre $B(G, E)$, entonces existe una media invariante sobre $B(G, E)$*

4.3. *Si G es un grupo tal que existe una media invariante sobre $B(G, E)$, entonces para todo subgrupo H de G existe una media invariante sobre $B(H, E)$.*

4.4. *Sea G un grupo y H un subgrupo normal de G. Entonces $B(G, E)$ admite una media invariante si y solo si $B(H, E)$ y $B(G/H, E)$ admiten medias invariante.*

DEMOSTRACIÓN. Las demostraciones son análogas a las del caso $E = \mathbf{R}$, aunque con algunas modificaciones (Véase, por ej., [4], páginas 233-235). A modo de ejemplo, probaremos 4.4:

Supongamos que μ es una media invariante sobre $B(G, E)$. Entonces, en virtud de 4.3, $B(H, E)$ admite una media invariante. Sea $\varphi: G \to G/H$ la aplicación canónica. Para $f \in B(G/H, E)$ definamos $\mu_0(f) = \mu(f \circ \varphi)$. Es fácil probar que μ_0 es lineal. Como $f \circ \varphi(G) = f(G/H)$, resulta inmediatamente que μ_0 verifica M 1. M 2 resulta de que $({}_{sH}f) \circ \varphi = {}_s(f \circ \varphi)$ y $(f_{sH}) \circ \varphi = (f \circ \varphi)_s$.

Supongamos ahora que μ y μ' son medias invariantes sobre $B(H, E)$ y $B(G/H, E)$, respectivamente. Para $f \in B(G, E)$ y $s \in G$ definamos $\bar{f}(s) = \mu({}_sf)$, en donde ${}_sf$ se considera restringida a H. Como en el caso de medias reales, se prueba que $\bar{f}$ es constante sobre cada clase módulo H, y esto permite definir $f' \in B(G/H, E)$ por $f'(sH) = \bar{f}(s)$. Finalmente, se define $\mu_0(f) = \mu'(f')$. Es claro que μ_0 es lineal. Por otro lado, $f'(G/H) = \bar{f}(G) \in \overline{\mathrm{co}}\,(f(G))$ $(\bar{f}(s) \in \overline{\mathrm{co}}\,[f(sH)] \subset \overline{\mathrm{co}}\,(f(G))$, para todo $s \in G)$, luego $\mu'(f') \in \overline{\mathrm{co}}\,(f(G))$, lo que prueba que μ_0 verifica M 1. De la relación $({}_sf)' = {}_{sH}(f')$ resulta que μ_0 es invariante a la izquierda. Por 4.2 resulta que $B(G, E)$ posee una media invariante.

§ 2. Condiciones suficientes para la existencia de medias.

En lo que sigue, consideraremos solamente medias invariantes a la izquierda. Se obtendrían resultados análogos para medias invariantes a la derecha.

5. Proposición. *Sea S un semigrupo y E un espacio localmente convexo.*

a) *Si μ_0 es una media (resp. media invariante a la izquierda) sobre $B(S)$, entonces existe una media (resp. media invariante a la izquierda) μ sobre X_0 tal que*

5.1 $$\langle \mu(f), x' \rangle = \mu_0 \langle f, x' \rangle, \quad \forall f \in X_0 \quad y \quad \forall x' \in E',$$

donde $\langle f, x' \rangle$ es la función $s \to \langle f(s), x' \rangle$.

b) *Recíprocamente, si X es un subespacio vectorial de $B(S, E)$ (resp. invariante a la izquierda) que contiene a X_0 y existe sobre X una media (resp. media invariante a la izquierda) μ, entonces existe una única media (resp. media invariante a la izquierda) μ_0 sobre $B(S)$ que verifica 5.1.*

DEMOSTRACIÓN. a) Sea $(x_i)_{i\in I}$ una base algebraica de E. Cada función $f \in X_0$ se expresa de modo único de la forma

$$f(s) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(s)\, x_{i_k}$$

donde $\alpha_k \in B(S)$. Se define entonces $\mu(f) = \sum_{k=1}^{n} \mu_0(\alpha_k) x_{i_k}$. Es claro que se verifica 5.1. Esta fórmula permite probar que μ es lineal. Por otro lado, por ser μ_0 una media real, para todo $x' \in E'$ se tiene

$$\langle \mu(f), x' \rangle = \mu_0 \langle f, x' \rangle \leqslant \operatorname{Sup} \{\langle f(s), x' \rangle : s \in S\}.$$

Esto prueba que $\mu(f) \in \overline{\operatorname{co}(f(S))}$.

Es claro que si μ_0 es invariante a la izquierda, μ también lo es (3).

b) Para cada $x \neq 0$ de E y cada $\alpha \in B(S)$,

$$\mu(\alpha(s)\, x) \in \overline{\operatorname{co}[\alpha(S)\, x]} = \overline{\operatorname{co}[\alpha(S)]}\, x,$$

y por tanto existe un número real λ, $\operatorname{Inf}\{\alpha(s) : s \in S\} \leqslant \lambda \leqslant \operatorname{Sup}\{\alpha(s) : s \in S\}$, tal que $\mu(\alpha(s)\, x) = \lambda x$. Entonces la fórmula

$$\mu_x(\alpha) = \lambda,$$

define una media real. Vamos a ver ahora que todas las medias reales μ_x así definidas coinciden. Si x e y son dos vectores linealmente independientes y $\alpha \in B(S)$, sean $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $z = ax + by$. Entonces

$$\mu(\alpha(s)\, z) = a\, \mu(\alpha(s)\, x) + b\, \mu(\alpha(s)\, y) = a\, \mu_x(\alpha)\, x + b\, \mu_y(\alpha)\, y.$$

Como μ es una media, por el razonamiento anterior, debe existir $\lambda \in \mathbf{R}$ tal que $\mu(\alpha(s)\, z) = \lambda z = \lambda a x + \lambda b y$. De la independencia de x e y resulta

$$\mu_x(\alpha) = \lambda = \mu_y(\alpha),$$

lo que prueba que $\mu_x = \mu_y$. En el caso en que $y = ax$, $a \neq 0$, se tiene

$$a\, \mu_y(\alpha)\, x = \mu_y(\alpha)\, y = \mu(\alpha(s)\, y) = a\, \mu(\alpha(s)\, x) = a\, \mu_x(\alpha)\, x,$$

lo que prueba también en este caso que $\mu_x = \mu_y$.

---

(3) Se puede dar otra demostración de (a) sin utilizar la existencia de bases algebraicas de E.

Así pues, existe una única media μ_0 sobre $B(S)$ tal que

$$\mu(\alpha(s)x) = \mu_0(\alpha)x, \qquad \forall\, \alpha \in B(S) \quad \text{y} \quad \forall\, x \in E$$

y esto prueba que μ_0 verifica 5.1. Si μ es invariante a la izquierda, de la fórmula anterior se deduce que μ_0 es invariante a la izquierda.

6. Proposición. *Sea μ_0 una media (resp. media invariante a la izquierda) sobre $B(S)$, y $X \subset B(S, E)$ un subespacio (resp. subespacio invariante a la izquierda) tal que*

6.1 *Para todo $f \in X$, la envoltura convexa, cerrada y equilibrada de $f(S)$ es débilmente compacta.*

Entonces existe una media (resp. media invariante a la izquierda) μ sobre X que cumple

$$\text{6.2} \qquad \langle \mu(f), x' \rangle = \mu_0 \langle f, x' \rangle, \quad \forall\, f \in X, \quad \forall\, x' \in E'.$$

Demostración. Sea $f \in X$ y definamos $\mu(f)$ por la fórmula 6.2. Es claro que $\mu(f)$ pertenece al dual algebraico de E'. Por la hipótesis 6.1, la polar $f(S)^0$ es un entorno de 0 en la topología de Mackey $\tau(E', E)$ de E'. Dado $\varepsilon > 0$, si $x' \in \varepsilon f(S)^0$, se tiene

$$|\langle \mu(f), x' \rangle| = |\mu_0 \langle f, x' \rangle| \leqslant \operatorname{Sup}\, \{|\langle f(s), x' \rangle| : s \in S\} \leqslant \varepsilon,$$

lo que prueba que $\mu(f)$ es continua para $\tau(E', E)$, y por tanto $\mu(f) \in E$. La fórmula 6.2 prueba que μ es lineal, e invariante a la izquierda si lo es μ_0. Un razonamiento análogo al efectuado en 5 (a) prueba que $\mu(f) \in \overline{\operatorname{co} f(S)}$, y por tanto que μ es una media sobre X.

7. Corolario. *Sea E casi completo para la topología de Mackey, μ_0 una media (resp. media invariante a la izquierda)* sobre $B(S)$ *y* $X = \{f \in B(S, E) : f(S)$ *es débilmente relativamente compacto*$\}$.

Entonces existe una media (resp. media invariante a la izquierda) μ sobre X que verifica 6.2.

Demostración. Es consecuencia de la proposición 6, puesto que todo $f \in X$ verifica 6.1 por [6], pág. 325, prop. (4)'.

8. Corolario. *Sea E semi-reflexivo y μ_0 una media (resp. media invariante a la izquierda) sobre $B(S)$. Entonces existe una media (resp. media invariante a la izquierda) μ sobre $B(S, E)$ que cumple* 6.2.

DEMOSTRACIÓN. Todo acotado de E es débilmente relativamente compacto (Véase [5] pág. 227) y como E es casi completo para la topología débil, tambien lo es para la topología de Mackey. Por tanto se cumplen las hipótesis de corolario 7 con $X = B(S, E)$.

9. COROLARIO. *Sea E casi completo y μ_0 una media (resp. media invariante a la izquierda) sobre $B(S)$. Entonces existe una media (resp. media invariante a la izquierda) μ sobre $TB(S, E)$ que cumple* 6.2.

DEMOSTRACION. Para cada $f \in TB(S, E)$, $f(S)$ es precompacto y $\overline{f(S)}$ es completo. Por tanto $f(S)$ es relativamente compacto y, en consecuencia, débilmente relativamente compacto. Al ser E casi-completo, también lo es para la topología de Mackey, y el resultado se sigue del corolario 7.

§ 3. CONDICIONES NECESARIAS PARA LA EXISTENCIA DE MEDIAS.

Si $X \supset X_0$, la proposición 5 (b) nos indica que una condición necesaria para la existencia de una media (resp. media invariante a la izquierda) sobre X es que exista una media (resp. media invariante a la izquierda) sobre $B(S)$. Por tanto, en lo que sigue supondremos siempre que existe una media (resp. media invariante a la izquierda) sobre $B(S)$.

Todas las medias construidas hasta ahora sobre subespacios $X \supset X_0$ vienen inducidas por una media sobre $B(S)$ mediante la relación 6.2. Seguidamente veremos que toda media sobre $X \supset X_0$ necesariamente verifica 6.2, es decir, se puede considerar que está inducida por una media sobre $B(S)$. En una primera etapa, probaremos ésto cuando $X = TB(S, E)$.

10. LEMA. $\bar{X}_0 = TB(S, E)$ *(para la topología $\mathcal{T}^*$ de $B(S, E)$ asociada a la topología $\mathcal{T}$ de E).*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f \in TB(S, E)$ y $(p_i)_{i \in I}$ una familia de seminormas filtrante que define la topología $\mathcal{T}$ de E. Si $\varepsilon > 0$, $i \in I$ y $V = \{x \in E : p_i(x) < \varepsilon\}$, entonces existen $y_1, \ldots, y_m \in E$ tales que $f(S) \subset \bigcup\{y_j + V : 1 \leqslant j \leqslant m\}$. Sea (C_k), $1 \leqslant k \leqslant r$, una partición de S tal que $f(C_k)$ esté contenido en algún $y_j + V$, y elijamos una función $\varphi : \{1, 2, \ldots, r\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$ tal que $f(C_k) \subset y_{\varphi(k)} + V$. Sea α_k la función característica de C_k y definamos

$$g(s) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k(s)\, y_{\varphi(k)}.$$

Es claro que $g \in X_0$. Se comprueba que $g(s) - f(s) \in V$ para todo $s \in S$, y por tanto $p_i^*(f - g) < \varepsilon$, luego $f \in \overline{X}_0$ en la topología $\mathcal{T}^*$.

Recíprocamente, sea $f \in \overline{X}_0$ y U un entorno de 0 en E. Entonces existen $\varepsilon > 0$, $i \in I$, tales que si $V = \{x \in E : p_i(x) < \varepsilon\}$ se tiene $V + V \subset U$. Por hipótesis, existe $g \in X_0$ tal que $p_i^*(g - f) < \varepsilon$, es decir, $f(S) \subset g(S) + V$. Como $g(S)$ es precompacto, existen $y_1, \ldots, y_m \in E$ tales que

$$g(S) \subset \bigcup \{y_j + V : 1 \leqslant j \leqslant m\}$$

y por tanto

$$f(S) \subset \bigcup \{y_j + V + V : 1 \leqslant j \leqslant m\} \subset \bigcup \{y_j + U : 1 \leqslant j \leqslant m\},$$

lo que prueba que $f(S)$ es precompacto.

11. Teorema. *Si existe una media (resp. media invariante a la izquierda) μ sobre $TB(S, E)$, entonces existe una única media (resp. media invariante a la izquierda) μ_0 sobre $B(S)$, que verifica* 6.2.

Demostración. Sea μ_0 la media sobre $B(S)$ asociada a μ por la proposición 5 (b). Por la continuidad de μ y μ_0, para cada $x' \in E'$ el conjunto

$$N(x') = \{f \in TB(S, E) : \langle \mu(f), x' \rangle - \mu_0 \langle f, x' \rangle = 0\}$$

es cerrado. Por tanto el conjunto $\bigcap \{N(x') : x' \in E'\}$ es cerrado, y contiene a X_0 por 5.1, luego coincide con $TB(S, E)$ por el lema 10.

Abordemos el caso general de que $X \supset X_0$ sea un subespacio de $B(S, E)$. Si designamos por E_σ el espacio E dotado de la topología débil $\sigma(E, E')$, los conjuntos $B(S, E)$ y $TB(S, E_\sigma)$ coinciden, ya que todo conjunto acotado en E es débilmente precompacto. Entonces el lema 10 prueba que la adherencia de X_0 para la topología $\sigma(E, E')^*$ es $B(S, E)$.

12. Teorema. *Sea $X \supset X_0$ un subespacio (resp. subespacio invariante a la izquierda) de $B(S, E)$. Si existe una media (resp. media invariante a la izquierda) μ sobre X, entonces existe una única media (resp. media invariante a la izquierda) μ_0 sobre $B(S)$, que verifica* 6.2.

Demostración. Según se indica en la observación 2 (b), μ es continua para las topologías $\sigma(E, E')^*$ y $\sigma(E, E')$ en X y E. De lo dicho anteriormente, resulta que X_0 es denso en X para la topología inducida por $\sigma(E, E')^*$. Repitiendo el razonamiento del teorema 11, cambiando $TB(S, E)$ por X, se obtiene el resultado.

13. COROLARIO. *En las hipótesis del teorema* 12, *sea* μ *una media sobre* X. *Si* $f \in X$ *y* a *es un endomorfismo continuo de* E *tal que* $a \circ f \in X$, *entonces* $\mu(a \circ f) = a[\mu(f)]$.

DEMOSTRACIÓN. Según el teorema 12, se verifica 6.2. Por tanto

$$\langle \mu(a \circ f), x' \rangle = \mu_0 \langle a \circ f, x' \rangle = \mu_0 \langle f, x' \circ a \rangle = \langle \mu(f), x' \circ a \rangle = \langle a[\mu(f)], x' \rangle,$$

para todo $x' \in E'$, luego $\mu(a \circ f) = a[\mu(f)]$.

14. COROLARIO. (a) *Si* E *es casi completo, la fórmula* 6.2 *establece una biyección entre el conjunto de medias (resp. medias invariantes a la izquierda) sobre* $TB(S, E)$ *y el conjunto de medias (resp. medias invariantes a la izquierda) sobre* $B(S)$.

(b) *Si* E *es semi-reflexivo, la fórmula* 6.2 *establece una biyección entre el conjunto de medias (resp. medias invariantes a la izquierda) sobre* $B(S, E)$ *y el conjunto de medias (resp. medias invariantes a la izquierda) sobre* $B(S)$.

DEMOSTRACIÓN. (a) resulta inmediatamente del corolario 9 y el teorema 11.

Según se indicó antes del teorema 12, los conjuntos $B(S, E)$ y $TB(S, E_\sigma)$ coinciden. Como E_σ es casicompleto, (b) se deduce de (a) y de la observación 2(b).

§ 4. MEDIAS INVARIANTES Y SEMI-REFLEXIVIDAD.

En [10], Cap. IV, Teorema 27, se prueba que sí E es casicompleto para la topología de Mackey, una condición necesaria y suficiente para que E sea semi-reflexivo es que exista una media, LIM, sobre $B(\mathbf{N}, E)$ que cumpla la siguiente condición: Si (x_n), (y_n) son dos sucesiones pertenecientes a $B(\mathbf{N}, E)$ tales que $x_n = y_n$ siempre que n sea mayor que un cierto n_0, entonces se tiene $LIM(x_n) = LIM(y_n)$ (4). A tales medias las denominaremos *límites generalizados*.

(4) Nótese que en virtud del corolario 13, se verifican las hipótesis del citado teorema de [10].

A continuación, extenderemos este resultado cuando en vez del semigrupo aditivo de los números naturales, se considera un semigrupo S con ciertas propiedades.

En toda esta sección consideraremos siempre semigrupos S para los que existe alguna media invariante a la izquierda sobre $B(S)$. Si $\varphi \in B(S)$ y $\mu(\varphi) = c$, para toda media invariante a la izquierda, μ, sobre $B(S)$, diremos que φ es *casi-convergente a c*.

15. DEFINICIÓN. Diremos que el semigrupo S *verifica la propiedad A*, si existe una aplicación

$$\alpha : S \times \mathbf{N} \to \mathbf{R}$$

que cumple:

A 1. $\alpha(t, k) \geqslant 0$, para todo $t \in S$ y $k \in \mathbf{N}$.

A 2. $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(t, k) = 1$, para todo $t \in S$.

A 3. Para todo $k \in \mathbf{N}$, la función $t \to \alpha_k(t) = \alpha(t, k)$, es casi-convergente a 0.

16. TEOREMA. *Sea S un semigrupo con la propiedad A y E un espacio localmente convexo casicompleto para la topología de Mackey. Una condición necesaria y suficiente para que E sea semi-reflexivo es que exista una media invariante a la izquierda μ sobre $X = B(S, E)$.*

DEMOSTRACIÓN. La necesidad de la condición resulta del corolario 8. Reciprocamente, designemos por E_τ el espacio E dotado de la topología de Mackey. Por la hipótesis resulta que E_τ es sucesionalmente completo. Si (x_n) es una sucesión acotada en E, definamos

$$f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(s, k)\, x_k.$$

La serie anterior converge, pues si $(p_j)_{j \in J}$ es una familia filtrante de seminormas que define la topología de E_τ, para cada $j \in J$ se tiene

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_j[\alpha(s, k)\, x_k] = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(s, k)\, p_j(x_k) \leqslant M_j \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(s, k) = M_j,$$

donde $M_j = \operatorname{Sup}\{p_j(x_k) : k \in \mathbf{N}\}$. Además, este razonamiento prueba que $f \in B(S, E) = B(S, E_\tau)$. Si definimos $LIM(x_n) = \mu(f)$, entonces LIM es un límite generalizado. En efecto, LIM es una aplicación lineal de $B(\mathbf{N}, E)$ en E y se cumple $LIM(x_n) \in \overline{\text{co}\{x_k : k \in \mathbf{N}\}}$ pues para todo $x' \in E_\tau' = E'$, se tiene

$$|\langle f(s), x' \rangle| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(s, k) |\langle x_k, x' \rangle| \leqslant \text{Sup}\{|\langle x_k, x' \rangle| : k \in \mathbf{N}\}$$

y por tanto $f(s) \in \overline{\text{co}\{x_k : k \in \mathbf{N}\}}$.

Por otra parte, si (x_k), (y_k) son dos sucesiones de $B(\mathbf{N}, E)$ tales que $x_k = y_k$ para todo $k > n$ y f, g son las funciones asociadas a ellas por el proceso anterior, se tiene:

$$f(s) = \sum_{k=1}^{n} \alpha(s, k) x_k + \sum_{k>n} \alpha(s, k) x_k$$

$$g(s) = \sum_{k=1}^{n} \alpha(s, k) y_k + \sum_{k>n} \alpha(s, k) x_k.$$

Entonces

$$\mu(f) = \sum_{k=1}^{n} \mu[\alpha_k x_k] + \mu[\sum_{k>n} \alpha(s, k) x_k] = \sum_{k=1}^{n} \mu_0(\alpha_k) x_k +$$
$$\mu[\sum_{k>n} \alpha(s, k) x_k] = \mu[\sum_{k>n} \alpha(s, k) x_k] = \mu(g),$$

donde μ_0 es la media invariante a la izquierda sobre $B(S)$ inducida por μ, según la proposición 5 (b). En virtud de [10], Cap. IV, Teorema 27, resulta que E es semi-reflexivo.

A continuación daremos algunas condiciones suficientes para que un semigrupo verifique la propiedad A.

17. Proposición. *Si existe una función $\Phi \in B(S)$ estrictamente positiva y casi-convergente a 0, entonces S posee la propiedad A.*

Demostración. Sea $M > \text{Sup}\{\Phi(s) : s \in S\}$ y $\varphi(s) = 1 - M^{-1}\Phi(s)$. Entonces $0 < \varphi(s) < 1$ para todo $s \in S$ y φ es casi convergente a 1. Si se define

$$\alpha(s, k) = \varphi(s)^{k-1} - \varphi(s)^k = \varphi(s)^{k-1}[1 - \varphi(s)]$$

es claro que α verifica A 1 y A 2. Por otro lado

$$\mu_0(\alpha_k) \leqslant \mu_0(1 - \varphi) = 0$$

para toda media invariante a la izquierda, μ_0, sobre $B(S)$. Por tanto α verifica la propiedad A 3.

18. Corolario. *Si existe un homomorfismo Φ de S en el semigrupo multiplicativo* (0,1), *entonces S verifica la propiedad A.*

Demostración. Sea $s \in S$ y $\Phi(s) = \varrho$. Para todo $t \in S$ se tiene

$$_s\Phi(t) = \Phi(st) = \Phi(s)\,\Phi(t) = \varrho\,\Phi(t).$$

Entonces

$$0 \leqslant \mu_0(\Phi) = \mu_0(_s\Phi) = \varrho\,\mu_0(\Phi),$$

para toda media invariante a la izquierda, μ_0, sobre $B(S)$. Como $0 < \varrho < 1$, de lo anterior se deduce que $\mu_0(\Phi) = 0$. El corolario resulta de la proposición 17.

19. Corolario. *Sea S un semigrupo tal que*

$$S = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$$

en donde las funciones características χ_k de cada S_k son casi-convergentes a 0. *Entonces S verifica la propiedad A.*

Demostración. Definamos

$$\Phi(s) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\chi_k(s).$$

La serie converge uniformemente en S. Además $0 < \Phi(s) \leqslant 1$, para todo $s \in S$. Si μ_0 es una media invariante a la izquierda sobre $B(S)$, de la convergencia uniforme de esta serie resulta que

$$\mu_0(\Phi) = \lim \mu_0\left(\sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\chi_k\right) = 0.$$

El corolario resulta de la proposición 17.

Diremos que un semigrupo S es *transitivo a la izquierda* si para cada par de elementos s, t de S, existe $u \in S$ tal que $us = t$ o $ut = s$.

20. Corolario. *Sea S un semigrupo infinito numerable, transitivo a la izquierda y verificando la ley de cancelación a la derecha. Entonces S verifica la propiedad A. En particular, todo grupo numerable verifica la propiedad A.*

Demostración. Sea $S = \{s_1, s_2, \ldots\}$ y δ_i la función característica de s_i. Dados s_i y s_j, existe $u \in S$ tal que $us_i = s_j$. Por verificar S la ley de cancelación a la derecha, $ut \neq s_j$ si $t \neq s_i$. Por tanto ${}_u\delta_i = \delta_j$. Si μ_0 es una media invariante a la izquierda sobre $B(S)$, se tiene

$$\mu_0(\delta_j) = \mu_0({}_u\delta_i) = \mu_0(\delta_i).$$

Si fuese $\mu_0(\delta_i) = \alpha > 0$, entonces sería $\mu_0(1) = 1 \geqslant n\alpha$ para todo $n \in \mathbf{N}$, lo que es absurdo. Por tanto $\mu_0(\delta_i) = 0$ para todo $i \in \mathbf{N}$. Como $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{s_k\}$, se verifican las hipótesis del corolario 19.

21. Corolario. *Si G es un grupo topológico localmente compacto, no compacto, y σ-compacto, entonces G verifica la propiedad A.*

Demostración. Se puede poner

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} K_n,$$

donde los K_n son compactos. Bastará ver que la función característica de todo conjunto compacto es casi-convergente a 0, y aplicar el corolario 19. Sea V un entorno compacto de la unidad $e \in G$. Entonces existe una sucesión de puntos (a_n) en G tal que para $n \neq m$ se tiene $a_n V \cap a_m V = \emptyset$ (véase [4], pág. 195). Si μ_0 es una media invariante a la izquierda sobre $B(G)$, se tiene $\mu_0(\chi_{a_n V}) = \mu_0(\chi_V)$, y repitiendo el razonamiento del corolario 20 resulta que $\mu_0(\chi_V) = 0$. Si $K \subset G$ es un compacto arbitrario, existe un número finito de puntos $b_1, \dots, b_n \in G$ tales que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} b_i V.$$

Entonces $\chi_K \leqslant \sum_{i=1}^{n} \chi_{b_i V}$, luego

$$\mu_0(\chi_K) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu_0(\chi_{b_i V}) = n\,\mu_0(\chi_V) = 0.$$

22. Proposición. *Sea G un grupo y H un subgrupo normal de G. Si G/H verifica la propiedad A, entonces G verifica la propiedad A.*

Demostración. Sea

$$\alpha\colon G/H \times \mathbf{N} \to \mathbf{R}$$

verificando A 1, A 2 y A 3, y sea $\varphi : G \to G/H$ el hommorfismo canónico. Definamos

$$\beta : G \times \mathbf{N} \to \mathbf{R}$$

así: $\beta(s, k) = \alpha(\varphi(s), k)$. Es claro que β verifica A 1 y A 2. Sea $k \in N$ y μ_0 una media invariante a la izquierda sobre $B(G)$. La aplicación $f \to \mu_0(f \circ \varphi)$ de $B(G/H)$ en $\mathbf{R}$ es una media invariante a la izquierda (véase 4.4) y por tanto

$$\mu_0(\alpha_k \circ \varphi) = \mu_0(\beta_k) = 0,$$

lo que prueba A 3.

23. Corolario. *Todo grupo abeliano infinito verifica la propiedad A.*

Demostración. G contiene un subgrupo H tal que G/H es infinito numerable (véase [4], pág. 227). Por el corolario 20, G/H posee la propiedad A. El resultado se deduce de la proposición 22.

24. Proposición. *Sea G un grupo y H un subgrupo de G. Si H verifica la propiedad A, entonces G verifica la propiedad A.*

Demostración. Sea $\alpha : H \times \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ una aplicación con las propiedades A 1, A 2 y A 3. Sea $(g_\lambda)_{\lambda \in \varLambda} \subset G$ tal que $\bigcup_{\lambda \in \varLambda} Hg_\lambda = G$ y $g_{\lambda'} \notin Hg_\lambda$ para $\lambda' \neq \lambda$. Puesto que para cada $g \in G$ existe $\lambda \in \varLambda$ y $h \in H$ (únicos) tales que $g = hg_\lambda$, definimos

$$\tilde{\alpha}(g, k) = \alpha(h, k).$$

Es claro que $\tilde{\alpha} : G \times \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ verifica A 1 y A 2. Si μ es una media invariante a la izquierda sobre $B(G)$, sea μ_H la media invariante a la izquierda sobre $B(H)$ inducida por μ mediante la fórmula

$$\mu_H(f) = \mu(\tilde{f}),$$

donde $\tilde{f} \in B(G)$ es la función asociada a $f \in B(H)$ mediante la relación $\tilde{f}(g) = f(h)$, cuando $g = hg_\lambda$ (véase [4], pág. 234). Entonces $\mu_H(\alpha_k) = \mu(\tilde{\alpha}_k) = 0$, para cada $k \in \mathbf{N}$, y esto prueba que $\tilde{\alpha}$ verifica A 3.

25. Teorema. *Sea E un espacio vectorial localmente convexo, $\mathcal{U}$ la familia de los entornos simétricos de 0 de E para la topología débil y S un semigrupo tal que existe una aplicación $\Psi : S \to \mathcal{U}$ que cumple.*

25.1 *Para todo $V \in \mathcal{U}$ existe $s \in S$ tal que $\Psi(st) \subset V$, para todo $t \in S$. Entonces una condición necesaria y suficiente para que exista una media invariante a la izquierda, μ, sobre $B(S, E)$ es que E sea semi-reflexivo.*

DEMOSTRACIÓN. La suficiencia resulta del corolario 8. Para probar la necesidad, demostraremos que E es débilmente casi-completo. Para ello, bastará demostrar que toda red de Cauchy (para la topología débil) acotada, (y_V) con indices en el conjunto dirigido $\mathcal{U}$, es convergente (Véase [6], pág. 33). En efecto, sea $f(s) = y_{\Psi(s)}$, $y = \mu(f)$. Probaremos que $\lim y_V = y$ en la topología débil. Sea U un entorno de 0 en E para dicha topología, y V un entorno de 0 equilibrado, convexo y cerrado, contenido en U. Por ser (y_V) de Cauchy, existe $V_0 \in \mathcal{U}$ tal que si $V_1, V_2 \subset V_0$, entonces $y_{V_1} - y_{V_2} \in V$. Por 25.1, existe $s \in S$ tal que $\Psi(st) \subset V_0$, para todo $t \in S$. Entonces si $W \subset V_0$ se tiene

$$y_W - y = y_W - \mu(f) = y_W - \mu({}_sf) = \mu(y_W - {}_sf) \in V \subset U,$$

por ser V cerrado y convexo y verificarse

$$y_W - {}_sf(t) = y_W - y_{\Psi(st)} \in V, \quad \forall\, t \in S.$$

26. EJEMPLOS.

1. — Sea S el semigrupo multiplicativo de un anillo A. Cualquiera que sea el espacio localmente convexo E, la aplicación

$$\delta_0 : B(S, E) \to E$$

definida por $\delta_0(f) = f(0)$ para todo $f \in B(S, E)$, es una media invariante sobre $B(S, E)$. En virtud del teorema 16, S no verifica la propiedad A. Se puede comprobar también directamente, puesto que toda función $\varphi \in B(S)$ casi-convergente a 0 debe verificar $\varphi(0) = 0$, y por tanto no existe ninguna aplicación $\alpha : S \times \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ verificando $A\,2$ y $A\,3$.

2. — El ejemplo anterior muestra que existen semigrupos conmutativos infinitos que no poseen la propiedad A, y por tanto que no se puede extender el resultado del corolario 23 a semigrupos.

3. — Para medias reales se sabe que si S es un semigrupo, unión directa de una familia de subsemigrupos (T_α), la existencia de una

media invariante a la izquierda sobre cada $B(T_\alpha)$ implica la existencia de una media invariante a la izquierda sobre $B(S)$. Este resultado no es cierto en general para medias con valores en un espacio localmente convexo. En efecto, sea S un grupo abeliano infinito de torsión. Entonces S en unión directa de subgrupos finitos (nótese que todo conjunto finito de S engendra un subgrupo finito). Si E no es semi-reflexivo y es casicompleto para la topología de Mackey, no existe ninguna media invariante a la izquierda sobre $B(S, E)$, en virtud del corolario 23 y del teorema 16. Sin embargo, el ejemplo 3 (a) prueba que existen medias invariantes a la izquierda sobre $B(H, E)$ para todo subgrupo finito, H, de S.

4. — Si S es un semigrupo conmutativo se puede dirigir por la relación

$$s_1 \leqslant s_2 \quad \text{si y solo si existe} \quad t \in S \quad \text{tal que} \quad s_2 t = s_1.$$

Entonces la existencia de una red acotada de números reales estrictamente positivos, (α_s) con indices en S, convergente a 0, implica que S verifica la propiedad A. En efecto, es fácil ver que la función $\Phi(s) = \alpha_s$ es casi-convergente a 0, y basta tener en cuenta la proposición 17.

Obsérvese que si S es un grupo conmutativo, el orden introducido anteriormente es el trivial: $s \leqslant t$ para todo par s, t de elementos de S; evidentemente, no existe entonces ninguna red que cumpla las condiciones anteriores.

5. — Sea S el semigrupo multiplicativo de los números racionales diádicos de $(0,1)$. Si E es un espacio localmente convexo cuya topología débil es metrizable, existe una base $(V_s)_{s \in S}$ de entornos simétricos de 0 en la topología débil tal que $s \leqslant t$ implica $V_s \subset V_t$ (véase [4], pág. 68). Entonces, si se define $\Psi(s) = V_s$, es claro que se cumplen las hipótesis del teorema 25. Por tanto el teorema 25 da una caracterización de la semi-reflexividad para este tipo de espacios sin utilizar ninguna hipótesis de completitud.

Observemos que hasta ahora todos los subespacios X de $B(S, E)$ que hemos considerado, estaban constituidos por todas las funciones cuya imagen pertenecía a una cierta familia de acotados del espacio E. Sea entonces $\mathcal{B}$ una familia de conjuntos acotados de E que verifica

i) Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_1 + B_2 \subset B_3$.

ii) Todo $B \in \mathcal{B}$ es cerrado, convexo y equilibrado.

Como consecuencia de i) y ii) se deduce que para todo $B \in \mathcal{B}$ y para todo $\lambda \in \mathbf{R}$ existe un $B' \in \mathcal{B}$ tal que $\lambda B \subset B'$. Entonces el conjunto $X_{\mathcal{B}}$ formado por las funciones $f \in B(S, E)$ tales que $f(S)$ está contenido en algún $B \in \mathcal{B}$, es un subespacio vectorial invariante de $B(S, E)$.

Seguidamente nos ocupamos del problema de la caracterización de las familias de acotados $\mathcal{B}$ para las que existe una media invariante a la izquierda sobre $X_{\mathcal{B}}$.

Si B es un conjunto acotado, convexo y equilibrado de E, sea E_B el subespacio vectorial de E engendrado por B, dotado de la topología definida por el funcional de Minkowski, que es una norma sobre E_B. Se dice que B es completante, si E_B es un espacio de Banach. Se sabe que la topología del espacio normado E_B es más fina que la inducida por E. Para resolver el problema que nos hemos planteado, vamos a estudiar la relación entre las medias sobre $X_{\mathcal{B}}$ y sobre cada $B(S, E_B)$ $(B \in \mathcal{B})$. Para ello necesitaremos el siguiente resultado previo:

27. Proposición. *Sea F un subespacio vectorial de E, dotado de una topología localmente convexa más fina que la inducida por E, y tal que F posee un sistema fundamental de acotados convexos, cerrados en E. Sea X un subespacio vectorial de $B(S, F)$ que contiene a $X_0 \cap B(S, F)$, y X_1 el mismo conjunto X considerado como subespacio de $B(S, E)$. Entonces μ es una media sobre X si y solo si es una media sobre X_1.* (5)

Demostración. Puesto que para cada $f \in X$, la adherencia de $co[f(S)]$ en F está contenida en la adherencia de $co[f(S)]$ en E, es evidente que toda media μ sobre X también es una media sobre X_1.

Recíprocamente, sea μ una media sobre X_1. Existe una media μ_0 sobre $B(S)$ tal que $\mu(\alpha(s)x) = \mu_0(\alpha)x$ para todo $\alpha \in B(S)'$ y todo $x \in F$ (véase la demostración de la proposición 5 (b)). Para cada $f \in X$ definimos $\nu(f) \in F'^*$ por

$$\langle \nu(f), x' \rangle = \mu_0 \langle f, x' \rangle, \quad \forall x' \in F'.$$

Bastará probar que $\nu(f) = \mu(f) \in F$, puesto que entonces, como consecuencia de la definición de ν, se deducirá que $\mu(f)$ pertenece

(5) Como la inclusión de F en E es continua, todo acotado de F es un acotado en E, y por tanto X se puede considerar como subconjunto de $B(S, E)$.

a la envoltura convexa cerrada (en F) de $f(S)$, es decir, que μ es una media sobre X.

Procediendo de modo análogo a como se hizo en la demostración del lema 10, se prueba que $\overline{X_0 \cap X_1} \supset TB(S, E) \cap X_1$, y como consecuencia de ésto, razonando como en el teorema 12, se prueba que se verifica

$$\langle \mu(f), x' \rangle = \mu_0 \langle f, x' \rangle, \quad \forall f \in X_1 \quad \text{y} \quad \forall x' \in E'.$$

Para cada $y' \in E'$, su restricción a F (que denotaremos también por y') pertenece a F', luego se tiene;

$$\langle \nu(f), y' \rangle = \mu_0 \langle f, y' \rangle = \langle \mu(f), y' \rangle, \quad \forall y' \in E',$$

y por tanto $\nu(f) = \mu(f) \in E$. Como $f(S)$ es acotado en F, por hipótesis existe un acotado convexo $B \subset F$, cerrado en E, tal que $f(S) \subset B$. Entonces

$$\mu(f) \in \overline{\text{co}\,[f(S)]} \subset B \quad \text{(adherencia en } E\text{)},$$

luego $\mu(f) \in F$.

28. Corolario. *Si F es un subespacio vectorial cerrado de E y μ es una media sobre $B(S, E)$, su restricción a $B(S, F)$ es una media sobre este espacio.*

Demostración. Resulta inmediatamente de la proposición 27.

29. Corolario. *Sea B un subconjunto de E, acotado, convexo, cerrado y equilibrado, y $X = \{f \in B(S, E) : f(S)$ es acotado en $E_B\}$. Entonces μ es una media sobre el subespacio X de $B(S, E)$ si y solo si es una media sobre $B(S, E_B)$.*

Demostración. Nótese que se tiene la igualdad conjuntista

$$X = B(S, E_B),$$

y se cumplen las hipótesis de la proposición 27 con $F = E_B$.

30. Proposición. *Sea $B \subset E$ un conjunto acotado, convexo y equilibrado. Entonces E_B es un espacio de Banach reflexivo si y solo si B es $\sigma(E, E')$-compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Si B es $\sigma(E, E')$-compacto, es $\sigma(E, E')$-completo. Esto implica que E_B es un espacio de Banach (Véase [5], pág. 207). Sea S un semigrupo que verifique la propiedad A y

$$X = \{f \in B(S, E) : f(S) \text{ es acotado en } E_B\}.$$

Como X verifica las hipótesis de la proposición 6, se deduce que existe una media invariante a la izquierda sobre X. Como consecuencia del corolario 29, se deduce que existe una media invariante a la izquierda sobre $B(S, E_B)$, y del teorema 16 resulta entonces que E_B es reflexivo.

Recíprocamente, si E_B es un espacio de Banach reflexivo la bola unidad cerrada, B, de E_B es compacta para la topología débil $\sigma(E_B, (E_B)')$. Como la inclusión de E_B en E es continua, también es continua para las topologías débiles, y por tanto B es $\sigma(E, E')$-compacto.

31. TEOREMA. *Sea $\mathcal{B}$ una familia de acotados de E que verifica* i) *y* ii), *tal que cada $B \in \mathcal{B}$ es completante* (6). *Si S es un semigrupo que verifica la propiedad A, una condición necesaria y suficiente para que exista una media invariante a la izquierda sobre $X_{\mathcal{B}}$ es que cada espacio E_B $(B \in \mathcal{B})$ sea un espacio de Banach reflexivo.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que para cada $B \in \mathcal{B}$, E_B es reflexivo. De la proposición 30 se deduce que cada $B \in \mathcal{B}$ es $\sigma(E, E')$-compacto. De la definición de $X_{\mathcal{B}}$ y de la propiedad ii) de la familia $\mathcal{B}$ resulta que para todo $f \in X_{\mathcal{B}}$, la envoltura convexa, cerrada y equilibrada de $f(S)$ es débilmente compacta. La existencia de una media invariante a la izquierda sobre $X_{\mathcal{B}}$, resulta de la proposición 6.

Recíprocamente, supongamos que existe una media invariante a la izquierda μ sobre $X_{\mathcal{B}}$. La restricción de μ al subespacio

$$X = \{f \in X_{\mathcal{B}} : f(S) \text{ es acotado en } E_B\}$$

es una media invariante a la izquierda sobre X. Como consecuencia del corolario 29, dicha restricción también es una media invariante a la izquierda sobre $B(S, E_B)$. Como E_B es completo, del teorema 16 resulta que E_B es semi-reflexivo, y por tanto reflexivo.

(6) Esta condición se cumple si, por ejemplo, E es casicompleto para la topología de Mackey (Véase [9], Cap. I, 1.6).

32. Observación. De la proposición 30 y el teorema 31 se deduce que si $\mathcal{B}$ es una familia de acotados de E con las propiedades i) y ii) tal que cada $B \in \mathcal{B}$ es completante, una condición necesaria y suficiente para que exista una media invariante a la izquierda sobre $X_{\mathcal{B}}$ es que cada $B \in \mathcal{B}$ sea $\sigma(E, E')$-compacto.

33. Corolario. *Una condición necesaria y suficiente para que E sea semi-reflexivo es que para todo conjunto acotado, cerrado, convexo y equilibrado B de E, el espacio normado E_B sea reflexivo.*

Demostración. La familia $\mathcal{B}$ formada por todos los conjuntos acotados, convexos, cerrados y equilibrados de E, es un sistema fundamental de conjuntos acotados de E. Entonces E es semi-reflexivo si y solo si todo elemento $B \in \mathcal{B}$ es $\sigma(E, E')$-compacto. Pero en virtud de la proposición 30, esto es equivalente a que E_B sea un espacio reflexivo para todo $B \in \mathcal{B}$.

§ 5. Medias invariantes sobre grupos topológicos.

Sea G un grupo topológico y E un espacio localmente convexo. Designaremos por $C_a(G, E)$ (resp. $C_a(G)$) el subespacio invariante de $B(G, E)$ (resp. $B(G)$) formado por las aplicaciones continuas acotadas de G en E (resp. de G en $\mathbf{R}$). Sea H_0 el subespacio de $C_a(G, E)$ formado por las aplicaciones cuya imagen está contenida en un subespacio de dimensión finita de E, es decir, $H_0 = X_0 \cap C_a(G, E)$. Entonces se tiene una proposición análoga a la 6, cambiando X_0 por H_0 y $B(G, E)$ por $C_a(G, E)$. Si $T C_a(G, E) = T B(G, E) \cap C_a(G, E)$, y G es normal, se tiene que $\overline{H}_0 = T C_a(G, E)$, (7) y repitiendo el razonamiento del teorema 12 se prueba que toda media sobre un subespacio X de $C_a(G, E)$ que contenga a H_0, cumple la propiedad 6.2.

Si G es un grupo compacto, y si E es casicompleto, siempre existe una media invariante sobre $C_a(G, E)$ (véase ejemplo 3 (b)). Esto no es cierto si se prescinde de la hipótesis de compacidad sobre G, ya que se tiene:

34. Proposición. *Sea G un grupo localmente compacto, no compacto y σ-compacto, tal que existe una media invariante a la izquierda sobre $C_a(G)$, y E un espacio localmente convexo casicompleto para la*

(7) Basta proceder como en el lema 10, tomando como funciones α_k una partición continua de la unidad subordinada al recubrimiento abierto

$$\{f^{-1}(y_k + V) : 1 \leqslant k \leqslant m\}.$$

topología de Mackey. Una condición necesaria y suficiente para que E sea semi-reflexivo es que exista una media invariante a la izquierda sobre $C_a(G, E)$.

Demostración. La necesidad resulta del corolario 8. Para demostrar la suficiencia se procede de modo análogo a como se hizo en el corolario 21. Si (K_n) es una sucesión expansiva de compactos en G tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = G$, sea f_n una función continua con valores en $[0, 1]$, de soporte compacto, tal que $f_n(x) = 1$, $\forall x \in K_n$. Es fácil ver que para toda media invariante a la izquierda, μ_0, sobre $C_a(G)$ es $\mu_0(f_n) = 0$ (la demostración es análoga a la efectuada en el corolario 21 para probar que la función característica de un compacto de G es casi-convergente a 0). Si se define

$$\Phi(s) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} 4^{-n} f_n(s),$$

es claro que Φ es continua y que $0 < \Phi(s) < 1$, para todo $s \in G$. Para toda media invariante a la izquierda, μ_0, sobre $C_a(G)$ se verifica que $\mu_0(\Phi) = 1$. Si ahora se define

$$\alpha(s, k) = \Phi(s)^{k-1}(1 - \Phi(s))$$

y se razona como en la proposición 16, lo único que hay que comprobar es que para toda sucesión acotada (x_k) en E, la función

$$f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(s, k)\, x_k$$

es continua. En efecto, si $s_0 \in G$ y V es un entorno compacto de s_0, sea $r = \operatorname{Sup}\{\Phi(s) : s \in V\} < 1$. Si p pertenece a la familia de seminormas que define la topología de Mackey de E, se tiene:

$$p(\alpha(s, k)\, x_k) \leqslant M\, |\Phi(s)^{k-1}(1 - \Phi(s))| \leqslant M r^{k-1}, \quad \forall s \in V$$

donde $M = \operatorname{Sup}\{p(x_k) : k \in \mathbf{N}\}$. Entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} p(\alpha(s, k)\, x_k) \leqslant M \sum_{k=1}^{\infty} r^{k-1}, \quad \forall s \in V.$$

Esto prueba que la serie que define f converge, para la topología de Mackey, uniformemente en V. Como las funciones $s \to \alpha(s, k)\, x_k$

son continuas para esta topología, resulta que $f|_V$ es continua en V para la topología de Mackey. Entonces f es continua en s_0 para la topología dada inicialmente en E.

35. Definición. Una función $f \in C_a(G, E)$ se dice que es *débilmente casi-periódica* si el conjunto $\{f_s : s \in G\}$ es relativamente compacto para la topología débil de $C_a(G, E)$.

Designaremos por $W(G, E)$ (resp. $W(G)$) el conjunto de las funciones de $C_a(G, E)$ (resp. $C_a(G)$) que son débilmente casi-periódicas. Es obvio que $W(G, E)$ es un subespacio invariante de $C_a(G, E)$ que contiene las funciones constantes. Se sabe ([3], pág. 38) que cuando G es localmente compacto existe una única media invariante a la izquierda sobre $W(G)$ (aunque no existan medias invariantes sobre $C_a(G)$). Este resultado se generaliza parcialmente (sin asegurar la unidad) para $W(G, E)$:

36. Proposición. *Si G es localmente compacto y E es casicompleto para la topología de Mackey, existe una media invariante a la izquierda sobre $W(G, E)$.*

Demostración. Sea e la unidad de G y $\delta_e : C_a(G, E) \to E$ la aplicación lineal continua definida por $\delta_e(f) = f(e)$. Como δ_e es débilmente continua y $\delta_e(\{f_s : s \in G\}) = f(G)$, resulta que para cada función $f \in W(G, E)$, el conjunto $f(G)$ es débilmente relativamente compacto en E. Si $x' \in E'$, la aplicación

$$\varphi_x : C_a(G, E) \to C_a(G)$$

definida por $\varphi_{x'}(f) = \langle f, x' \rangle$, es continua para las topologías débiles de los dos espacios, y entonces $\varphi_{x'}[W(G, E)] \subset W(G)$, para todo $x' \in E'$.

Sea μ_0 la única media invariante a la izquierda sobre $W(G)$. Para cada $f \in W(G, E)$, sea $\mu(f) \in E'^*$ definido por

$$\langle \mu(f), x' \rangle = \mu_0 \langle f, x' \rangle, \quad \forall x' \in E'.$$

Por ser $f(G)$ relativamente compacto para la topología débil de E, se prueba como en el corolario 7 que $\mu(f) \in E$ y que μ es una media invariante a la izquierda.

37. Observación. Para cada $x \in E$, la aplicación lineal

$$\Psi_x : C_a(G) \to C_a(G, E)$$

definida por $\Psi_x(\alpha)(s) = \alpha(s)x$ es continua para las topologías débiles de los dos espacios, por lo cual $\Psi_x(\alpha) \in W(G, E)$ para cada $\alpha \in W(G)$. Entonces si ν es otra media invariante a la izquierda sobre $W(G, E)$, se tiene:

$$\nu(\Psi_x(\alpha)) \in \overline{\text{co}\,[\alpha(S)\,x]} = \overline{\text{co}\,(\alpha(S))}\,x,$$

luego si $x \neq 0$, existe un único $\nu_{0x}(\alpha) \in \overline{\text{co}\,(\alpha(S))}$ tal que

$$\nu(\Psi_x(\alpha)) = \nu_{0x}(\alpha)\,x.$$

Como en la proposición 6 se prueba que μ_{0x} es una media invariante a la izquierda sobre $W(G)$, y por tanto, en virtud de la unidad de μ_0, que $\nu_{0x} = \mu_0$ para todo $x \in E - \{0\}$. En consecuencia μ y ν coinciden sobre el subespacio vectorial de $C_a(G, E)$ engendrado por las funciones $\alpha(s)x$ con $\alpha \in W(G)$ y $x \in E$. Si este subespacio fuese denso en $W(G, E)$, se podría probar la fórmula 6.2 para funciones $f \in W(G, E)$, y entonces se deduciría que $\mu = \nu$ sobre $W(G, E)$.

§ 6. El espacio de las medias.

Igual que en los párrafos anteriores, S designará un semigrupo y E un espacio localmente convexo. En todo este párrafo, X designará un subespacio de $B(S, E)$ que contenga a X_0. Si $\mathcal{T}$ es una topología localmente convexa sobre E compatible con la dualidad (E, E'), designaremos por $X_{\mathcal{T}}$ al espacio X dotado de la topología inducida por la topología $\mathcal{T}^*$ sobre $B(S, E)$ asociada a $\mathcal{T}$, y por E_τ el espacio E dotado de la topología $\mathcal{T}$. Entonces $\mathcal{L}(X_\tau, E_\tau)$ designará el espacio vectorial de las aplicaciones lineales continuas de $X_{\mathcal{T}}$ en $E_{\mathcal{T}}$, dotado de la topología de la convergencia simple, y $\mathcal{M}(X_\tau)$ el subconjunto de $\mathcal{L}(X_\tau, E_\tau)$ formado por todas las medias sobre X, dotado de la topología relativa. En particular, cuando $E = \mathbf{R}$, escribiremos simplemente $\mathcal{M}$ en lugar de $\mathcal{M}(B(S))$. Nótese que en este caso la topología de $\mathcal{M}$ es precisamente la inducida por la topología débil de $B(S)'$. Cuando $\mathcal{T}$ sea la topología dada inicialmente en E, omitiremos el subindice $\mathcal{T}$ en todos los espacios que se acaban de definir, escribiendo más brevemente $\mathcal{L}(X, E)$, $\mathcal{M}(X)$, etc.

Una media μ sobre X diremos que es una *media finita* si existen números reales positivos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ y elementos $s_1, \ldots, s_n$ de S tales que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ y $\mu(f) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(s_i)$, para todo $f \in X$. Designaremos por $\Sigma(X_\tau)$ (resp. Σ) el conjunto de las medias finitas sobre X (resp. $B(S)$) con la topología inducida por $\mathcal{M}(X_\tau)$ (resp. $\mathcal{M}$). Se sabe que $\mathcal{M}$ es un conjunto convexo y débilmente compacto de $B(S)'$, y que $\overline{\Sigma} = \mathcal{M}$. Para medias con valores vectoriales, se tiene:

38. Proposición. *$\mathcal{M}(X)$ es un subconjunto cerrado, convexo y equicontinuo de $\mathcal{L}(X, E)$. Si E es casicompleto, entonces $\mathcal{M}(X)$ es completo.*

Demostración. Sea (μ_i) una red de medias sobre X que converge a $\mu \in \mathcal{L}(X, E)$. Entonces $\lim_i \mu_i(f) = \mu(f)$ para todo $f \in X$, y por tanto $\mu(f) \in \overline{\text{co}\,(f(S))}$. Esto prueba que μ es una media sobre X y por tanto $\mathcal{M}(X)$ es cerrado.

Sea ahora U un entorno de 0 en E, que contendrá un conjunto de la forma $\{x \in E : p(x) < \varepsilon\}$, donde $\varepsilon > 0$ y p pertenece a la familia filtrante de seminormas que define la topología de E. Sea $V = \{f \in X : p^*(f) < \varepsilon\}$. Para cada $\mu \in \mathcal{M}(X)$ se tiene:

$$p(\mu(f)) \leqslant p^*(f) < \varepsilon, \quad \forall f \in V$$

(véase observación 2 (a)), es decir, se cumple que $\mu(V) \subset U$ para toda media μ sobre X, y esto prueba que $\mathcal{M}(X)$ es equicontinuo.

Que $\mathcal{M}(X)$ es convexo es inmediato, y el último resultado se deduce de lo que se acaba de probar y de [9], Cap. III, 4.4.

39. Observación. Si se considera en E otra topología localmente convexa τ compatible con la dualidad (E, E'), sabemos que el conjunto $\mathcal{M}(X_\tau)$ coincide con $\mathcal{M}(X)$ (ver observación 2 (b)) y entonces la proposición anterior también se verifica para $\mathcal{M}(X_\tau)$.

Como consecuencia de la proposición 5 (b) y del teorema 12, se puede establecer una aplicación $\Phi : \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}$, poniendo $\Phi(\mu) = \mu_0$, donde μ_0 es la única media sobre $B(S)$ que cumple

$$\langle \mu(f), x' \rangle = \mu_0 \langle f, x' \rangle, \quad \forall f \in X \text{ y } x' \in E'.$$

De la definición, resulta inmediatamente que Φ es inyectiva.

40. Proposición. *Sea τ una topología localmente convexa sobre E, compatible con la dualidad (E, E'). Entonces la aplicación $\Phi : \mathcal{M}(X_\tau) \to \mathcal{M}$ es continua.*

DEMOSTRACIÓN. Sea (μ_i) una red de medias sobre X_τ convergente a $\mu \in \mathcal{M}(X_\tau)$ en la topología de este espacio. Entonces para cada $f \in X$ se tiene $\lim_i \mu_i(f) = \mu(f)$ (en la topología τ). Sea φ una función de $B(S)$ y $x \in E$, $x' \in E'$ tales que $\langle x, x' \rangle = 1$; designemos por g la función $s \to \varphi(s)x$, que cumple $\langle g, x' \rangle = \varphi$.

Entonces se tiene

$$\Phi(\mu_i)(\varphi) = \Phi(\mu_i)\langle g, x' \rangle = \langle \mu_i(g), x' \rangle,$$

luego

$$\lim_i \Phi(\mu_i)(\varphi) = \langle \mu(g), x' \rangle = \Phi(\mu)(\varphi)$$

y esto prueba que $\Phi(\mu) = \lim_i \Phi(\mu_i)$ en la topología de $\mathcal{M}$, y por tanto la continuidad de Φ para esta topología.

41. PROPOSICIÓN. *Si Φ es sobre, la aplicación inversa Φ^{-1} de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{M}(X_\sigma)$ es continua, donde σ es la topología débil de E.*

DEMOSTRACIÓN. Sea (μ_{0i}) una red de medias reales que converge a μ_0 en $\mathcal{M}$. Entonces $\lim_i \mu_{0i}(\varphi) = \mu_0(\varphi)$ para cada $\varphi \in B(S)$. Si $\mu_i = \Phi^{-1}(\mu_{0i})$ y $\mu = \Phi^{-1}(\mu_0)$, para todo $f \in X$ se verifica

$$\lim_i \langle \mu_i(f), x' \rangle = \lim_i \mu_{0i}\langle f, x' \rangle = \mu_0\langle f, x' \rangle = \langle \mu(f), x' \rangle,$$

cualquiera que sea $x' \in E'$, lo cual prueba que para todo $f \in X$ la red $(\mu_i(f))$ converge a $\mu(f)$ en la topología débil de E.

42. COROLARIO. *Las siguientes propiedades son equivalentes:*

42.1 *Φ es sobre.*

42.2 *$\mathcal{M}(X_\sigma)$ es compacto.*

Además, cada una de ellas implica

42.3 $\overline{\Sigma(X_\sigma)} = \mathcal{M}(X_\sigma)$.

DEMOSTRACION. Si Φ es sobre, de las proposiciones 40 y 41 se deduce que Φ es un homeomorfismo entre $\mathcal{M}(X_\sigma)$ y $\mathcal{M}$. Como $\mathcal{M}$ es compacto, resulta que $\mathcal{M}(X_\sigma)$ también lo es. Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{M}(X_\sigma)$ es compacto, y sea $\mu_0 \in \mathcal{M}$. Entonces existe una red (μ_{0i}) de medias reales finitas que converge a μ_0 en $\mathcal{M}$. Si

$\mu_{0i}(\varphi) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi(s_k)$ para todo $\varphi \in B(S)$, entonces definimos $\mu_i \in \Sigma(X_\sigma)$ por $\mu_i(f) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(s_k)$. Por la hipótesis, existe una subred (μ_α) de (μ_i) convergente a una media $\mu \in \mathcal{M}(X_\sigma)$. Sea entonces $\mu_{0\alpha} = \Phi(\mu_\alpha)$. Como $(\mu_{0\alpha})$ es una subred de (μ_{0i}), se tiene también que $\lim_\alpha \mu_{0\alpha} = \mu_0$, pero $\lim_\alpha \Phi(\mu_\alpha) = \Phi(\mu)$ por ser continua Φ, luego $\Phi(\mu) = \mu_0$, es decir, Φ es sobre.

Por último, si suponemos que se verifica 42.1, por ser Φ un homeomorfismo, como consecuencia de que $\Phi(\Sigma(X_\sigma)) = \Sigma$ se deduce:

$$\Phi(\overline{\Sigma(X_\sigma)}) = \overline{\Phi(\Sigma(X_\sigma))} = \overline{\Sigma} = \mathcal{M} = \Phi(\mathcal{M}(X_\sigma)),$$

luego $\overline{\Sigma(X_\sigma)} = \mathcal{M}(X_\sigma)$.

43. Ejemplo. Si E es casicompleto y $X = TB(S, E)$, o si E es semi-reflxivo y $X = B(S, E)$, del corolario anterior y del corolario 14 se deduce que $M(X_\sigma)$ es compacto.

44. Teorema. *Sea S un semigrupo que es unión directa de una familia (S_α) de subsemigrupos y E un espacio localmente convexo. Sea X un subespacio invariante a la izquierda de $B(S, E)$, tal que $\mathcal{M}(X_\sigma)$ es compacto, y X_α el subespacio de $B(S_\alpha, E)$, formado por las restricciones de las funciones de X a S_α. Entonces, si existe una media invariante a la izquierda sobre cada X_α, existe también una media invariante a la izquierda sobre X.*

Demostración. Sea μ_α una media sobre X_α, y $\mu_{0\alpha}$ la media inducida por μ_α sobre $B(S_\alpha)$. Se sabe ([4], pág. 232, teor. 17.6) que entonces existe una media invariante a la izquierda, μ_0, sobre $B(S)$. Por el corolario 42, existe una media μ sobre X tal que $\Phi(\mu) = \mu_0$. Es claro que μ es invariante a la izquierda.

45. Observación. El ejemplo 26.3 prueba que el teorema 44 no es cierto en general, si se prescinde de la hipótesis de compacidad.

BIBLIOGRAFIA

[1] BOMBAL, F.: *Medidas invariantes con valores en A-módulos normados.* Tesis Doctoral. Memorias del Instituto Jorge-Juan, C. S. I. C., Madrid.

[2] DIXMIER, J.: *Les moyennes invariantes dans les semigroupes et leurs applications.* Act. Sci. Math. Szeged, *12* A, 1950, 213-227.

[3] GREENLEAF, F. P.: *Invariant means on topological groups.* Van Nostrand, New York, 1969.

[4] HEWITT, E. AND ROSS, K. A.: *Abstract Harmonic Analysis*, vol I. Springer-Verlag, Berlin, 1963.

[5] HORVÁTH, J.: *Topological Vector Spaces and Distributions*, vol I. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1966.

(6] KÖTHE, G.: *Topological Vector Spaces*, I. Springer-Verlag, Berlin, 1969.

[7] NACHBIN, L.: *Elements of approximation theory.* Van Nostrand, Princeton, 1967.

[8] RODRIGUEZ-SALINAS, B.: *El problema de la medida.* Memorias del Instituto Jorge-Juan, C. S. I. C., Madrid.

[9] SCHAEFER, H.: *Topological Vector Spaces.* Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[10] VERA, G.: *Limites generalizados en A-módulos.* Tesis Doctoral. Aparecerá en las Memorias del Instituto Jorge-Juan, C. S. I. C., Madrid.

Departamento de Teoría de Funciones
Facultad de Ciencias
Universidad Complutense