

LA CATEGORÍA $\underline{A}^{\mathbf{T}}$

por

J. R. CARUNCHO CASTRO

El principal objeto del presente trabajo es el estudio de la exactitud de la categoría de \mathbf{T} -álgebras, $\underline{A}^{\mathbf{T}}$, sobre un triple $\mathbf{T} = (T; \eta, \mu)$, así como el estudio de que propiedades de la categoría $\underline{A}^{\mathbf{T}}$ pueden ser obtenidas en la categoría A . Un resultado de Eilenberg-Moore [3] resuelve este problema en el caso de que A es abeliana. Las definiciones de triple, algebra y de la categoría $\underline{A}^{\mathbf{T}}$ así como sus propiedades pueden verse en [1] o [2]).

1. LA CATEGORÍA $\underline{A}^{\mathbf{T}}$.

Sea $\mathbf{T} = (T; \eta, \mu)$ un triple en A .

(1.1) Si A tiene objeto final, entonces $\underline{A}^{\mathbf{T}}$ tiene objeto final.

Si X es dicho objeto final, X es final en $\underline{A}^{\mathbf{T}}$ cuando se lo da como estructura la única flecha de $TX \rightarrow X$.

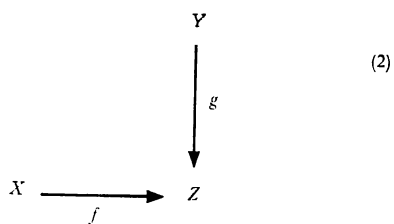
(1.2) Si A tiene cero y T conserva el cero entonces $\underline{A}^{\mathbf{T}}$ tiene cero.

(1.3) Si A tiene cuadrados cartesianos (pullbacks); entonces $\underline{A}^{\mathbf{T}}$ tiene cuadrados cartesianos.

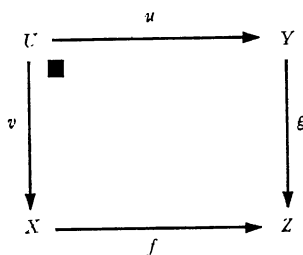
Consideremos el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & (Y, \theta) & \\ & \downarrow g & (1) \\ (X, \xi) & \xrightarrow{f} & (Z, \rho) \end{array}$$

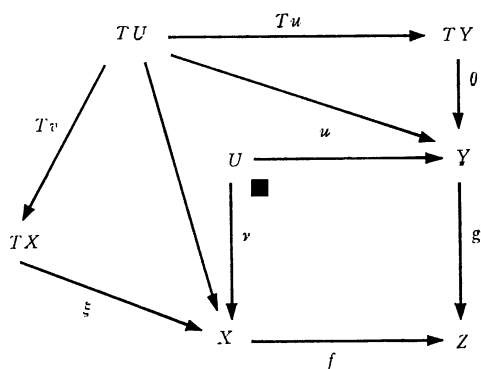
en $\underline{A}^{\mathbf{T}}$, aplicando $U^{\mathbf{T}}$, se obtiene el



y como A tiene cuadrados cartesianos (2) puede completarse a:



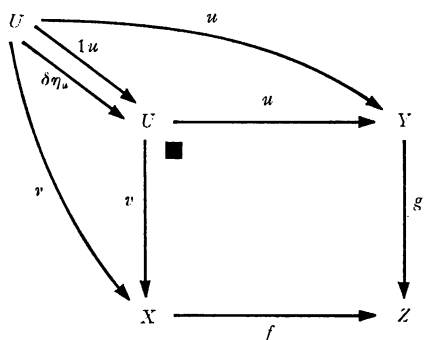
Del diagrama:



se sigue la existencia de una única $\delta: TU \rightarrow U$ con $v \circ \delta = \xi \circ Tv$ y $u \circ \delta = \theta \circ Tu$

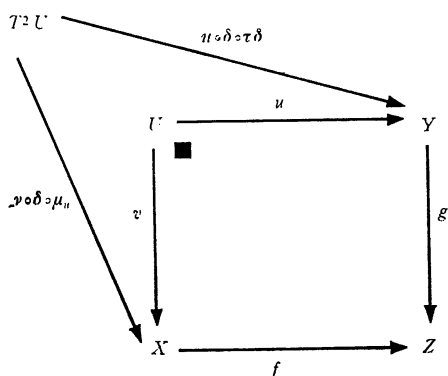
Veamos que (U, δ) es una \mathbf{T} -álgebra:

A₁) del diagrama:



de $u \circ \delta \eta_u = \theta \circ T u \circ \eta_u = \theta \circ \eta_y \circ u = u$ y del analogo $v \circ \delta \circ \eta_u = v$ se sigue: $\delta \circ \eta_u = 1_x$.

A₂) del diagrama:



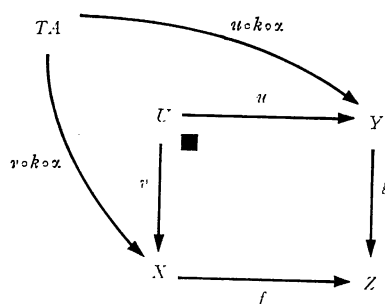
como $g \circ u \circ \delta \circ T \delta = f \circ v \circ \delta \circ T \delta = f \circ \xi \circ T(v \circ \delta) = f \circ \xi \circ T \xi \circ T^2 v = f \circ \xi \circ \mu_x \circ T^2 v = f \circ \xi \circ T v \circ \mu_u = f \circ v \circ \delta \circ \mu_u$.
 y como: $u \circ \delta \circ \mu_u = \theta \circ T u \circ \mu_u = \theta \circ \mu_y \circ T^2 u = \theta \circ T(\theta \circ T u) = \theta \circ T \theta \circ T \delta = u \circ \delta \circ T \delta$, $v \circ \delta \circ T \delta = \xi \circ T(v \circ \delta) = \xi \circ T \xi \circ T^2 v = \xi \circ \xi \circ \mu \circ T^2 v = \xi \circ T \circ \mu^2 = v \circ \delta \circ \mu^2$, de donde: $\delta \circ \mu^2 = \delta \circ T \delta$.

Además: $v: (U, \delta) \rightarrow (X, \xi)$ y $u: (U, \delta) \rightarrow (Y, \theta)$ son flechas de \mathbf{T} -álgebras y el diagrama en $A^{\mathbf{T}}$ es conmutativo:



Sea (A, α) una \mathbf{T} -álgebra y $w: (A, \alpha) \rightarrow (X, \xi)$, $h: (A, \alpha) \rightarrow (Y, \theta)$ morfismos de \mathbf{T} -álgebras con $g \circ h = f \circ w$, entonces en \underline{A} existe una única $k: A \rightarrow U$ con $u \circ k = h$ y $v \circ k = w$.

Del diagrama conmutativo:



y de: $u \circ \delta \circ Tk = \theta \circ T(u \circ k) = \theta \circ Th = h \circ \alpha = u \circ k \circ \alpha,$

$v \circ \delta \circ Tk = \xi \circ T(v \circ k) = \xi \circ Tw = w \circ \alpha = v \circ k \circ \alpha,$

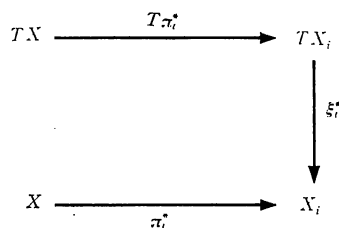
se sigue que: $\delta \circ Tk = k \circ \alpha$ y de aquí que k es flecha de \mathbf{T} -álgebras. La unicidad es consecuencia de la unicidad en \underline{A} , de donde (3) es un cuadrado cartesiano en $\underline{A}^{\mathbf{T}}$.

(1.4) Si \underline{A} tiene núcleos y T conserva el cero, entonces $\underline{A}^{\mathbf{T}}$ tiene núcleos.

Es consecuencia de (1.2) y (1.3) y del hecho que el núcleo de un morfismo es el «cuadrado cartesiano» de dicho morfismo y el morfismo cero.

(1.5) Si \underline{A} tiene productos entonces $\underline{A}^{\mathbf{T}}$ tiene productos.

Sea $\{(X_i, \xi_i)\}_{i \in I}$ una familia I -indicada de \mathbf{T} -álgebras, dado que \underline{A} tiene productos sea $X = \prod_{i \in I} X_i$, consideremos el diagrama:



entonces existe una $\xi: TX \rightarrow X$ tal que para todo $i \in I$ es $\pi_i \circ \xi = \xi_i \circ T \pi_i$

Veamos que (X, ξ) es una \mathbf{T} -álgebra:

A_1) Como para todo $i \in I$ es:

$$\pi_i = \xi_i \circ \eta_{x_i} \circ \pi_i = \xi_i \circ T \pi_i \circ \eta_x = \pi_i \circ \xi \circ \eta_x$$

se sigue: $\xi \circ \eta_x = 1$.

A_2) Como para todo $i \in I$ es:

$$\begin{aligned} \pi_i \circ \xi \circ T \xi &= \xi_i \circ T(\pi_i \circ \xi) = \xi_i \circ T \xi_i \circ T^2 \pi_i = \xi_i \circ \mu_{x_i} \circ T^2 \pi_i = \\ &= \xi_i \circ T \pi_i \circ \mu_x = \mu_i \circ \xi \circ \mu_x \end{aligned}$$

se sigue: $\xi \circ T \xi = \xi \circ \mu_x$.

Además $\pi_i: (X, \xi) \rightarrow (X_i, \xi_i)$ es un morfismo de \mathbf{T} -álgebras para todo i .

Sea $\{f_i: (Y, \theta) \rightarrow (X_i, \xi_i)\}_{i \in I}$ una familia I -indicada de morfismos de \mathbf{T} -álgebras, existe una $f: X \rightarrow Y$ tal que para todo $i: f_i = \pi_i \circ f$

Como para todo $i \in I$ es:

$$\pi_i \circ \xi \circ T f = \xi_i \circ T(\eta_i \circ f) = \xi_i \circ T f_i = f_i \circ \theta = \pi_i \circ f \circ \theta$$

se sigue que f es flecha de \mathbf{T} -álgebras, la unidad de f sigue del hecho de ser X un producto en \underline{A} ; de aquí que $\underline{A}^{\mathbf{T}}$ tiene productos.

(1.6) Si \underline{A} es completa, entonces $\underline{A}^{\mathbf{T}}$ es completa.

Si \underline{A} es completa \underline{A} tiene «cuadrados cartesianos» y productos entonces por (1.3) y (1.5) $\underline{A}^{\mathbf{T}}$ tiene «cuadrados cartesianos» y productos, de aquí que $\underline{A}^{\mathbf{T}}$ es completa.

(1.7) Si \underline{A} es aditiva y T es aditivo, entonces $\underline{A}^{\mathbf{T}}$ es aditiva.

En efecto, sea $f, g: (X, \zeta) \rightarrow (Y, \theta)$ entonces $f + g: (X, \zeta) \rightarrow (Y, \theta)$ es un morfismo de \mathbf{T} -álgebras (suma en \underline{A}) ya que:

$$(fg) \circ \xi = f \circ \xi + g \circ \xi = \theta T f + \theta T g = \theta \circ (T f + T g) = \theta T (f + g)$$

(1.8) Sea A una categoría exacta y $\mathbf{T} = (T; \eta, \mu)$ un triple sobre A tal que T conserva el cero, sea $f: (X, \xi) \rightarrow (Y, \theta)$ un morfismo de \mathbf{T} -álgebras, entonces f es mónica en A si y solo si lo es en $A^{\mathbf{T}}$.

En efecto si f es mónica en $A^{\mathbf{T}}$ y si K es su núcleo en A , entonces existe sobre K por (1.4) una estructura de \mathbf{T} -álgebras ϱ tal que (K, ϱ) es el núcleo de f en $A^{\mathbf{T}}$ y como f es mónica en $A^{\mathbf{T}}$, $K = 0$, de donde por ser A exacta es f mónica en A . El recíproco es inmediato

(1.9) Si A tiene conucleos y T conserva conucleos, entonces $A^{\mathbf{T}}$ tiene conucleos.

Sea $f: (X, \xi) \rightarrow (Y, \theta)$, consideremos $p: Y \rightarrow Z$ el conucleo de f en A , entonces Tp es el conucleo de Tf en $A^{\mathbf{T}}$, del diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 TX & \xrightarrow{Tf} & TY & \xrightarrow{Tp} & TZ \\
 \downarrow \xi & & \downarrow \theta & & \\
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{p} & Z
 \end{array}$$

se sigue la existencia de una $\varrho: TZ \rightarrow Z$ con $p \circ \theta = \varrho \circ Tp$
 Veamos que (Z, ϱ) es una \mathbf{T} -álgebra,

$$A_1) \quad \varrho \circ \eta_z = p = \varrho \circ Tp \circ \eta_y = p \circ \theta \circ \eta_y = p$$

de donde como p es épica por ser coigualador, $\varrho \eta_z = 1$

$$\begin{aligned}
 A_2) \quad \varrho \mu_z T^2 p &= \varrho T p \mu_y = p \circ \theta \circ \mu_y = p \circ \theta \circ T\theta = \\
 &= \varrho \circ Tp \circ T\theta = p \circ T \varrho \circ T^2 p
 \end{aligned}$$

y como $T^2 p$ es épica por ser coigualador, $\varrho \mu_y = \varrho \circ T \varrho$.

Además $p: (Y, \theta) \rightarrow (Z, \varrho)$ es un morfismo de \mathbf{T} -álgebras. Consideremos ahora en $A^{\mathbf{T}}$ el diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 (X, \xi) & \xrightarrow{f} & (Y, \theta) & \xrightarrow{p} & (Z, \varrho) \\
 & & & \searrow g & \\
 & & & & (A, \alpha)
 \end{array}$$

entonces existe una $h: Z \rightarrow A$ en \underline{A} con $h \cdot p = g$, dado que:

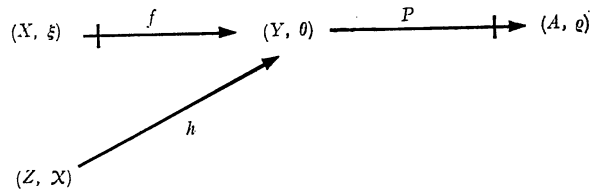
$$h \circ \varrho \cdot T p = h \circ p \circ \theta = g \theta = \alpha \circ T g = \alpha \circ T h \circ T p$$

y $T p$ es épica por ser coigualador, $h \circ \varrho = \alpha \circ T h$, es decir $h: (Z, \varrho) \rightarrow (A, \alpha)$ es un morfismo de \mathbf{T} -álgebras con $h \circ p = g$, la propiedad de unidad de h es consecuencia de su unicidad en \underline{A} .

(1.10) Si \underline{A} es exacta y T conserva conucleos entonces $\underline{A}^{\mathbf{T}}$ es normal.

Sea $(X, \xi) \rightarrow (Y, \theta)$ monica en $\underline{A}^{\mathbf{T}}$, entonces f es mónica por (1.8), como \underline{A} es normal sea $p = f^c$, entonces por (1.9), existe sobre \underline{A} (codominio de p) una estructura ϱ de \mathbf{T} -álgebra tal que p es el conucleo de f en $\underline{A}^{\mathbf{T}}$.

Sea el diagrama:



con $p \circ h = 0$, entonces existe una $k: Z \rightarrow X$ en \underline{A} tal que $h = f \circ k$, como $f \circ \xi \circ T k = \theta \circ T f \circ T k = \theta \circ T h = h \circ \chi = \bar{f} \circ k \circ \chi$ se verifica que: $\xi \circ T k = k \circ \chi$ de donde $k: (Z, \chi) \rightarrow (X, \xi)$ es flecha de \mathbf{T} -álgebras y entonces $f: (X, \xi) \rightarrow (Y, \theta)$ es el núcleo de $(Y, \theta) \rightarrow (A, \varrho)$, es decir $\underline{A}^{\mathbf{T}}$ es normal.

Dualizando y teniendo en cuenta (1.9) se obtiene:

(1.11) Si \underline{A} es exacta y T conserva conucleos y $f: (X, \xi) \rightarrow (Y, \theta)$ entonces f es épica en $\underline{A}^{\mathbf{T}}$ si y solo si f es épica en \underline{A} .

(1.12) Si \underline{A} es exacta y T conserva conucleos, entonces $\underline{A}^{\mathbf{T}}$ es conormal

(1.13) Si \underline{A} es exacta y T conserva conucleos $\underline{A}^{\mathbf{T}}$ es exacta. Es consecuencia de los anteriores apartados de (1.13) (1.7) y (1.5).

(1.14) Si \underline{A} es abeliana y T conserva conucleos y T es aditivo entonces $\underline{A}^{\mathbf{T}}$ es abeliana [3].

BIBLIOGRAFIA

- [1] BARR, M. y BECK, J.: *Acyclic Models and Triples. Proceedings of the conference on categorical Algebra*. La Jolla (1965), 336-343.
- [2] CARUNCHO CASTRO, J. R.: *Teoría de Triples*. Alxebra 5. Santiago de Compostela (1971).
- [3] FILENBERG, S. - MOORE, J.: *Adjoint functors and triples*. Ill. J. Mathem. 9 (1965) 381-398.
- [4] LINTON, F. J.: *An outline of functorial semantics*. Lect. Notes in Mathem. 80 (1969), 7-53.

DEPARTAMENTO DE ALGEBRA
Y FUNDAMENTOS
SANTIAGO DE COMPOSTELA