LAS DERIVADAS SEGUNDAS DEL POTENCIAL DE VOLUMEN (*)

ALBERTO DOU

§ 1. *Introducción*

Sea Ω_p el área de la esfera unidad en el espacio euclídeo E^n y sea $E(x)$ la solución fundamental de la ecuación de LAPLACE, $\Delta u = 0$, también en E^n. Se tiene

$$\Omega_n = \frac{2 \cdot \pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}, \; x = (x_1, \ldots, x_n) \, \varepsilon \, E^n$$

$$E(x) = \frac{-1}{2\pi} \log \frac{1}{|x|}, \quad n = 2$$

$$E(x) = \frac{-1}{(n-2) \cdot \Omega_n} |x|^{2-n}, \; n > 2.$$

En el espacio de distribuciones de L. SCHWARTZ, la solución fundamental $E(x)$ se puede caracterizar (salvo una constante aditiva) como la solución de $\Delta u = \delta$, tal que posea simetría radial y cuyo soporte singular se reduzca al origen. En el mismo espacio de distribuciones, una propiedad importante de E es que su producto de convolución $E * f$ con una función f continua en E^n y de soporte compacto, o sea $f \, \varepsilon \, C_0(E^n)$, es una solución de la ecuación de Poisson $\Delta u = f$, donde las derivadas y la igualdad deben entenderse en el sentido de la teoría de distribuciones. Esta propiedad es inmediata, puesto que

$$\Delta (E * f) = (\Delta E) * f = \delta * f = f, \; f \, \varepsilon \, C_0(E^n).$$

(*) El teorema 1, que se demuestra en este artículo, fue comunicado en el primer Congreso Luso-hispano de Matemáticos, Lisboa, Abril de 1972. Véase [2].

Aquí nos proponemos mantenernos dentro de espacios de funciones y entender la derivada en el sentido ordinario de la Teoría de funciones reales. Entonces, la solución fundamental $E(x)$ puede caracterizarse como la solución no trivial en $E^n - \{0\}$ de la ecuación $\Delta u = 0$, con simetría radial, que se anula en el infinito para $n > 2$ o se anula en $|x| = 1$ para $n = 2$, y con un coeficiente que normalice su integral en E^n.

Queremos estudiar la igualdad

$$\Delta (E * f)(x) = f(x),$$

donde el laplaciano Δ se interprete como límite en un punto; entonces la igualdad puede entenderse válida sólo para casi todo punto $x \varepsilon E^n$, o bien que haya de ser válida para todo punto $x \varepsilon E^n$. En el primer caso, o sea para $ct\, x \varepsilon E^n$, están el resultado de LICHTENSTEIN y los de CALDERON-ZYGMUNG relativos a la existencia de ciertas integrales singulares; en ellos no se supone que f haya de ser necesariamente continua. Véase [1].

Aquí vamos a suponer que $f \varepsilon C_0(E^n)$ y queremos que la igualdad valga para todo $x \varepsilon E^n$. Entonces, o bien hemos de imponer mayor regularidad a f, como en el teorema 1, o bien podemos definir Δ como un límite único, como en el teorema 2.

§ 2. *Descomposicion de las derivadas segundas.*

Sea $C^\alpha{}_0(E^n)$, con $\alpha > 0$, el espacio de las funciones continuas en E^n y de soporte compacto que satisfacen además la condición de HOLDER con exponente positivo α. Se sabe, véase por ejemplo O. D. KELLOGG [5], que si $f \varepsilon C^\alpha{}_0(E^n)$, entonces el potencial de volumen u,

$$u(x) = \int_{E^n} E(x - \xi) \cdot f(\xi)\, d\xi,\ x \varepsilon E^n, \tag{1}$$

posee derivadas segundas continuas y satisface a la ecuación de POISSON, $\Delta u(x) = f(x)$, $x \varepsilon E^n$, lo que establece la propiedad más importante de la solución fundamental $E(x)$. Más aún, según J. SCHAUDER [6], las derivadas segundas del potencial u satisfacen también la misma condición de HOLDER que el dato f, o sea $u \varepsilon C^{2+\alpha}(E^n)$. Se sabe también, véase la misma referencia [5] ya citada, que por otra parte la mera continuidad de f no es suficiente para asegurar la existencia de las derivadas segundas de u en todo punto; aunque la igualdad

(2) que damos a continuación sigue siendo válida si se la considera en el espacio de distribuciones de L. SCHWARTZ. Como contraejemplo sencillo citemos el siguiente. Sea $f(x)$ una función continua en E^2 y de soporte compacto, y que en un entorno de $(0, 0)$ coincida con la función

$$\frac{2\, x^2{}_1}{(x^2{}_1 + x^2{}_2) \log (x^2{}_1 + x^2{}_2)}\,.$$

Es fácil comprobar que el potencial $u(x)$ dado por (1) mediante esta función carece en el origen de derivada segunda respecto de x_1 dos veces. También se comprueba inmediatamente que esta $f(x)$ no es holderiana en el origen.

En el teorema que sigue ofrecemos una nueva demostración de estos resultados, que nos parece más simple, y sobre todo una nueva expresión de las derivadas segundas del potencial u dado por (1).

TEOREMA 1. — I) *Sea* $f \in C^\alpha{}_0 (E^n)$, $\alpha > 0$, *y sea* u *el potencial* (1). *Entonces, cualquiera que sea* R *positivo y para todo* $x \in E^n$, *se tiene*

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k\, \partial x_j} = \frac{1}{n}\, \delta_{jk} f(x) + \int_{|\xi - x| > R} \frac{\partial^2 E(x - \xi)}{\partial x_k\, \partial x_j} f(\xi)\, d\xi + \int_{|\xi - x| < R} \frac{\partial^2 E(x - \xi)}{\partial x_k\, \partial x_j} [f(\xi) - f(x)]\, d\xi.$$

II) *Además,* $u \in C^{2+\alpha} (E^n)$.

Demostración de I). Se basa en la siguiente descomposición. Sea y un punto arbitrario, pero fijo, de E^n. Entonces, las derivadas segundas de $u(x)$ en el punto y pueden ponerse obviamente así:

$$(3) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u(y)}{\partial x_k\, \partial x_j} &= \left[\frac{\partial^2}{\partial x_k\, \partial x_j} \int_{|\xi - y| < R} E(x - \xi) f(y)\, d\xi\right]_{x=y} + \\ &+ \left[\frac{\partial^2}{\partial x_k\, \partial x_j} \int_{|\xi - y| > R} E(x - \xi) f(\xi)\, d\xi\right]_{x=y} + \\ &+ \left[\frac{\partial^2}{\partial x_k\, \partial x_j} \int_{|\xi - y| < R} E(x - \xi) [f(\xi) - f(y)]\, d\xi\right]_{x=y} \equiv \\ &\equiv [A_1(x, y)]_{x=y} + [A_2(x, y)]_{x=y} + [A_3(x, y)]_{x=y}, \end{aligned}$$

donde A_1, A_2, A_3 denotan respectivamente los corchetes del segundo miembro.

Sean $I_1(x), I_2(x)$ e $I_3(x)$ el primero, el segundo y el tercer términos del segundo miembro de (2) respectivamente. Es evidente que $I_1(x)$ e $I_2(x)$ existen y son finitos para todo $x \in E^n$. También es inmediato comprobar que $I_3(x)$ existe para todo $x \in E^n$, puesto que el integrando es medible y se tiene, llamando C a una constante de HOLDER de $f(x)$, que

$$
\left| \frac{\partial^2 E(x-\xi)}{\partial x_k \, \partial x_j} [f(\xi) - f(x)] \right| \leq
$$

$$
\leq \frac{1}{\Omega_n} \left| \frac{\delta_{kj}}{|x-\xi|^n} - \frac{n(x_j-\xi_j)(x_k-\xi_k)}{|x-\xi|^{n+2}} \right| \cdot C\,|x-\xi|^\alpha \leq
$$

(4)

$$
\leq \frac{(n+1)\,C}{\Omega_n} \cdot \frac{1}{|x-\xi|^{n-\alpha}},
$$

y por tanto el integrando es integrable, para todo $x \in E^n$, en el compacto $B \equiv B(x, R) = \{\xi \mid |\xi - x| \leq R\}$.

Se sigue que la fórmula (2) quedará demostrada si demostramos que

$$
A_i(y, y) = I_i(y),\ i = 1, 2, 3,\ y \in E^n \tag{5}
$$

lo que hacemos sucesivamente a continuación. Observamos antes que las derivadas primeras del potencial u dado por (1) son continuas y pueden obtenerse manifiestamente derivando bajo el signo integral.

a) Una demostración indirecta de que $A_1(y, y) = I_1(y)$ se encuentra en el texto de B. EPSTEIN [4] para $n = 2$, y la demostración se generaliza sin dificultad a cualquier n. A continuación damos otra demostración, mediante un cálculo directo.

En la integral A_1 podemos trasladar los ejes de modo que el punto y sea el origen de coordenadas, $y = 0$. Sea B la bola de centro el origen y radio R en E^n. Queremos demostrar, mediante cálculo directo, que

$$
I_{jk} \equiv \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \int_B \frac{\partial E(x-\xi)}{\partial x_j} \, d\xi \right]_{x=0} = \delta_{jk} \frac{1}{n} .
$$

Llamando e^k al vector cuyas componentes sean $(\delta_{k1} h, \dots, \delta_{kn} h)$, $k = 1, \dots, n$, y aplicando la definición de derivada, se tiene

$$\Omega_n I_{jk} = \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \int_B \frac{x_j - \xi_j}{|x-\xi|^n} d\xi\right]_{x=0} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_B \frac{h\cdot\delta_{jk} - \xi_j}{|e^k - \xi|^n} d\xi - \int_B \frac{-\xi_j}{|\xi|^n} d\xi\right].$$

Ahora bien, si $j \neq k$, ambas integrales son nulas cualquiera que sea h, puesto que el integrando es impar respecto de ξ_j y el dominio de integración es simétrico respecto del hiperplano $\xi_j = 0$.

Pongamos $j = k = n$. Sea B^* la bola en E^n de radio R y centro $e^n = (0, \dots, 0, h)$. Sean $G = B \cup B^* - B \cap B^*$, $D(R)$ la bola de radio R en $E^{n-1} = \{0; \xi_1, \dots \xi_{n-1}\} = \{0; \hat{\xi}\}$ y $B(1)$ la bola unidad en E^n. Finalmente sean $d\hat{\xi}$ la medida de volumen de $D(1)$, y $\Theta = \Theta(\hat{\xi})$ el ángulo que forma en E^n el eje $0\,\xi_n$ con el radio $0\,\xi$, donde $\xi = (\hat{\xi}, \xi_n) \in \partial B(1)$. Con estas notaciones se tiene

$$\Omega_n I_{nn} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_G \frac{|\xi_n|}{|\xi|^n} d\xi = 2\int_{D(R)} \frac{|\xi_n|}{|\xi|^n} d\hat{\xi} =$$

$$= 2\int_{D(1)} \cos\Theta \cdot d\hat{\xi} = \int_{B(1)} d\xi = \frac{1}{n}\Omega_n .$$

Resulta, por tanto, que $A_1(y, y) = I_1(y)$, c.q.d.

b) La demostración de que $A_2(y, y) = I_2(y)$ es inmediata, puesto que la integral A_2 puede derivarse indefinidamente derivando bajo el signo integral.

c) Para demostrar que $A_3(y, y) = I_3(y)$ podemos también trasladar los ejes y hacer $y = 0$, trasladando también la función $f(x)$ aunque por comodidad seguiremos designándola igual. Entonces se sigue que es suficiente que demostremos que $A_3(0, 0) = I_3(0)$, siendo

$$A_3(0, 0) \equiv [A_3(x, 0)]_{x=0} =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \int_{|\xi|<R} \frac{1}{\Omega_n} \frac{x_j - \xi_j}{|x-\xi|^n} [f(\xi) - f(0)]\, d\xi\right]_{x=0} =$$

$$(6) \qquad = \frac{1}{\Omega_n} \lim_{h \to 0} \int_{|\xi|<R} \frac{1}{h} \left(\frac{\delta_{jk}\, h - \xi_j}{| e^k - \xi |^n} - \frac{-\xi_j}{| \xi |^n} \right) [f(\xi) - f(0)]\, d\, \xi.$$

Por consiguiente será suficiente que demostremos que en esta última fórmula se pueden permutar el límite y la integral. Para eso, a su vez, será suficiente, en virtud del teorema generalizado de LEBESGUE y puesto que el integrando es obviamente medible, que demostremos que el valor absoluto del integrando $H(\xi, h)$ puede acotarse en la forma

$$(7) \qquad | H(\xi, h) | \leq \frac{C_1}{| \xi |^{n-\alpha}} + \frac{C_2}{(| \hat{\xi} | + | \xi_k - h |)^{n-\alpha}},$$

donde C_1 y C_2 son constantes reales independientes de ξ y de h, para $| \xi | < R$ y para $h \to 0$; y donde $\hat{\xi}$ es el vector $(n-1)$ dimensional que se obtiene al quitar la componente ξ_k del vector ξ.

Vamos a demostrar (7) por separado según que $j = k$ o bien $j \neq k$. Sea primero $j \neq k$ y pongamos $k = 1, j = 2$. Entonces, de la (6) se sigue, poniendo $\xi = (\xi_1, \hat{\xi})$,

$$(8a) \quad H(\xi, h) = \frac{\xi_2 (| \hat{\xi} |^2 + (\xi_1 - h)^2)^{n/2} - \xi_2 | \xi |^n}{| h | \cdot | \xi |^n \cdot (| \hat{\xi} |^2 + (\xi_1 - h)^2)^{n/2}} | f(\xi) - f(0) |,$$

$$(8b) \qquad | H(\xi, h) | \leq \frac{2^{n/2} \cdot C \cdot | \xi |^\alpha \cdot | N(\xi, h) |}{| h | \cdot | \xi |^n \cdot (| \hat{\xi} | + | \xi_1 - h |)^n},$$

donde C es la constante de HOLDER de f y siendo $N(\xi, h)$ el numerador de la fracción que figura en (8a).

En orden a demostrar (7) podemos limitarnos al caso en que $h > 0$, con tal que permitamos que ξ_1 sea positivo o negativo, puesto que obviamente se podrá hacer lo mismo para $h < 0$ cambiando el signo de ξ_1.

Distingamos según que ξ_1 sea positivo o negativo. Para $\xi_1 > 0$ dividamos el dominio de integración $| \xi | < R$, según que sea $0 < h < 2\, \xi_1$ o que sea $0 < 2\, \xi_1 < h$. La condición $0 < h < 2\, \xi_1$ es equivalente a $| \xi_1 - h | < \xi_1$. En este primer caso y considerando $N(\xi, h)$ como función de ξ_1 y aplicando la fórmula de TAYLOR se obtiene con cierta Θ, $0 < \Theta < 1$,

$$| N(\xi, h) | = | \xi_2 | \cdot (| \xi |^n - (| \xi |^2 + (\xi_1 - h)^2)^{n/2}) =$$

$$= |\xi_2| \cdot (|\xi|^n - (|\xi|^n - nh(\xi_1 - \Theta h)[|\xi|^2 + (\xi_1 - \Theta h)^2]^{(n-2)/2}) \leq$$

$$\leq nh \cdot |\xi_1| \cdot |\xi_2| \cdot |\xi|^{n-2} \leq$$

$$\leq nh \cdot |\xi|^{n-1} \cdot (|\xi| + |\xi_1 - h|).$$

Sustituyendo en (8b) se obtiene

$$|H(\xi, h)| \leq \frac{2^{n/2} \cdot n \cdot C}{|\xi|^{1-\alpha} \cdot (|\hat{\xi}| + |\xi_1 - h|)^{n-1}} \leq$$

$$\leq \frac{2^{(n+1-\alpha)/2} \cdot n \cdot C}{(|\hat{\xi}| + |\xi_1 - h|)^{n-\alpha}},$$

que es de la forma (7), como queríamos demostrar.

Consideremos ahora la región del dominio de integración en la que $0 < 2\xi_1 < h$. Pongamos $h - \xi_1 = \bar{\xi}_1$, $(\bar{\xi}_1, \hat{\xi}) = \bar{\xi}$. Entonces se tiene $\bar{\xi}_1 < 0$, $0 < h < 2\bar{\xi}_1$, y por lo tanto se sigue, procediendo como en el caso anterior, que

$$|N(\xi, h)| = |\xi_2| \cdot (|\bar{\xi}| - (|\hat{\xi}|^2 + (\bar{\xi}_1 - h)^2)^{n/2}) \leq$$

$$\leq n \cdot h \cdot \bar{\xi}_1 \cdot |\xi_2| \cdot |\bar{\xi}|^{n-2} \leq nh \cdot |\bar{\xi}|^n \leq \tag{9}$$

$$\leq nh \cdot (|\hat{\xi}| + |\xi_1 - h|)^n.$$

Sustituyendo en 8b) se obtiene

$$|H(\xi, h)| \leq \frac{2^{n/2} \cdot n \cdot C}{|\xi|^{n-\alpha}}, \tag{10}$$

que es también de la forma (7).

Finalmente consideremos el semiespacio $\xi_1 < 0$, suponiendo $h > 0$. Pongamos también $h - \xi_1 = \bar{\xi}_1$. También se tiene $\bar{\xi}_1 > 0$, $0 < h < 2\bar{\xi}_1$. Por lo tanto se siguen las mismas fórmulas (9), y se llega a la misma fórmula (10). Por consiguiente se verifica (7) en todos los casos y por tanto también las (5), cuando $j \neq k$.

Consideremos ahora el caso en que $j = k = 1$. Procediendo como en el caso anterior, obtenemos partiendo de la (6), la misma fórmula (8b), pero siendo ahora

$$N(\xi, h) = (h - \xi_1) \cdot |\xi|^n + \xi_1 (|\hat{\xi}|^2 + (\xi_1 - h)^2)^{n/2} =$$

$$= (h - \xi_1) [|\xi|^n - (|\hat{\xi}|^2 + (\xi_1 - h)^2)^{n/2}] + h (|\hat{\xi}|^2 + (\xi_1 - h)^2)^{n/2}.$$

La demostración de (7) puede hacerse de la misma manera que en el caso anterior $j \neq k$. Con ella la fórmula (5) queda completamente demostrada, y por tanto también la (2).

Demostración de II). Basta aplicar la fórmula (2). Sea $y \varepsilon E^n$, $y \neq x$. Es claro que los dos primeros sumandos del segundo miembro de (2) son holderianos con exponente α. Apliquemos la fórmula (2) con $R = |y - x|$. Mediante un cálculo análogo al efectuado en la obtención de (4) se obtiene

$$|u_{jk}(y) - u_{jk}(x)| \leq C_1 |y - x|^\alpha +$$

$$+ \left| \int_{|\xi| > |y-x|} u_{jk}(\xi) [(f(y - \xi) - f(y)) - (f(x - \xi) - f(x))] \, d\xi \right| \leq$$

$$\leq C_1 |y - x|^\alpha + \frac{2C(n+1)}{\Omega_n} \int_{|\xi| < |y-x|} \frac{d\xi}{|\xi|^{n-\alpha}}.$$

Llamando Σ a la esfera de radio unidad cuya área es Ω_n, $d\sigma$ al elemento de área de Σ, y pasando a coordenadas polares (ϱ, Θ), se obtiene

$$|u_{jk}(y) - u_{jk}(x)| \leq$$

$$\leq C_1 |y - x|^\alpha + \frac{2C(n+1)}{\Omega_n} \int_0^{|y-x|} \int_\Sigma \varrho^{\alpha-1} \, d\varrho \, d\sigma =$$

$$= C_1 |y - x|^\alpha + \frac{2C(n+1)}{\alpha} |y - x|^\alpha,$$

c.q.d.

Del teorema anterior se deduce inmediatamente el corolario siguiente.

COROLARIO. — *Sea D un conjunto acotado de E^n.*

1) *Puede tomarse R suficientemente grande para que la primera integral de (2) sea nula para todo $x \varepsilon D$.*

2) *Se tiene*

$$(11)\quad \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k\, \partial x_j} = \frac{1}{n}\, \delta_{jk} f(x) + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|\xi - x| < \varepsilon} \frac{\partial^2 E(x-\xi)}{\partial x_k\, \partial x_j} f(\xi)\, d\xi,\ x \in E^n.$$

Demostración. Para la primera parte basta considerar el conjunto G que sea la unión de D y del soporte compacto de f. Basta tomar R tal que

$$R \geq \sup\{|y - x|\,;\, y \in D,\ x \in \text{soporte de } f\}.$$

Para la segunda parte basta hacer tender R hacia cero en la fórmula (2).

§ 3. *El laplaciano global y su continuidad.*

Hemos mencionado que aunque sea $f \in C_0(E^n)$, si no es holderiana, puede suceder que en algún punto no existan las derivadas segundas del potencial, e incluso hemos dado un sencillo contraejemplo. Por otra parte, hemos visto que, si se interpreta el laplaciano Δ en la teoría de distribuciones, entonces para todo $f \in C_0(E^n)$ se tiene $\Delta u = f$. Esto sugiere la sospecha de que las partes infinitas, o singularidades, de las derivadas segundas u_{kk} se compensen y sea posible definir el laplaciano en un punto, sea Δ^*, de modo que se tenga

$$\Delta^* u(x) = f(x),\ f \in C_0(E^n),\ x \in E^n.$$

Para ello introducimos la siguiente definición de *laplaciano global* Δ^*,

$$(12)\quad \Delta^* u(x) = \lim_{h \to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{h} \left(\frac{\partial u(x + e^k)}{\partial x_k} - \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \right),$$

donde e^k es el vector unitario ya definido en § 2.a). El teorema siguiente justifica la introducción de Δ^*.

TEOREMA 2. — *Sea $f \in C_0(E^n)$ y sea u el potencial dado por* (1). *Entonces,*

$$(13)\quad \Delta^* u(x) = f(x),\ x \in E^n.$$

Demostración. Definamos el núcleo $J(\xi, h)$ de modo que

$$\Delta^* u(x) = \lim_{h\to 0} \int_{E^n} \frac{1}{\Omega_n h} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x_k + h - \xi_k}{|\xi - (x + e^k)|^n} - \frac{x_k - \xi_k}{|\xi - x|^n} \right) f(\xi)\, d\xi \equiv$$

$$\equiv \lim_{h\to 0} \int_{E^n} J(x - \xi, h) f(\xi)\, d\xi. \tag{14}$$

Sea en general $J(\xi, h)$ una función definida para $\xi \varepsilon E^n$, y para $h \varepsilon A \subset E^m$, siendo m y n enteros positivos. Sea $\alpha \geq 0$. Sea $a \varepsilon \overline{A}$, pero $a \notin A$. Diremos que J es un *núcleo equivalente a la medida de Dirac* para $h \to a$ y con relación al espacio $C^\alpha{}_0(E^n)$, si satisface las cuatro condiciones siguientes:

a) Para h fijo, J como función de ξ es localmente integrable en E^n.

b) Cualesquiera que sean R y r, $0 < r < R$, la función $J(\xi, h)$ tiende uniformemente hacia cero para $r \leq |\xi| \leq R$, cuando $h \to a$.

c) Cualquiera que sea r, $r > 0$, se tiene

$$\lim_{h\to a} \int_{|\xi|<r} J(\xi, h)\, d\xi = 1. \tag{15}$$

d) Existen números R_0, γ_0, M reales positivos, tales que con $\beta = 0$ si $\alpha = 0$, y con $\beta < \alpha$ si $\alpha > 0$, se tiene

$$\int_{|\xi|<R_0} |J(\xi, h)| \cdot |\xi|^\beta\, d\xi \leq M,\ 0 < |h - a| \leq \gamma_0 \cdot |\xi| < R_0 \tag{16}$$

Obsérvese que la última condición d) queda automáticamente satisfecha con $\alpha = 0$, o sea que J es un núcleo equivalente a δ para funciones continuas, cuando existe un entorno del origen en el que $J(\xi, h)$ es no negativa para todo h tal que $0 < |h - a| < \gamma_0$.

Obsérvese también que la fórmula (2) incluye el siguiente resultado, a saber, que $J(\xi, h)$, dado por (14), es un núcleo equivalente a la medida de Dirac, cuando $h \to 0$, y para $C^\alpha{}_0(E^n)$, cualquiera que sea $\alpha > 0$.

El teorema 2 es evidentemente una consecuencia inmediata de los dos lemas siguientes.

LEMA 1. — *El núcleo* $J(\xi, h)$, $\xi \varepsilon E^n$, $h \varepsilon E^1$, $0 < |h| < 1$, *definido por* (14), *es equivalente a la medida de Dirac, cuando* $h \to 0$, *y en relación con* $C_0(E^n)$, *o sea para las funciones continuas de soporte compacto en* E^n.

Demostración. Introduzcamos las siguientes notaciones:

$$\xi \equiv (\xi_1, ..., \xi_n) \equiv (\xi^k, \xi_k), k = 1, 2, ..., n,$$

$$\xi^k \equiv (\xi_1, ..., \xi_{k-1}, (\,), \xi_{k+1}, ..., \xi_u),$$

$$P^2_k(\xi, h) \equiv P^2_k \equiv |\xi^k|^2 + (\xi_k - h)^2,$$

$$\prod_{j=1}^{n} (k)\, P_j^n(\xi, h) \equiv P^n_1 \dots P^n_{k-1} \cdot P^n_{k+1} \dots P^n_n,$$

$$P^n_k(\xi, h) = |\xi|^n - nh\,\xi\,|\xi|^{n-2} + h^2 \cdot Q_k(\xi, h, \Theta), \tag{17}$$

siendo $0 \leq \Theta \leq 1$ y

$$Q_k(\xi, h, \Theta) \equiv Q_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 P^n_k(\xi, \Theta h)}{\partial \xi^2_k}.$$

De las (14) se deducen las siguientes expresiones del núcleo J,

$$J(\xi, h) = \frac{1}{\Omega_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{h}\left(\frac{h-\xi_k}{P^n_k} + \frac{\xi_k}{|\xi|^n}\right) = \tag{18}$$

$$= \frac{1}{\Omega_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{N_k(\xi, h)}{h \cdot |\xi|^n \cdot P^n_k} = \frac{1}{\Omega_n} \cdot \frac{N(\xi, h)}{h \cdot |\xi|^n \cdot P^n_1 \dots P^n_n},$$

siendo

$$N_k(\xi, h) = (h - \xi_k)\,|\xi|^n + \xi_k \cdot P^n_k = \tag{19}$$

$$= h\,[|\xi|^n - n\,\xi^2_k \cdot |\xi|^{n-2} + h\xi_k\,Q_k],$$

$$N(\xi, h) = \sum_{k=1}^{n} N_k \cdot \prod_{j=1}^{n} (k)\, P^n_j = \tag{20}$$

$$= h^2\,\{|\xi|^{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n} \xi_k\,\Omega_k + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{h} N_k\right) \cdot \frac{1}{h} \left(\prod_{j=1}^{n} P^n_j - |\xi|^{n(n-1)}\right)\},$$

donde las dos Σ definen manifiestamente funciones continuas de las variables (ξ, h).

Vamos ahora a demostrar que $J(\xi, h)$ satisface efectivamente las cuatro condiciones a) - d). Para h fijo $h \neq 0$, el núcleo $J(\xi, h)$ es localmente integrable, pues lo es cada una de las dos fracciones de la primera fórmula de (18).

Las fórmulas (18) y (20) ponen de manifiesto que también se verifica la segunda condición b), como es bien sabido. También es bien sabido que J satisface la condición c), y su demostración está contenida en los resultados del apartado a) de la demostración de la parte I) del teorema 1.

Queda por demostrar únicamente la fórmula (16) con $\alpha = 0$. Para ello elijamos R_0 y γ_0 arbitrarios, y podemos suponer $h > 0$ en virtud de la simetría de las ξ_k. Descompongamos el dominio de integración $|\xi| < R_0$ en las $(n + 3)$ regiones siguientes:

$$D_0 = \{\xi\,;\, |2\xi_i| < h, i = 1, \ldots, n\}$$

$$D_k = \{\xi\,;\, h < 2\xi_k < 3h, |2\xi_i| < h, i = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n\},\ k = 1, \ldots, n$$

$$D^* = \{\xi\,;\, |\xi| < 3h, \xi \notin \bigcup_{k=0}^{n} D_k\}$$

$$\hat{D} = \{\xi\,;\, 3h < |\xi| < R_0\}.$$

Es claro que (16) quedará demostrada si la demostramos para cada una de estas $(n + 3)$ regiones.

Ahora bien, teniendo en cuenta la primera de las (18) y considerando que todos los sumandos se comportan igual, se tiene

$$\int_{D_0} |J(\xi, h)|\, d\xi \leq \frac{n}{\Omega_n h} \int_{D_0} \left(\frac{3h}{2 \cdot (h/2)^n} + \frac{1}{|\xi|^{n-1}} \right) d\xi \leq$$

$$\leq \frac{3n}{2 \cdot \Omega_n} + \frac{n}{h} \int_0^{\sqrt{n}h/2} d\varrho = \frac{3n}{2 \cdot \Omega_n} + \frac{n\sqrt{n}}{2}.$$

Casi la misma demostración vale para $D_1, \ldots, D_n$. Análogamente para D^* se tiene

$$\int_{D^*} |J(\xi, h)|\, d\xi \leq \frac{n}{\Omega_n h} \int_{|\xi|<3h} \frac{4h + 3h}{(h/2)^n} d\xi = 7 \cdot 6^n.$$

Finalmente para $\hat{D}$, empleando para J la última fórmula de (18) y la (20), se sigue que existen constantes C_j, $\hat{M}$, tales que

$$\int_{\hat{D}} |J(\xi, h)|\, d\xi \leq \frac{C_0}{\Omega_n} \int_{\hat{D}} \frac{h^2 \cdot (|\xi| + h)^{n.n-1}}{h \cdot |\xi|^n \cdot (|\xi| - h)^{n.n}}\, d\xi =$$

$$= C_0 h \int_{3h}^{R_0} \frac{(\varrho + h)^{n(n+1)-2}}{\varrho^n (\varrho - h)^{n.n}}\, d\varrho \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{n(n+1)-2} C_j \int_{3h}^{R_0} \frac{h^{1+j}\, d\varrho}{\varrho^{2+j}} \leq \hat{M}\,.$$

LEMA 2. — *Sea* $\alpha \geq 0$ *y sea* $f \varepsilon C^{\alpha}{}_0 (E^n)$. *Sea* $J(\xi, h)$, $\xi \varepsilon E^n$, $h \varepsilon A \subset E^m$, *un núcleo equivalente a la medida de Dirac, cuando* $h \to a$ *y respecto de* $C^{\alpha}{}_0 (E^n)$.

Entonces, se tiene

$$\lim_{\substack{h \to a \\ x \to x^0}} \int_{E^n} J(x - \xi, h) \cdot f(\xi)\, d\xi = f(x^0),\ x^0 \varepsilon E^n. \tag{21}$$

Este enunciado afirma más de lo que es necesario para demostrar el teorema 2, pero lo damos en esta forma más general por el interés que tiene en sí mismo.

Demostración. Pongamos

$$I(x, h) \equiv \int_{E^n} J(x - \xi, h) \cdot f(\xi)\, d\xi. \tag{22}$$

Se trata de demostrar la (21), o sea que dado $\varepsilon > 0$, existen $\eta > 0$, $\gamma > 0$ tales que las acotaciones

$$|x - x^0| < \eta,\ |h - a| < \gamma \tag{23}$$

implican

$$|I(x, h) - f(x^0)| < \varepsilon. \tag{24}$$

El núcleo J satisface por hipótesis las condiciones a) - d). Para la condición b) tomemos R de modo que $G \subset B(x^0, R)$, siendo G el soporte de f y siendo $B(x^0, R)$ la bola en E^n de centro x^0 y radio R. Sean $R_0, \gamma_0, M \geq 1$, los números que satisfacen (16).

Empecemos fijando η, $0 < 3\eta < 1$, $3\eta < R_0$, de modo que, cuando sea $\alpha = 0$, se tenga

$$(25a) \qquad |f(\xi) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{6M}, \text{ si } |\xi - x| < 3\eta;$$

y cuando sea $\alpha > 0$, se tenga también, además de (25a), que

$$(25b) \qquad C \cdot (3\eta)^{\alpha-\beta} \leq \frac{\varepsilon}{3M},$$

siendo C la constante de HOLDER de f, y siendo β el exponente que figura en (16); ello es siempre posible tomando η suficientemente pequeño.

Sea $|G|$ la medida de LEBESGUE de G y sea F el máximo de $|f(x)|$, $x \varepsilon E^n$. Habiendo fijado η, fijemos ahora γ, $0 < \gamma < \gamma_0$, de modo que para $|h - a| < \gamma$ se tengan simultáneamente

$$(26) \qquad |J(\xi, h)| \leq \varepsilon^* = \min\left\{\frac{\varepsilon}{6F \cdot |G|}, \frac{n\varepsilon}{6F \cdot \Omega_n}\right\}, \text{ si } |\xi| \geq \eta$$

$$(27) \qquad \left| 1 - \int_{|\xi|<\eta} J(\xi, h)\, d\xi \right| \leq \frac{\varepsilon}{6F},$$

lo cual es siempre posible en virtud de las condiciones b) y c).

Habiendo fijado η, γ, y poniendo $B \equiv B(x^0, 2\eta)$, de las (22), (23) y (26) se sigue

$$(28) \qquad \begin{aligned} |I(x, h)| &= \left| \int_{E^n - B} J(x - \xi, h) \cdot f(\xi)\, d\xi + \int_B J f\, d\xi \right| \leq \\ &\leq F \cdot |G| \cdot \varepsilon^* + \left| \int_B J(x - \xi, h) \cdot f(\xi)\, d\xi \right|, \end{aligned}$$

puesto que, cuando ξ varía en el exterior de B, se tiene que $x - \xi$ varía en el exterior de la bola $B^* \equiv B(x - x^0, 2\eta)$, la cual contiene la bola $B(0, \eta)$ y por tanto se puede aplicar (26); todo ello cualesquiera que sean x, h con tal que se cumplan las (23).

Por otra parte se tiene

$$B(0, \eta) \subset B^* \subset B(0, 3\eta) \subset B(0, 1),$$

y por tanto, de las (23) y (27) se sigue

$$|1 - \int_B J(x-\xi, h) \cdot d\xi| \leq$$

$$\leq \left| 1 - \int_{|\xi|<\eta} J(\xi, h)\, d\xi \right| + \int_{\eta<|\xi|<1} |J(\xi, h)|\, d\xi \leq$$

(29)

$$\leq \frac{\varepsilon}{6F} + \frac{\Omega_n\, \varepsilon^*}{n} \leq \frac{\varepsilon}{3F}\,.$$

Recordemos ahora que se trata de demostrar la (24). Suponiendo siempre que se verifican las (23) y teniendo en cuenta las (28), (25a) y (29), se tiene

$$|I(x, h) - f(x^0)| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{6} + \int_B J(x-\xi, h) \cdot f(\xi)\, d\xi - f(x)| + |f(x) - f(x^0)| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6M} + |\int_B J f d\xi - f(x)\, J(x-\xi, h)\, d\xi| + \frac{\varepsilon}{3F} \cdot F \leq$$

(30)

$$\leq \frac{2\varepsilon}{3} + \left| \int_B J(x-\xi, h) \cdot [f(\xi) - f(x)]\, d\xi \right|.$$

Llamando $I^*(x, h)$ esta última integral se tiene, cuando $\alpha = 0$ y teniendo en cuenta la (25a) y la (16) y que $B^* \subset B(0, 3\eta)$,

$$|I^*(x, h)| \leq \int_{B^*} |J(\zeta, h)| \cdot |f(x-\zeta) - f(x)|\, d\zeta \leq$$

(31a) $$\leq \frac{\varepsilon}{6M} \int_{B^*} |J(\zeta, h)|\, d\xi \leq \frac{\varepsilon}{6}\,.$$

Obsérvese que en este caso $\alpha = 0$ no es necesaria la descomposición que hemos hecho de $f(x^0)$ en $f(x)$ y $f(x^0) - f(x)$.

Cuando $\alpha > 0$, teniendo en cuenta la (25b) y la (16), se tiene

$$|I^*(x, h)| \leq \int_{B^*} |J(\zeta, h)| \cdot C \cdot |\zeta|^\alpha\, d\zeta \leq$$

(31b) $$\leq \frac{\varepsilon}{3M} \int_{B^*} |J(\zeta, h)| \cdot |\zeta|^\beta\, d\zeta \leq \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Por tanto, en ambos casos, de la (30) y (31) se sigue la (24), c.q.d.

Aplicando el lema 2 o fórmula (21) a la (14) y teniendo en cuenta la definición (12), resulta que el laplaciano global del potencial de una densidad de volumen continua, existe y coincide en todo punto con la densidad. O sea el teorema 2, c.q.d.

REFERENCIAS

[1] A. P. CALDERÓN Y A. ZYGMUND, *On the existence of certain singular integrals*, Acta Math. 88 (1952), 85-139.

[2] A. DOU, *Las derivadas segundas del potencial de volumen*, Actas del I Congreso Luso-hispano de Matemáticos (1972). Próximo a publicarse.

[3] A. DOU, *Núcleos equivalentes a la medida de Dirac*, Bul. Inst. Politehn. Iasi, (1973). Próximo a publicarse.

[4] B. EPSTEIN, *Partial Differential Equations*, McGraw-Hill, Nueva York, 1962.

[5] O. D. KELLOGG, *Foundations of Potential Theory*, Ungar, Nueva York, 1929. Capítulo VI, Sección 3.

[6] J. SCHAUDER, *Ueber lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung*, Math. Z. 38 (1933), 257-282.