CARACTERISTICA DE EULER Y CATEGORIAS DE FRACCIONES

por

MANUEL CASTELLET

0. — *Introducción*

En [1] Eckmann y Maumary dan una descripción puramente geométrica del grupo $E(X)$ de los tipos simples de homotopía asociado a un CW-complejo X. Esta descripción utiliza en el fondo únicamente consideraciones categoriales; ésto motivó que, independientemente, Siebenmann y Eckmann [2] hicieran un estudio estrictamente categorial del grupo $E(X)$, partiendo de una categoría $\mathscr{C}$ y una clase de morfismos cerrada Σ, sujetas a ciertas condiciones adicionales: (a) las clases de isomorfía de objetos de $\mathscr{C}$ forman un conjunto; b) si $f, g\colon X \to Y$ son morfismos en $\mathscr{C}$ y existe un $s : X' \to X$, $s \in \Sigma$, tal que $fs = gs$, entonces existen $u, v \in \Sigma$ con $uf = vg$; c) la *categoría* $\mathscr{C}$ posee «pushouts»).

Un isomorfismo $h\colon Y \to Z$ de la categoría de fracciones $\mathscr{C}(\Sigma^{-1})$ se llama simple si se puede poner como composición de elementos de Σ y de sus inversos. Entonces si X es un objeto de $\mathscr{C}$, Eckmann define $A(X)$ como el conjunto de clases de morfismos $f\colon X \to Y$ de $\mathscr{C}(\Sigma^{-1})$ por la siguiente relación: $f : X \to Y$ y $g : X \to Z$ son equivalentes si existe un isomorfismo simple $h : Y \to Z$ tal que $g = hf$. $E(X)$ es entonces el subconjunto de $A(X)$ formado por los elementos que admiten como representante un isomorfismo de $\mathscr{C}(\Sigma^{-1})$.

El resultado esencial de [2] es: «A (resp. E) es un funtor de la categoría $\mathscr{C}$ en la de los monoides (resp. grupos) abelianos, que factoriza a través de $\mathscr{C}(\Sigma^{-1})$».

En particular todo lo anterior se aplica a la categoría $\mathscr{C}$ de los CW-complejos finitos e inclusiones celulares, tomando como Σ la familia de todas las expansiones (es decir, la menor familia de inclusiones que contiene todas las expansiones elementales y sus inversos y es cerrada por composición); (ver [1]). Entonces $\mathscr{C}(\Sigma^{-1})$ es equivalente a la categoría de los CW-complejos finitos y clases de homotopía de aplicaciones celulares.

En el presente trabajo parto de este punto de vista categorial y demuestro que bajo hipótesis adicionales para la categoría $\mathscr{C}$ (por ejemplo, entre otras, que $\mathscr{C}$ sea una subcategoría de una categoría $\mathscr{D}$ con productos), se puede asociar a $\mathscr{C}$ un anillo conmutativo con unidad $R(\mathscr{C})$ y una aplicación $\Phi : Ob\ \mathscr{C} \to R(\mathscr{C})$ que en cierto modo es natural. En particular, en la situación topológica mencionada, $\mathscr{C}$ es la categoría de los CW-complejos finitos e inclusiones celulares (el hecho de que en $\mathscr{C}$ no existan productos es lo que motiva esencialmente la introducción de la categoría $\mathscr{D}$); resulta entonces que $R(\mathscr{C})$ es el anillo de los enteros (módulo un factor de carácter trivial) y Φ asigna a cada CW - complejo finito su característica de Euler.

Las definiciones y resultados referentes a una categoría de fracciones pueden encontrarse en [3].

1. — *La aplicación* $\Phi : Ob\ \mathscr{C} \to R(\mathscr{C})$

Sea $\mathscr{C}$ una categoría y Σ una familia de morfismos de $\mathscr{C}$ en las condiciones de [2].

En todo este párrafo supondremos que $\mathscr{C}$ es una subcategoría de una categoría $\mathscr{D}$ y que se verifican las siguientes condiciones:

a) Las clases de isomorfía de objetos de $\mathscr{D}$ forman un conjunto,

b) $\mathscr{D}$ posee un objeto final 0,

c) $\mathscr{D}$ posee productos finitos,

d) si $s \in \Sigma$ y $X \in$ Ob $\mathscr{D}$, entonces $s \times 1_X \in \Sigma$,

e) si $f \in$ Mor $\mathscr{C}$, entonces $f \times 1_X \in$ Mor $\mathscr{C}$ para todo $X \in$ Ob $\mathscr{C}$,

f) para todo $Y \in$ Ob $\mathscr{C}$ el funtor producto cartesiano por Y conmuta con la formación de «pushouts»,

g) $\mathscr{D}(\Sigma^{-1})$ existe y es una categoría equivalente a $\mathscr{C}(\Sigma^{-1})$; en particular Ob $\mathscr{C}$ = Ob $\mathscr{D}$.

Construimos en primer lugar un anillo $R(\mathscr{C})$ de la siguiente manera:

Sea $F(\mathscr{D})$ el grupo abeliano libre sobre el conjunto de clases de isomorfía de objetos de $\mathscr{D}$, y $S(\mathscr{C})$ el subgrupo de $F(\mathscr{D})$ engendrado por los elementos de la forma

$\overline{T} + \overline{V} - \overline{U} - \overline{O}$, donde

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & U \arrow[d, "g'"] \\ 0 \arrow[r, "h'"] & V \end{tikzcd} \qquad (*)$$

es un «pushout» en $\mathscr{C}$. ($\overline{T}$, ... indica la clase de isomorfía de T, ...).

$F(\mathscr{D})$ puede dotarse de una estructura de anillo conmutativo con unidad mediante el producto $\overline{X} \cdot \overline{Y} = \overline{X \times Y}$.

1.1. *Lema.* $S(\mathscr{C})$ es un ideal del anillo $F(\mathscr{D})$.

En efecto, sea $\overline{W} \in F(\mathscr{D})$ y $\overline{T} + \overline{V} - \overline{U} - \overline{O} \in S(\mathscr{C})$. En virtud de las hipótesis e) y f)

$$\begin{tikzcd} O \times W \arrow[r, "h' \times 1_W"] \arrow[d] & V \times W \arrow[d] \\ O \arrow[r] & D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T \times W \arrow[r, "h \times 1_W"] \arrow[d] & U \times W \arrow[d] \\ O \arrow[r] & D \end{tikzcd}$$

son sendos «pushouts» en $\mathscr{C}$, de donde resulta

$$\overline{T \times W} + \overline{V \times W} - \overline{U \times W} - \overline{O \times W} \in S(\mathscr{C}),$$

es decir $(\overline{T} + \overline{V} - \overline{U} - \overline{O}).\ \overline{W} \in S(C)$.

1.2. *Definición.* $R(\mathscr{C}) = F(\mathscr{D})/S(\mathscr{C})$, que es un anillo conmutativo y con elemento unidad.

1.3. *Definición.* Φ: Ob $\mathscr{C} \rightarrow R(\mathscr{C})$ es la aplicación que asigna a cada objeto X de $\mathscr{C}$ la clase de $\overline{X}$ en $R(\mathscr{C})$.

1.4. *Proposición.* Se verifican las siguientes propiedades:

(i) Si X es isomorfo a Y en $\mathscr{D}$, entonces $\Phi(X) = \Phi(Y)$.

(ii) En todo «pushout» como (*) se tiene

$$\Phi(T) + \Phi(V) = \Phi(U) + \Phi(0)$$

(iii) $\Phi(X \times Y) = \Phi(X) . \Phi(Y)$.

1.5. *Nota.* La definición de $S(\mathscr{C})$, y por tanto la de $R(\mathscr{C})$, está sugerida por la definición del grupo de Grothendieck de haces sobre un espacio (véase [4]), haciendo abstracción a una categoría arbitraria y reemplazando las sucesiones exactas de haces por «pushouts».

2. — *Interpretación topológica*

Sea $\mathscr{C}$ la categoría de los CW-complejos finitos e inclusiones celulares y $\mathscr{D}$ la de los CW-complejos finitos y aplicaciones celulares.

Designemos por B^n la bola unidad en $\mathbf{R}^n$, por S^{n-1} su borde dividido en dos hemisferios B^{n-1}_+ y B^{n-1}_- que se cortan en S^{n-2}. Consideramos B^n dotado de la siguiente estructura de CW-complejo: el *k-ésimo* esqueleto de B^n es: 0 para $k \leq n - 2$, S^{n-1} para $k = n - 1$, B^n para $k \geq n$.

Dado un CW-complejo finito X consideremos el CW-complejo Y obteniendo uniendo a X dos celdas e^{n-1}, e^n de manera que exista una aplicación φ: $B^n \to Y$ tal que: a) $\varphi(B^{n-1}_+) \subset X^{n-1}$, b) $\varphi(S^{n-2}) \subset X^{n-2}$, c) $\varphi|\text{int } B^n$ es un homeomorfismo sobre e^n, d) $\varphi|intB^{n-1}_-$ es un homeomorfismo sobre e^{n-1}.

Entonces la inclusión i: $X \to Y$, que es una equivalencia homotópica, se llama una expansión elemental (véase [1]).

Designemos por Σ la clase de morfismos de $\mathscr{C}$ formada por todas las expansiones (es decir, composiciones de expansiones elementales y sus inversos). Entonces las categorías de fracciones $\mathscr{C}(\Sigma^{-1})$ y $\mathscr{D}(\Sigma^{-1})$ son equivalentes a la categoría homotópica $\mathscr{H}\mathscr{D}$ de los CW-complejos finitos (véase [2]).

2.1. *Lema.* Las categorías $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ y la familia de morfismos Σ verifican las condiciones exigidas en 1.

Todas las condiciones resultan fácilmente de resultados conocidos sobre CW-complejos finitos. Obsérvese que la categoría $\mathscr{C}$ no posee siempre «pushouts»; de hecho el «pushout» de dos inclusiones debe tomarse en $\mathscr{D}$, pero está en $\mathscr{C}$. Esta pequeña complicación no afecta para nada al argumento general.

Podemos por tanto considerar el anillo $R(\mathscr{C})$ y la aplicación Φ: Ob $\mathscr{C} \to R(\mathscr{C})$ definidos en 1. Vamos a demostrar que, módulo un cierto ideal I, $R(\mathscr{C})$ es el anillo z de los enteros y la aplicación Φ: Ob $\mathscr{C} \to \widetilde{R}(\mathscr{C}) = R(\mathscr{C})/I$ inducida por Φ asocia a cada CW-complejo finito su característica de Euler.

En primer lugar definimos I, y por tanto $\widetilde{R}(\mathscr{C})$, y demostramos que es natural pasar al cociente $R(\mathscr{C})/I$.

2.2. *Definición.* I es el ideal de $R(\mathscr{C})$ engendrado por los elementos $\Phi(B^1) - \Phi(0)$, $\Phi(S^0) - 2\,\Phi(0)$.

La siguiente proposición justifica en cierto modo la definición del anillo $\widetilde{R}(\mathscr{C})$.

2.3. *Proposición.* Se verifican las siguientes relaciones

(i) $$\widetilde{\Phi}(B^n) = \widetilde{\Phi}(0) \text{ para todo } n,$$

(ii) $$\widetilde{\Phi}(S^n) = \begin{cases} 2\,\widetilde{\Phi}(0) & \text{para } n \text{ par} \\ 0 & \text{para } n \text{ impar.} \end{cases}$$

Demostración:

Procedemos por inducción sobre n.

Para $n = 1$ la proposición es trivial por la construcción de $\widetilde{R}(\mathscr{C})$. Supongamos que las relaciones (i), (ii) valen para todo $k \leq n$.

(i) Consideremos el «pushout»

$$\begin{array}{ccc} B^n \times \mathring{B}^1 \cup 0 \times B^1 & \longrightarrow & B^n \times B^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & B^{n+1} \end{array}$$

Entonces, por 1.4, se tiene

$$\widetilde{\Phi}(B^{n+1}) + \widetilde{\Phi}(B^n \times \mathring{B}^1 \cup 0 \times B^1) = \widetilde{\Phi}(B^n \times B^1) + \widetilde{\Phi}(0),$$

y también

$$\widetilde{\Phi}(B^n \times B^1) = \widetilde{\Phi}(B^n) \cdot \widetilde{\Phi}(B^1);$$

pero por construcción $\widetilde{\Phi}(B^n \times \mathring{B}^1 \cup 0 \times B^1) = \widetilde{\Phi}(0)$.

Así pues

$$\widetilde{\Phi}(B^{n+1}) = \widetilde{\Phi}(B^n) \cdot \widetilde{\Phi}(0) + \widetilde{\Phi}(0) - \widetilde{\Phi}(0) = \widetilde{\Phi}(0).$$

(ii) Consideremos el «pushout»

$$\begin{array}{ccc} S^n & \longrightarrow & B^{n+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & S^{n+1} \end{array}$$

Entonces, por 1.4 y la hipótesis de inducción, se tiene

$$\widetilde{\Phi}(S^{n+1}) = \widetilde{\Phi}(B^{n+1}) + \widetilde{\Phi}(0) - \widetilde{\Phi}(S^n) = 2\,\widetilde{\Phi}(0) - \widetilde{\Phi}(S^n) =$$

$$= \begin{cases} 2\,\widetilde{\Phi}(0) - 2\,\widetilde{\Phi}(0) = 0 & \text{si } n+1 \text{ es impar} \\ 2\,\widetilde{\Phi}(0) - 0 = 2\,\widetilde{\Phi}(0) & \text{si } n+1 \text{ es par.} \end{cases}$$

2.4. *Proposición.* El anillo $\widetilde{R}(\mathscr{C})$ es isomorfo al anillo z de los números enteros.

Demostración:

Puesto que todo CW-complejo finito X se puede obtener por adjunción de celdas, resulta, en virtud de la proposición 2.3, que $\widetilde{\Phi}(X)$ ha de ser un multiplo de $\widetilde{\Phi}(0)$. Pongamos $\widetilde{\Phi}(X) = \mu(X)\,\widetilde{\Phi}(0)$. Entonces la aplicación,

$$\widetilde{R}(\mathscr{C}) \longrightarrow \mathbf{Z}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \widetilde{\Phi}(X_i) \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \mu(X_i)$$

es un isomorfismo de anillos, como se prueba fácilmente.

2.5. *Teorema*. Para todo CW-complejo finito X, $\mu(X)$ es su característica de Euler.

Demostración:

La aplicación

$$\mu\colon \mathrm{Ob}\,\mathscr{C} \longrightarrow \mathbf{Z}$$
$$X \longrightarrow \mu(X)$$

verifica las siguientes condiciones:

a) Si X es isomorfo a Y, entonces $\mu(X) = \mu(Y)$,

b) $\mu(0) = 1$,

c) En un «pushout» como (*) de 1, se tiene

$$\mu(T) + \mu(V) = \mu(U).$$

Estas condiciones son suficientes, según C. Watts ([5] teorema 1), para que la aplicación μ coincida con la característica de Euler.

BIBLIOGRAFIA

[1] B. Eckmann - S. Maumary, *Le groupe des types simples d'homotopie*. Essays on Topology. Springer. (Berlin 1970).

[2] B. Eckmann, *Simple homotopy type and categories of fractions*. Symposia Math. 5 (1971), 285-299.

[3] P. Gabriel - M. Zisman, *Calculus of fractions and homotopy theory*. Ergeb. Math. Bd 35. Springer (Berlin 1967).

[4] A. Borel - J. P. Serre, *Le théorème de Riemann-Roch*. Bull. Soc. Math. France, 86 (1958), 97-136.

[5] C. *E*. Watts, *On the Euler characteristic of polyhedra*. Proc. A. M. S. 13 (1962) 304-306.