LA CATEGORIA $\underline{A}^{\mathbf{T}}$

por

J. R. CARUNCHO CASTRO

El principal objeto del presente trabajo es el estudio de la exactitud de la categoría de $\mathbf{T}$-algebras, $\underline{A}^{\mathbf{T}}$, sobre un triple $\mathbf{T} = (T; \eta, \mu)$, así como el estudio de que propiedades de la categoría $\underline{A}^{\mathbf{T}}$ pueden ser obtenidas en la categoría $\underline{A}$. Un resultado de Eilenberg-Moore [3] resuelve este problema en el caso de que $\underline{A}$ es abeliana. Las definiciones de triple, algebra y de la categoría $\underline{A}^{\mathbf{T}}$ asi como sus propiedades pueden verse en [1] o [2]).

1. LA CATEGORÍA $\underline{A}^{\mathbf{T}}$.

Sea $\mathbf{T} = (T; \eta, \mu)$ un triple en $\underline{A}$.

(1.1) *Si $\underline{A}$ tiene objeto final, entonces $\underline{A}^{\mathbf{T}}$ tiene objeto final.*

Si X es dicho objeto final, X es final en $\underline{A}^{\mathbf{T}}$ cuando se lo da como estructura la única flecha de $TX \to X$.

(1.2) *Si $\underline{A}$ tiene cero y T conserva el cero entonces $\underline{A}^{\mathbf{T}}$ tiene cero.*

(1.3) *Si $\underline{A}$ tiene cuadrados cartesianos (pullbacks); entonces $\underline{A}^{\mathbf{T}}$ tiene cuadrados cartesianos.*

Consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & (Y, \theta) \arrow[d, "g"] \\ (X, \xi) \arrow[r, "f"'] & (Z, \varrho) \end{tikzcd} \qquad (1)$$

en $\underline{A}^{\mathbf{T}}$, aplicando $U^{\mathbf{T}}$, se obtiene el

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[d, "g"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Z
\end{tikzcd} \qquad (2)$$

y como A tiene cuadrados cartesianos (2) puede completarse a:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\blacksquare"] & Y \arrow[d, "g"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & TU \arrow[rr, "Tu"] \arrow[dl, "Tv"'] \arrow[drr] \arrow[ddr] & & TY \arrow[d, "\theta"] \\
TX \arrow[drr, "\xi"'] & & U \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\blacksquare"] & Y \arrow[d, "g"] \\
 & & X \arrow[r, "f"'] & Z
\end{tikzcd}$$

se sigue la existencia de una única $\delta\colon TU \to U$ con $v \circ \delta = \xi \circ Tv$ y $u \circ \delta = \theta \circ Tu$

Veamos que (U, δ) es una **T**-algebra:

A_1) del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[dr, shift left, "1_u"] \arrow[dr, shift right, "\delta\eta_u"'] \arrow[drr, bend left, "u"] \arrow[ddr, bend right, "v"'] & & \\
& U \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\blacksquare"] & Y \arrow[d, "g"] \\
& X \arrow[r, "f"'] & Z
\end{tikzcd}$$

de $u \circ \delta \eta_u = \theta \circ Tu \circ \eta_u = \theta \circ \eta_y \circ u = u$ y del analogo $v \circ \delta \circ \eta_u = v$ se sigue: $\delta \circ \eta_u = 1_x$.

A_2) del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
T^2U \arrow[drr, "u\circ\delta\circ T\delta"] \arrow[ddr, "v\circ\delta\circ\mu_u"'] & & \\
& U \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\blacksquare"] & Y \arrow[d, "g"] \\
& X \arrow[r, "f"'] & Z
\end{tikzcd}$$

como $g \circ u \circ \delta \circ T\delta = f \circ v \circ \delta \circ T\delta = f \circ \xi \circ T(v \circ \delta) = f \circ \xi \circ T\xi \circ T^2 v =$
$= f \circ \xi \circ \mu_x \circ T^2 v = f \circ \xi \circ Tv \circ \mu_u = f \circ v \circ \delta \circ \mu_u$.
y como: $u \circ \delta \circ \mu_u = \theta \circ Tu \circ \mu_u = \theta \circ \mu_y \circ T^2 u = \theta \circ T(\theta \circ Tu) = \theta \circ T\theta \circ T\delta =$
$= u \circ \delta \circ T\delta$, $v \circ \delta \circ T\delta = \xi \circ T(v \circ \delta) = \xi \circ T\xi \circ T^2 v = \xi = \xi \circ \mu \circ T^2 v =$
$= \xi \circ T \circ \mu^2 = v \circ \delta \circ \mu^2$, de donde: $\delta \circ \mu^2 = \delta \circ T\delta$.
Además: v: $(U, \delta) \to (X, \xi)$ y u: $(U, \delta) \to (Y, \theta)$ son flechas de $\mathbf{T}$-algebras y el diagrama en $A^{\mathbf{T}}$ es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(U, \delta) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & (Y, \theta) \arrow[d, "g"] \\
(X, \xi) \arrow[r, "f"'] & (Z, \varrho)
\end{tikzcd} \qquad (3)$$

Sea (A, α) una **T**-álgebra y w: $(A, \alpha) \to (X, \xi)$, h: $(A, \alpha) \to (Y, \theta)$ morfismos de **T**-álgebras con $g \circ h = f \circ w$, entonces en $\underline{A}$ existe una única k: $A \to U$ con $u \circ k = h$ y $v \circ k = w$.

Del diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
TA \arrow[drr, bend left, "u \circ k \circ \alpha"] \arrow[ddr, bend right, "v \circ k \circ \alpha"'] & & \\
& U \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\blacksquare"] & Y \arrow[d, "g"] \\
& X \arrow[r, "f"'] & Z
\end{tikzcd}$$

y de: $u \circ \delta \circ Tk = \theta \circ T(u \circ k) = \theta \circ Th = h \circ \alpha = u \circ k \circ \alpha$,

$$v \circ \delta \circ Tk = \xi \circ T(v \circ k) = \xi \circ Tw = w \circ \alpha = v \circ k \circ \alpha,$$

se sigue que: $\delta \circ Tk = k \circ \alpha$ y de aquí que k es flecha de **T**-álgebras. La unicidad es consecuencia de la unicidad en $\underline{A}$, de donde (3) es un cuadrado cartesiano en $\underline{A}^{\mathbf{T}}$.

(1.4) *Si $\underline{A}$ tiene núcleos y T conserva el cero, entonces $\underline{A}^{\mathbf{T}}$ tiene núcleos.*

Es consecuencia de (1.2) y (1.3) y del hecho que el núcleo de un morfismo es el «cuadrado cartesiano» de dicho morfismo y el morfismo cero.

(1.5) *Si $\underline{A}$ tiene productos entonces $\underline{A}^{\mathbf{T}}$ tiene productos.*

Sea $\{(X_i, \xi_i)\}_{i \in I}$ una familia I-indicada de **T**-álgebras, dado que $\underline{A}$ tiene productos sea $X = \prod_{i \in I} X_i$, consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
TX \arrow[r, "T\pi_i^*"] & TX_i \arrow[d, "\xi_i^*"] \\
X \arrow[r, "\pi_i^*"'] & X_i
\end{tikzcd}$$

entonces existe una $\xi: TX \to X$ tal que para todo $i \in I$ es $\pi_i \circ \xi = \xi i \circ T\pi_i$

Veamos que (X, ξ) es una **T**-álgebra:

$A_1)$ Como para todo $i \in I$ es:

$$\pi_i = \xi_i \circ \eta_{x_i} \circ \pi_i = \xi_i \circ T\pi_i \circ \eta_x = \pi_i \circ \xi \circ \eta_x$$

se sigue: $\xi \circ \eta_x = 1$.

$A_2)$ Como para todo $i \in I$ es:

$$\pi_i \circ \xi \circ T\xi = \xi_i \circ T(\pi_i \circ \xi) = \xi_i \circ T\xi_i \circ T^2\pi_i = \xi_i \circ \mu_{x_i} \circ T^2\pi_i =$$
$$= \xi_i \circ T\pi_i \circ \mu_x = \mu_i \circ \xi \circ \mu_x$$

se sigue: $\xi \circ T\xi = \xi \circ \mu_x$.

Además $\pi_i: (X, \xi) \to (X_i, \xi_i)$ es un morfismo de **T**-álgebras para todo i.

Sea $\{f_i: (Y, \theta) \to (X_i, \xi_i)\}_{i \in I}$ una familia I-indicada de morfismos de **T**-álgebras, existe una $f: X \to Y$ tal que para todo $i: f_i = \pi_i \circ f$

Como para todo $i \in I$ es:

$$\pi_i \circ \xi \circ Tf = \xi_i \circ T(\eta_i \circ f) = \xi_i \circ Tf_i = f_i \circ \theta = \pi_i \circ f \circ \theta$$

se sigue que f es flecha de **T**-álgebras, la unidad de f sigue del hecho de ser X un producto en $\underline{A}$; de aquí que $\underline{A}^{\mathbf{T}}$ tiene productos.

(1.6) *Si $\underline{A}$ es completa, entonces $\underline{A}^{\mathbf{T}}$* es completa.

Si $\underline{A}$ es completa $\underline{A}$ tiene «cuadrados cartesianos» y productos entonces por (1.3) y (1.5) $\underline{A}^{\mathbf{T}}$ tiene «cuadrados cartesianos» y productos, de aquí que $\underline{A}^{\mathbf{T}}$ es completa.

(1.7) *Si $\underline{A}$ es aditiva y T es aditivo, entonces $\underline{A}^{\mathbf{T}}$ es aditiva.*

En efecto, sea $f, g: (X, \zeta) \to (y, \theta)$ entonces $f + g: (X, \xi) \to (Y, \theta)$ es un morfismo de **T**-álgebras (suma en $\underline{A}$) ya que:

$$(fg) \circ \xi = f \circ \xi + g \circ \xi = \theta Tf + \theta Tg = \theta \circ (Tf + Tg) = \theta T(f + g)$$

(1.8) Sea A una categoría exacta y $\mathbf{T} = (T; \eta, \mu)$ un triple sobre A tal que T conserva el cero, sea $f: (X, \xi) \to (Y, \theta)$ un morfismos de $\mathbf{T}$-álgebras, entonces f es mónica en $\underline{A}$ si y solo si lo es en $\underline{A}^{\mathbf{T}}$.

En efecto si f es mónica en $\underline{A}^{\mathbf{T}}$ y si K es su núcleo en $\underline{A}$, entonces existe sobre K por (1.4) una estructura de $\mathbf{T}$-álgebras ϱ tal que (K, ϱ) es el núcleo de f en $\underline{A}^{\mathbf{T}}$ y como f es mónica en $\underline{A}^{\mathbf{T}}$, $K = 0$, de donde por ser $\underline{A}$ exacta es f mónica en $\underline{A}$. El reciproco es inmediato

(1.9) *Si $\underline{A}$ tiene conucleos y T conserva conucleos, entonces $\underline{A}^{\mathbf{T}}$ tiene conucleos.*

Sea $f: (X, \xi) \to (Y, \theta)$, consideremos $p: Y \to Z$ el conucleo de f en $\underline{A}$, entonces Tp es el conucleo de Tf en $\underline{A}$, del diagrama:

$$\begin{tikzcd} TX \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "\xi"'] & TY \arrow[r, "Tp"] \arrow[d, "\theta"] & TZ \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "p"'] & Z \end{tikzcd}$$

se sigue la existencia de una $\varrho: T Z \to Z$ con $p \circ \theta = \varrho \circ T p$

Veamos que (Z, ϱ) es una $\mathbf{T}$-álgebra,

$A_1)$ $\qquad \varrho \circ \eta_z = p = \varrho \circ Tp \circ \eta_y = p \circ \theta \circ \eta_y = p$

de donde como p es épica por ser coigualador, $\varrho\, \eta_z = 1$

$A_2)$ $\varrho\, \mu_z\, T^2 p = \varrho\, T\, p\, \mu_y = p \circ \theta \circ \mu_y = p \circ \theta \circ T\theta =$

$\qquad = \varrho \circ Tp \circ T\theta = p \circ T\, \varrho \circ T^2 p$

y como $T^2 p$ es épica por ser coigualador, $\varrho\, \mu_y = \varrho \circ T \varrho$.

Además $p: (Y, \theta) \to (Z, \varrho)$ es un morfismos de $\mathbf{T}$-álgebras. Consideremos ahora en $\underline{A}^{\mathbf{T}}$ el diagrama:

$$\begin{tikzcd} (X, \xi) \arrow[r, "f"] & (Y, \theta) \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "g"'] & (Z, \varrho) \\ & & (A, \alpha) \end{tikzcd}$$

entonces existe una $h\colon Z \to A$ en $\underline{A}$ con $h \cdot p = g$, dado que:

$$h \circ \varrho \cdot Tp = h \circ p \circ \theta = g\,\theta = \alpha \circ Tg = \alpha \circ Th \circ Tp$$

y Tp es épica por ser coigualador, $h \circ \varrho = a \circ T h$,
es decir $h\colon (Z, \varrho) \to (A, \alpha)$ es un morfismo de **T**-algebras con $h \circ p = g$, la propiedad de unidad de h es consecuencia de su unicidad en $\underline{A}$.

(1.10) *Si $\underline{A}$ es exacta y T conserva conucleos entonces $\underline{A}^{T}$ es normal.*

Sea $(X, \xi) \to (Y, \theta)$ monica en $\underline{A}^{T}$, entonces f es mónica por (1.8), como $\underline{A}$ es normal sea $p = f^{c}$, entonces por (1.9), existe sobre $\underline{A}$ (codominio de p) una estructura ϱ de **T**-álgebra tal que p es el conúcleo de f en $\underline{A}^{T}$.

Sea el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(X, \xi) \arrow[r, tail, "f"] & (Y, \theta) \arrow[r, two heads, "p"] & (A, \varrho) \\
(Z, \chi) \arrow[ur, "h"] & &
\end{tikzcd}$$

con $p \circ h = 0$, entonces existe una $k\colon Z \to X$ en $\underline{A}$ tal que $h = f \circ k$, como $f \circ \xi\, Tk = \theta \circ Tf \circ Tk = \theta \circ Th = h \circ \chi = f \circ k \circ \chi$ se verifica que: $\xi \circ Tk = k \circ \chi$ de donde $k\colon (Z, \chi) \to (X, \xi)$ es flecha de **T**-álgebras y entonces $f\colon (X, \xi) \to (Y, \theta)$ es el núcleo de $(Y, \theta) \to (A, \varrho)$, es decir $\underline{A}^{T}$ es normal.

Dualizando y teniendo en cuenta (1.9) se obtiene:

(1.11) *Si $\underline{A}$ es exacta y T conserva conúcleos y $f\colon (X, \xi) \to (Y, \theta)$ entonces f es épica en $\underline{A}^{T}$ si y solo si f es épica en $\underline{A}$.*

(1.12) *Si $\underline{A}$ es exacta y T conserva conúcleos, entonces $\underline{A}^{T}$ es conormal*

(1.13) *Si $\underline{A}$ es exacta y T conserva conucleos $\underline{A}^{T}$ es exacta.* Es consecuencia de los anteriores apartados de (1.13) (1.7) y (1.5).

(1.14) *Si $\underline{A}$ es abeliana y T conserva conucleos y T es aditivo entonces $\underline{A}^{T}$ es abeliana* [3].

BIBLIOGRAFIA

[1] BARR, M. y BECK, J.: *Aciclyc Models and Triples. Proceedings of the conference on categorical Algebra.* La Jolla (1965), 336-343.

[2] CARUNCHO CASTRO, J. R.: *Teoria de Triples.* Alxebra 5. Santiago de Compostela (1971).

[3] EILENBERG, S. - MOORE, J.: *Adjoint functors and triples.* Ill. J. Mathem. 9 (1965) 381-398.

[4] LINTON, F. J.: *An outline of functorial* semantics. Lect. Nothes in Mathen. 80 (1969), 7-53.

DEPARTAMENTO DE ALGEBRA
Y FUNDAMENTOS
SANTIAGO DE COMPOSTELA