TEILRÄUME GEWISSER TOPOLOGISCHER VEKTORRÄUME

NORBERT ADASCH UND BRUNO ERNST

In letzter Zeit wurden in der Kategorie der (nicht notwendig lokalkonvexen) topologischen Vektorräume gewisse Klassen von topologischen Vektorräumen ausgezeichnet: die ultratonnelierten, quasiultratonnelierten, ultrabornologischen, bzw. Ultra-(DF)-Räume. Sie übernehmen hier die Rollen, die die tonnelierten, quasitonnelierten, bornologischen, bzw. (DF)-Räume in der Kategorie der lokalkonvexen Räume spielen.

Dieudonné [7] und Valdivia [19], [20], [21] zeigten, daß ein Teilraum endlicher Codimension eines tonnelierten, quasitonnelierten, bornologischen, bzw. (DF)-Raumes wieder tonneliert, quasitonneliert, bornologisch, bzw. ein (DF)-Raum ist.

Wir zeigen in dieser Arbeit, daß diese Ergebnisse auch für die entsprechenden nicht lokalkonvexen Räume gelten.

Als Anwendung untersuchen wir die Bildräume schwach singulärer linearer Abbildungen und erhalten für den lokalkonvexen Fall eine starke Verallgemeinerung eines entsprechenden Ergebnisses von G. Köthe [13] über die Bildräume abgeschlossener linearer Abbildungen.

In den lokalkonvexen Räumen halten wir uns an die Terminologie von G. Köthe [12]. Wir wollen nun die weiteren vorkommenden Begriffe definieren: Sei $E[T]$ ein hausdorffscher topologischer Vektorraum (im folgenden stets abgekürzt HTVR). Eine Folge $(U^{(n)})$ von kreisförmigen absorbierenden Teilmengen mit der Eigenschaft $U^{(n+1)} + U^{(n+1)} \subset U^{(n)}$ heißt «*Faden*» von $E[T]$. Wir nennen $(U^{(n)})$ einen «*topologischen Faden*», wenn alle $U^{(n)}$ Nullumgebungen von $E[T]$ sind.

Ein Faden $(U^{(n)})$ von $E[T]$, dessen $U^{(n)}$ abgeschlossen sind, heißt «*Ultratonne*» von $E[T]$. Ein HTVR $E[T]$ heißt «*ultratonneliert*», wenn jede Ultratonne ein topologischer Faden ist. Die Theorie der ultratonnelierten Räume wurde in W. Robertson [15], S. O. Iyahen [9], S. Tomášek [17], N. Adasch [3], L. Waelbroeck [22] entwickelt.

Eine Ultratonne, deren $U^{(n)}$ alle beschränkten Teilmengen von $E[T]$ absorbieren, heißt «*Quasiultratonne*». Ein HTVR $E[T]$ heißt «*quasiultratonneliert*», wenn jede Quasiultratonne ein topologischer Faden ist. Zur Theorie der quasiultratonneliertem Räue siehe S. O. Iyahen [9] und N. Adasch [3].

Ein Faden $(U^{(n)})$ heißt «*Ultrabornolog*» von $E[T]$, wenn jedes $U^{(n)}$ alle beschränkten Mengen von $E[T]$ absorbiert. Ein HTVR $E[T]$ heißt «*ultrabornologisch*», wenn jedes Ultrabornolog von $E[T]$, ein topologischer Faden ist. Die Theorie dieser Räume findet man in S. O. Iyahen [9], S. Tomášek [18] und N. Adasch [1].

Sei $(U_i^{(n)})_{i=1}^{\infty}$ eine Folge von Fäden, dann wollen wir als Durchschnittsfaden $\bigcap_{i=1}^{\infty}(U_i^{(n)}) = (U^{(n)})$ mit $U^{(n)} =: \bigcap_{i=1}^{n} U_i^{(n)}$ (falls jedes $U^{(n)}$ absorbierend ist) verstehen.

B. Ernst [8] nennt einen HTVR $E[T]$ *Ultra-(DF)-Raum*, falls $E[T]$ eine Fundamentalfolge von beschränkten Teilmengen besitzt und falls der Durchschnitt $(U^{(n)})$ einer Folge von topologischen Fäden $(U_i^{(n)})_{i=1}^{\infty}$, mit abgeschlossenen $U_i^{(n)}$, ein topologischer Faden von $E[T]$ ist, wenn die $U^{(n)}$ nur jede beschränkte Teilmenge von $E[T]$ absorbieren. Zur Theorie dieser Räume siehe B. Ernst [8] und zum Zusammenhang mit den lokalkonvexen (DF)-Räumen N. Adasch [6].

1. Teilräume endlicher und abzählbarer Codimension von ultratonnelierten Räumen

Sei $E[T]$ ein HTVR. Dann nennen wir diejenige lineare Topologie T^b, die man erhält, wenn man alle Ultratonnen von $E[T]$ als Nullumgebungsbasis nimmt, die «*starke Topologie*» von $E[T]$. Wir zeigen:

(1) *Sei H ein linearer Teilraum endlicher Codimension von $E[T]$. Sei $\widehat{T^b}$ die von der starken Topologie T^b von $E[T]$ auf H induzierte Topologie und $\widehat{T}^b$ die zur von T auf H induzierten Topologie $\widehat{T}$ gehörende starke Topologie. Dann gilt $\widehat{T}^b = \widehat{T^b}$.*

Es genügt, die Behauptung für codim $(H) = 1$ zu beweisen. Sei $(U^{(n)})$ eine Ultratonne in H. Wir zeigen, daß es in $E[T]$ eine Ultratonne $(V^{(n)})$ mit $H \cap V^{(n)} \subset U^{(n)}$ gibt.

Für die Mengen $\overline{U^{(n)}}^T$ gibt es zwei Möglichkeiten:

a) $\overline{U^{(n)}}^T \not\subset H$ für alle n; b) $\overline{U^{(n)}}^T \subset H$ für alle n ab einem festen n_0.

a) Die Mengen $V^{(n)} = \overline{U^{(n)}}^T$ bilden die gesuchte Ultratonne in $E[T]$.

b) Sei $x_0 \in E \sim H$ und sei $K(x_0)$ die kreisförmige Hülle der einpunktigen Menge $\{x_0\}$. Setze dann $V^{(n)} = U^{(n_0+n)} + (1/2^n) \cdot K(x_0)$. q. e. d.

Da ein HTVR $E[T]$ genau dann ultratonneliert ist, wenn $T = T^b$, folgt aus (1) sofort:

(2) *Ein Teilraum endlicher Codimension eines ultratonnelierten Raumes ist wieder ultratonneliert.*

In [4] wird jeder linearen Topologie T auf E die «*assoziierte ultratonnelierte Topologie* T^{ut}» zugeordnet. Sie ist unter denjenigen linearen Topologien T', die feiner als T sind, so daß $E[T']$ ultratonneliert ist, die gröbste. Wir erhalten die zu (1) analoge Aussage für T^{ut}:

(3) *Ist H ein linearer Teilraum endlicher Codimensión von $E[T]$, so gilt mit denselben Bezeichnungen wie in* (1) $\widehat{T^{ut}} = \hat{T}^{ut}$.

Beweis. Da $H[\widehat{T^{ut}}]$ nach (2) ultratonneliert ist, folgt sofort $\hat{T}^{ut} \subset \widehat{T^{ut}}$.

Betrachten wir nun die Einbettung $\mathrm{I} : H[\hat{T}] \to E[T]$. Dann bleibt I stetig als Abbildung von $H[\hat{T}^{ut}]$ in $E[T]$. Nach [4] 3. (2) bleibt I sogar stetig als Abbildung von $H[\hat{T}^{ut}]$ in $E[T^{ut}]$. Also folgt $\hat{T}^{ut} \supset \widehat{T^{ut}}$, womit (3) gezeigt ist.

Um für den Fall, daß H ein abgeschlossener Teilraum abzählbarer Codimension ist eine (2) entsprechende Aussage zu beweisen, benötigen wir das folgende Lemma.

(4) *Sei $E[T]$ ein ultratonnelierter HTVR,* und sei E_n *eine aufsteigende Folge von Teilräumen von E mit* $E = \bigcup_{n=1} E_n$. *Dann gilt:*

a) *Ein Faden* $(V^{(j)})$ *ist genau dann ein topologischer Faden in* $E[T]$, wenn $E_n \cap V^{(j)}$ *für jedes n und j eine Nullumgebung in der von T auf E_n induzierten Topologie T_n ist.*

b) *Eine lineare Abbildung von $E[T]$ in einen beliebigen HTVR $F[T']$ ist genau dann stetig, wenn sie auf jedem $E_n[T_n]$ stetig ist.*

c) *$E[T]$ ist der induktive Limes der $E_n[T_n]$, wobei der induktive Limes im Sinne von* [9], [10], [22] *verstanden wird.*

Beweis. Wir beweisen die Behauptung mit ähnlichen Methoden wie sie im Beweis von [8], 2. (1) benutzt werden. Nach Voraussetzung gibt es für jedes n eine Ultratonne $(U_n^{(j)})_{j=0}^{\infty}$ in $E[T]$, so daß $E_n \cap U_n^{(j)} \subset E_n \cap V^{(j+1)}$ für $j \geq 0$. Für $0 \leq j < n$ gilt dann auch $E_{n-j} \cap U_n^{(j)} \subset E_{n-j} \cap V^{(j+1)}$. Sei

$$W_n^{(j)} = \begin{cases} \overline{(E_{n-j} \cap V^{(j+1)}) + U_n^{(j+1)}} & \text{für } 0 \leq j < n \\ U_n^{(j+1)} & \text{für } j \geq n. \end{cases}$$

Dann ist jedes $(W_n^{(j)})_{j=0}^{\infty}$ eine Ultratonne in $E[T]$ und die Mengen $W^{(j)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} W_n^{(j)}$ bilden auch eine Ultratonne in $E[T]$.

Es genügt nun, $W^{(0)} \subset V^0$ zu zeigen: Für jedes n ist

$$E_n \cap W^0 \subset E_n \cap W_n^{(0)} \subset (E_n \cap V^{(1)}) + (E_n \cap V^{(1)}), \quad \text{d. h.}$$

$$W^{(0)} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \cap W^{(0)}) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [(E_n \cap V^{(1)}) + (E_n \cap V^{(1)})]$$

$$\subset V^{(1)} + V^{(1)} \subset V^{(0)}.$$

b) und c) ergeben sich unmittelbar aus a). q. e. d.

Jetzt sind wir in der Lage, den gewünschten Satz zu beweisen.

(5) *Sei $E[T]$ ein ultratonnelierter HTVR und sei E_0 ein Teilraum abzählbarer Codimension von E. Dann gilt:*

a) *Jeder algebraische Komplementärraum von E_0 ist auch ein topologischer Komplementärraum,* falls E_0 *abgeschlossen ist.*

b) *Ist E_0 abgeschlossen, so ist E_0 in der von T auf E_0 induzierten Topologie T wieder ultratonneliert.*

Beweis. a) Sei $\{x_1, x_1, \ldots\}$ eine beliebige Cobasis von E_0, und für $n = 1, 2, \ldots$ sei E_n der von E_0 und den Vektoren $x_1, \ldots, x_n$ aufgespannte lineare Raum. T_n sei die von T auf E_n induzierte Topologie. Sei P_n die Projektion von E_n auf E_0 mit

$$P_n(x) = x_0, \text{ falls } x = x_0 + \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$$
$$(x_0 \in E_0, \ \lambda_i \in \mathbf{C} \text{ für } 1 \leq i \leq n).$$

Dann ist jedes P_n eindeutig bestimmt und stetig und für $k \leq n$ ist die Restriktion von P_n auf E_k gleich P_k. Durch $P(x) = P_n(x)$, falls $x \in E_n$, wird eindeutig eine Projektion von E auf E_0 definiert, die nach (4), b) stetig ist.

b) Nach a) ist E_0 topologisch isomorph zu dem Quotientenraum von E nach dem von den $x_1, x_1, \ldots$ aufgespannten Teilraum, d. h. $E_0 [\widehat{T}]$ ist wieder ultratonneliert. q. e. d.

2. Teilräume endlicher Codimension von ultrabornologischen Räumen

Wir wollen zeigen, daß ein Teilraum endlicher Codimension eines ultrabornologischen Raumes wieder ultrabornologisch ist. Die Beweisidee geht auf Komura [11] zurück. Den Beweis von (4) verdanken wir einer freundlichen Mitteilung von Herrn Pfister (München).

Sei $E [T]$ ein HTVR. Eine Folge (x_n) in E heißt «*lokale Nullfolge*», wenn es eine nicht fallende, divergierende Folge positiver reeller Zahlen λ_n gibt (im folgenden abgekürzt $\lambda_n \uparrow \infty$), so daß die Folge $(\lambda_n x_n)$ in $E [T]$ gegen o konvergiert. (x_n) heißt «*lokalkonvergent gegen x*», wenn $(x_n - x)$ eine lokale Nullfolge ist. Eine lineare Abbildung heißt «*lokalstetig*», falls sie jede lokale Nullfolge auf eine lokale Nullfolge abbildet, eine lineare Abbildung heißt «*lokalbeschränkt*», falls das Bild jeder beschränkten Menge beschränkt ist.

Wie im lokalkonvexen Fall beweist man (Vgl. G. Köthe [12]):

(1) *Für eine lineare Abbildung A von $E [T]$ in einen HTVR $F [T']$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

a) *A ist lokalbeschränkt.*

b) *A ist lokalstetig.*

c) *A bildet jede lokale Nullfolge in eine T' — Nullfolge ab*

d) *A bildet jede lokale Nullfolge in eine beschränkte Menge von $F [T']$ ab.*

Ebenso einfach beweist man:

(2) $E [T]$ *ist genau dann ultrabornologisch, wenn jede lokalstetige Abbildung in einen (F) — Raum stetig ist.*

Wir nennen eine Folge (x_n) in $E [T]$ «*lokale Cauchyfolge*», wenn es positive reelle Zahlen $\lambda_{n,m}$ mit $\lambda_{n,m} \uparrow \infty$ gibt für $n, m \to \infty$, so daß $\lambda_{n,m} (x_n - x_m)$ gegen o konvergiert. Man sieht leicht, daß jede lokal gegen x konvergente Folge (x_n) eine lokale Cauchyfolge ist: Ist $\lambda_n \uparrow \infty$ eine Folge, so daß $\lambda_n (x_n - x) \to 0$, so bilden die Zahlen $\lambda_{n,m} = \lambda_n \cdot \lambda_m / (\lambda_n + \lambda_m)$ die gesuchte Folge mit $\lambda_{n,m} (x_n - x_m) \to 0$.

Wir zeigen noch:

(3) *Ist A eine lokalstetige Abbildung von $E[T]$ in den HTVR $F[T']$, so ist das Bild einer lokalen Cauchyfolge eine Cauchyfolge.*

Beweis. Ist (x_n) eine lokale Cauchyfolge in $E[T]$, d. h.

$$\lambda_{n,m}(x_n - x_m) \to 0 \quad \text{und} \quad \lambda_{n,m} \uparrow \infty,$$

so ist die Menge $\{\lambda_{n,m}(x_n - x_m) : n, m \in \mathbf{N}\}$ in $E[T]$ beschränkt. Dann ist nach (1) auch die Menge $\{A(\lambda_{n,m}(x_n - x_m)) : n, m \in \mathbf{N}\}$ in $F[T']$ beschränkt und $(1/\lambda_{n,m}) \cdot A(\lambda_{n,m}(x_n - x_m)) = A(x_n) - A(x_m)$ konvergiert in $F[T']$ gegen 0.

Eine Teilmenge $M \subset E[T]$ heißt «*lokaldicht*», wenn jeder Punkt in E der Limes einer lokalkonvergenten Folge aus M ist.

(4) *Sei $E[T]$ ein HTVR, und sei H ein lokaldichter Teilraum in $E[T]$ mit codim $(H) = 1$. Ist A eine lokalstetige lineare Abbildung von $H[\hat{T}]$ in einen (F) – Raum $F[T']$, so gibt es eine lokalstetige Fortsetzung $\tilde{A}$ von A auf ganz E.*

Beweis. Sei $y \in E \sim H$ und die Folge (y_n) aus H konvergiere lokal gegen y. Setze dann $\tilde{A}(y) = \lim A(y_n)$ (dieser Limes existiert nach (3)), und setze $\tilde{A}(x) = A(h) + \lambda \tilde{A}(y)$, falls $x = h + \lambda$ y mit $h \in H$, $\lambda \in \mathbf{C}$. Man überlegt sich leicht, daß hierdurch eindeutig eine lineare Abbildung von E in F erklärt wird.

Wir behaupten, daß $\tilde{A}$ lokalstetig ist. Sei (x_n) eine lokale Nullfolge in $E[T]$, wir wollen zeigen, daß die Menge $\{\tilde{A}(x_n) : n \in \mathbf{N}\}$ in $F[T']$ beschränkt ist: Es ist $x_n = h_n + \lambda_n$ y mit $h_n \in H$, $\lambda_n \in \mathbf{C}$ für alle n. Sei $x_{n,m} = h_n + \lambda_n y_m = x_n + \lambda_n(y_m - y)$. Dann ist $x_{n,m} \in H$ und $\tilde{A}(x_n) = A(x_{n,m}) + \lambda_n \tilde{A}(y - y_m)$.

Es gibt eine monoton wachsende Folge (m_n) natürlicher Zahlen, so daß $\{\lambda_n \tilde{A}(y - y_m) : m \geq m_n, n \in \mathbf{N}\}$ beschränkt ist: Da $(\tilde{A}(y - y_m))$ einelokale Nullfolge in $F[T']$ ist (dies folgt aus der Metrisierbarkeit von $F[T']$), gibt es eine Folge natürlicher Zahlen (m_n), so daß $\lambda_n \tilde{A}(y - y_{m_n})$ in $F[T']$ gegen o konvergiert. Zu jeder Nullumgebung V in $F[T']$ gibt es also eine natürliche Zahl M_v, so daß $\lambda_n \tilde{A}(y - y_{m_n}) \in V$ für $n \geq M_v$ und $\lambda_n \tilde{A}(y_{m_n} - y_m) \in V$ für $m \geq m_n \geq M_v$. Dann ist $\{\lambda_n \tilde{A}(y - y_m) : m \geq m_n \geq M_v, n \geq M_v\} \subset V$. Für $n < M_v$ bilden die $\lambda_n A(y - y_m)$ bei festem n und $m \geq m_n$ Cauchyfolgen, also wird die Menge $\{\lambda_n \tilde{A}(y - y_m) : m \geq m_n, n \in \mathbf{N}\}$ von V absorbiert.

Es bleibt noch zu zeigen, dab die Menge $\{A(x_{n,m}) : m \geq n, n \in \mathbf{N}\}$ beschränkt ist. Für jede Nullumgebung U in $E[T]$ gibt es eine natürliche Zahl M_u mit $x_{n,m} \in U$ für $n, m \geq M_u$. Für jedes feste n ist $(x_{n,m})_{m=1}^{\infty}$ lokalkonvergent gegen x_n, d. h. jede dieser Folgen ist beschränkt. Dann wird $\{x_{n,m} : m \geq n,\ n \in \mathbf{N}\}$ von U absorbiert, d. h. diese Menge ist beschränkt in $E[T]$. Damit ist auch $\{A(x_{n,m}) : m \geq n,$ $n \in \mathbf{N}\}$ in $F[T']$ beschränkt.

Wegen

$$\{\widetilde{A}(x_n) : n \in \mathbf{N}\} \subset \overline{\overline{\{A(x_{n,m}) : m \geq n, n \in \mathbf{N}\} + \{\lambda_n \widetilde{A}(y - y_m) : m \geq m_n, n \in \mathbf{N}\}}}$$

ist die Folge $(\widetilde{A}(x_n))$ in $F[T']$ beschränkt, d. h. $\widetilde{A}$ ist nach (1) lokalstetig. q. e. d.

(5) *Ist $E[T]$ ultrabornologisch und H ein Teilraum endlicher Codimension, so ist H mit der von T induzierten Topologie $\widehat{T}$ wieder ultrabornologisch.*

Beweis. Es genügt, den Fall codim $(H) = 1$ zu betrachten. Es sind zwei Fälle möglich: a) H ist lokaldicht, b) H ist lokal abgeschlossen. Im ersten Fall folgt die Behauptung sofort aus (4) und (2).

b) Analog zu Komura [11], Prop. 5.2, beweist man: H ist genau dann lokalabgeschlossen, wenn es abgeschlossen ist. H ist in diesem Fall also isomorph zu einem Quotientenraum von $E[T]$ nach einem abgeschlossenen Teilraum, womit schon alles gezeigt ist.

Ist $E[T]$ ein HTVR, so wollen wir unter T^{ub} diejenige lineare Topologie verstehen, die man erhält, wenn man alle Ultrabornologe von $E[T]$ als Nullumgebungsbasis nimmt. Da T^{ub} die feinste lineare Topologie auf E ist, die dieselben beschränkten Mengen wie T besitzt, bezeichnen wir T^{ub} als die zu T *«assoziierte ultrabornologische Topologie»*. Man überlegt sich leicht, daß T^{ub} die gröbste unter den ultrabornologischen Topologien ist, die feiner als T sind.

Mit analogen Bezeichnungen und Argumenten wie in 1.(3) folgert man aus (5).

(6) *Ist H ein Teilraum endlicher Codimension des HTVR $E[T]$, so gilt für die auf H induzierten Topologien $\widehat{T^{ub}} = \widehat{T}^{ub}$.*

3. Teilräume endlicher Codimension von quasiultratonnelierten und (UDF) — Räumen

Ist $E[T]$ ein HTVR, so bezeichnen wir mit T^{b*} die lineare Topologie auf E, die als Nullumgebungsbasis alle Quasiultratonnen von $E[T]$ besitzt. $\widehat{T}$ sei wieder die von T auf dem Teilraum $H \subset E$ induzierte Topologie. Wie für lokalkonvexe Räume gilt dann (Vgl. Valdivia [21])

(1) *Ist $E[T]$ ein HTVR und H ein Teilraum endlicher Codimension in E, so ist $\widehat{T^{b*}} = \widehat{T}^{b*}$.*

Beweis. Wir können codim $(H) = 1$ annehmen. Es gilt stets $\widehat{T^{b*}} \subset \widehat{T}^{b*}$. Daher genügt es zu zeigen, daß es zu jeder Quasiultratonne $(U^{(j)})$ von $H[\widehat{T}]$ eine Quasiultratonne $(V^{(j)})$ in $E[T]$ mit $V^{(j)} \cap H \subset U^{(j)}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ gibt.

$\overline{U^{(j)}}$ bzw. $\overline{U^{(j)}}^0$ sei die Abschließung von $U^{(j)}$ in $E[T]$ bzw. in $E[T^{ub}]$. Wir machen folgende Fallunterscheidung:

a) H ist dicht in $E[T^{ub}]$. Nach Abschnitt 2. ist dann $\overline{U^{(j)}}^0$ eine Nullumgebung in $E]T^{ub}]$ und $V^{(j)} = \overline{U^{(j)}} \supset \overline{U^{(j)}}^0$ ist die gesuchte Quasiultratonne.

b) H ist abgeschlossen in $E[T^{ub}]$. Dann bestehen wiederum zwei Möglichkeiten: α) Es gibt ein j_0, so daß für alle $j \geq j_0$ $\overline{U^{(j)}} = U^{(j)}$ ist. Sei $x_0 \in E \sim H$. Dann bilden die Mengen $V^{(j)} = U^{(j_0+j)} + (1/2^j) \cdot K(x_0)$, wobei $K(x_0)$ die kreisförmige Hülle der Menge $\{x_0\}$ bezeichnet, ein Ultrabornolog in $E[T]$. Jedes $V^{(j)}$ ist schon abgeschlossen in $E[T]$, d. h. $(V^{(j)})$ ist sogar eine Quasiultratonne mit $V^{(j)} \cap H \subset U^{(j)}$.

β) Für alle j gilt $\overline{U^{(j)}} \neq U^{(j)}$. Dann ist jedes $\overline{U^{(j)}}$ in E absorbierend. Sei $x_0 \in E \sim H$. Es gibt eine monoton fallende Folge (λ_j) positiver reeller Zahlen, so daß $\lambda_j x_0 \in \overline{U^{(j)}}$ für alle j. Dann bilden die Mengen $W^{(j)} = U^{(j)} + (\lambda_j/2^j) K(x_0)$ ein Ultrabornolog in $E[T]$. Da stets $W^{(j)} \subset \overline{U^{(j-1)}}$, ergeben die Mengen $V^{(j)} = \overline{U^{(j)}}$ die gesuchte Quasiultratonne in $E[T]$ q. e. d.

Aus (1) ergibt sich unmittelbar

(2) *Ein Teilraum endlicher Codimension eines quasiultratonnelierten Raumes ist wieder quasiultratonneliert.*

Um für die von Ernst [8] eingeführten (UDF)-Räume einen entsprechenden Satz beweisen zu können, benötigen wir noch einen Hilfssatz.

(3) *Sei $E[T]$ ein HTVR, sei v ein lineares Funktional auf E, $N(v)$ der Nullraüm von v, und für jede kreisförmige beschränkte Menge B in $E[T]$ sei $N(v) \cap B$ in B abgeschlossen. Dann ist v auf jeder kreisförmigen beschränkten Menge in o stetig.*

Beweis. Sei B eine abgeschlossene kreisförmige beschränkte Menge in $E[T]$. Ist $v(B) = \{0\}$, so ist nichts mehr zu beweisen. Sei also $v(B) \neq \{0\}$. Dann gibt es für $\varepsilon > 0$ ein $x_0 \in B$ mit $v(x_0) = \lambda_0 \leq \varepsilon$ und $\lambda_0 > 0$, d. h. $x_0 \notin N(v)$. Wegen der Abgeschlossenheit von

$N(v) \cap \overline{(B+B)}$ gibt es eine kreisförmige Nullumgebung U mit $(x_0 + U) \cap \overline{(B+B)} \cap N(v) = \phi$. Dann gilt $|v(x)| < \lambda_0 \leq \varepsilon$ für alle $x \in U \cap B$: Angenommen es gibt ein $y \in U \cap B$, so daß $|v(y)| \geq \lambda_0$. Dann gibt es ein $y_0 \in U \cap B$ mit $v(y_0) = -\lambda_0$, d. h. $x_0 + y_0 \in N(v) \cap \cap (B+B) \cap (x_0 + U) \neq \phi$, womit schon der Widerspruch erreicht ist. q. e. d.

Mit diesem Hilfssatz läßt sich leicht zeigen

(4) *Ist $E[T]$ ein (UDF)-Raum und ist $H \subset E$ ein Teilraum endlicher Codimension, so ist H mit der von T induzierten Topologie $\widehat{T}$ wieder ein (UDF)-Raum.*

Beweis. Wir haben zwei Fälle zu unterscheiden:

a) H ist abgeschlossen. Dann ist H isomorph zu einem Quotientenraum von $E[T]$ nach einem abgeschlossenen Teilraum und damit wieder ein (UDF)-Raum.

b) H ist dicht. Es genügt, den Beweis für codim $(H) = 1$ zu führen. Ist (B_n) eine Fundamentalfolge kreisförmiger abgeschlossener beschränkter Mengen in $E[T]$, so bilden die Mengen $H \cap B_n$ eine solche Folge in $H[\widehat{T}]$.

Sei $(U_n^{(j)})_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von topologischen Fäden mit abgeschlossenen $U_n^{(j)}$ in $H[\widehat{T}]$ und jedes $U^{(j)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n^{(j)}$ absorbiere alle beschränkten Mengen in $H[\widehat{T}]$. Wir müssen zeigen, daß dann auch $(U^{(j)})$ ein topologischer Faden in $H[\widehat{T}]$ ist. Da H nicht abgeschlossen ist, gibt es wegen (3) ein $n \in \mathbf{N}$ und ein x_0 mit $x_0 \notin H \cap B_n$ aber $x_0 \in \overline{H \cap B_n}$ und $x_0 \in E \sim H$. Weiter gibt es positive reelle Zahlen λ_j mit $\lambda_j (H \cap B_n) \subset U^{(j)}$. Dann ist auch $\lambda_j \overline{(H \cap B_n)} \subset \overline{U^{(j)}}$, d. h. $\overline{U^{(j)}}$ ist absorbierend in E. Wie im Beweis von (1), Fall b) folgt auch hier, daß jedes $\overline{U^{(j)}}$ alle beschränkten Mengen in $E[T]$ absorbiert, und daß $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_n^j}$ wegen $\overline{U^{(j)}} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_n^{(j)}}$ dann eine Nullumgebung in $E[T]$ ist. Wegen $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_n^{(j)}}\right) \cap H = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\overline{U_n^{(j)}} \cap H\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n^{(j)} = U^{(j)}$ ist dann auch $(U^{(j)})$ ein topologischer Faden in $H[\widehat{T}]$. q. e. d.

4. Anwendung von 1. auf die Bildräume schwach singulärer Abbildungen

In Adasch [4] werden die s-Räume eingeführt. Es gilt für diese der folgende Satz über offene Abbildungen:

(1) *Ein HTVR $E[T]$ ist genau dann ein s-Raum, wenn jede abgeschlossene linearse Abbildung A von $E[T]$ auf einen ultratonnelierten Raum $F[T']$ offen ist.*

Da man leicht offene Abbildungen von (B) — Räumen auf ebensolche finden kann, die keinen abgeschlossenen Graphen haben (jede unstetige Projektion auf einen abgeschlossenen Teilraum eines (B) — Raumes ist eine solche Abbildung), erhebt sich zunächst die Frage, wie man in dem offenen Abbildungssatz (1) die Voraussetzungen über A scharf machen kann.

G. Köthe [13] gibt hier einen auch für nicht notwendig lokalkonvexe Räume gangbaren Weg an.

Wir werden nur die Ergebnisse zitieren. Die Beweise erhält man leicht aus den von Köthe angegebenen Beweisen für lokalkonvexe Räume.

Sei A eine lineare Abbildung von $E[T]$ in $F[T']$. $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$ seien alle Nullumgebungen von $E[T]$ bzw. $F[T']$. Dann nennt man $K(A) = \bigcap_{V \in \mathcal{U}} \overline{A^{-1}(V)}$ bzw. $S(A) = \bigcap_{U \in \mathcal{V}} \overline{A(U)}$ den «*Kern von A*» bzw. die «*Singularität von A*». Die Abbildung $K \circ A$, das Produkt von A mit der Quotientenabbildung K von $F[T']$ auf $F/S(A)[\widehat{T'}]$, heißt «*reguläre Kontraktion von A*». $K \circ A$ hat stets einen abgeschlossenen Graphen. A heißt «*schwach singulär*», wenn die Abschließung $\overline{N(A)}$ des Nullraumes $N(A)$ von A mit $K(A)$ zusammenfällt. Insbesondere sind abgeschlossene Abbildungen schwach singulär. Es gilt (vgl. [14] 9.(1) und 9.(2)).

(2) *A ist genau dann offen, wenn A schwach singulär und die reguläre Kontraktion $K \circ A$* offen ist.

Man erhält damit

(3) *Sei $E[T]$ ein s-Raum, $F[T']$ ein ultratonnelierter Raum. Dann ist jede schwach singuläre Abbildung A von $E[T]$ auf $F[T']$ offen.*

Zum Beweis betrachte man das Diagramm:

$$(4)\quad K\circ A:\quad \begin{tikzcd} E[T] \arrow[rr, "A"] \arrow[dr] & & F[T'] \arrow[rr, "K"] & & F/S(A)[\hat{T}'] \\ & E/K(A)[\hat{T}] \arrow[urrr, "\widehat{K\circ A}"'] \arrow[d, phantom, "\parallel"] & & & \\ & E/N(A)[\hat{T}] & & & \end{tikzcd}$$

verwende (1) und (2) und beachte, daß Quotientenräume von s-Räumen s-Räume und von ultratonnelierten Räumen ultratonneliert sind sowie $N(K\circ A)=K(A)$. q. e. d.

Wir beweisen nun

(5) *Sei $E[T]$ ein s-Raum, $F[T']$ ein ultratonnelierter Raum. Jede schwach singuläre lineare Abbildung A von $E[T]$ in $F[T']$ deren Bildraum $R(A)$ in $F[T']$ endliche Codimension hat ist offen und die regulär Kontraktion K o A hat einen abgeschlossenen Bildraum.*

$R(A)$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $R(A)\supset S(A)$.

Beweis. Da $R(A)$ ultratonneliert ist, folgt aus (3) sofort, daß A offen ist.

Betrachten wir wieder das Diagramm (4) (jetzt jedoch ohne die Voraussetzung, daß A auf $F[T']$ abbildet). $\widehat{K\circ A}^{-1}$ ist eine stetige lineare Abbildung von $R(K\circ A)[\hat{\hat{T}}']$ auf $E/K(A)[\hat{T}]$. Da auch $R(K\circ A)$ in $F/S(A)[\hat{T}']$ endliche Codimension hat also in der durch $\hat{T}'$ induzierten Topologie $\hat{\hat{T}}'$ ultratonneliert ist, bleibt $\widehat{K\circ A}^{-1}$ stetig als Abbildung von $R(K\circ A)[\hat{\hat{T}}']$ auf $E/K(A)[\hat{T}^{ut}]$. Nach [5], 2.(6) ist jedoch $E/K(A)[\hat{T}^{ut}]$ vollständig. $\widehat{K\circ A}^{-1}$ ist also eine abgeschlossene lineare Abbildung aus $F/S(A)[\hat{T}']$ in den vollständigen Raum $E/K(A)[\hat{T}^{ut}]$ mit dem Definitionsbereich $D(\widehat{K\circ A}^{-1})=R(K\circ A)$. Man überlegt sich nun leicht, daß ihr Definitionsbereich $R(K\circ A)$ abgeschlossen ist (vgl. Köthe [13]).

Gilt außerdem $R(A)\supset S(A)$, so ist wegen $K^{-1}(R(K\circ A))=R(A)$ auch $R(A)$ in $F[T']$ abgeschlossen. q. e. d.

Bemerkung: Wenn man wüßte ob beliebige Teilräume mit abzählbarer Codimension eines ultratonnelierten Raumes wieder ultratonneliert sind, dann würde (5) auch für Abbildungen gelten, deren

Bildräume abzählbare Codimension haben (mit demselben Beweis). Da dies jedoch für tonnelierte (lokalkonvexe) Räume stimmt (vgl. [16] und [20]), erhalten wir

(6) *Sei* $E[T]$ *ein lokalkonvexer s-Raum,* $F[T']$ *ein tonnelierter Raum. Jede schwach singuläre lineare Abbildung* A *von* $E[T]$ *in* $F[T']$, *deren Bildraum* $R(A)$ *abzählbare Codimension hat ist offen und die reguläre Kontraktion* $K \circ A$ *hat einen abgeschlossenen Bildraum.*

$R(A)$ *ist genau dann abgeschlossen, wenn* $R(A) \supset S(A)$.

Für die lokalkonvexen s-Räume siehe [2] und [5]. Der Beweis von (6) ist dann nur eine Modifizierung des Beweises von (5).

Da in der Theorie der lokalkonvexen Räume besonders häufig Abbildungen betrachtet werden, deren Definitionsbereich nicht der ganze Raum ist, wollen wir noch andeuten, daß (6) auch für solche Abbildungen richtig ist, sofern man von A noch die Maximalität (vgl. [14]) verlangt.

Man erhält dann eine starke Verallgemeinerung des Hauptergebnisses von G. Köthe [13], die für speziellere Räume schon in [1] enthalten ist.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] N. ADASCH, *Über zwei Sätze von Banach.* Diss., Frankfurt (Main), 1969

[2] N. ADASCH, *Tonnelierte Räume und zwei Sätze von Banach.* Math. Ann. 186, 209-214 (1970)

[3] N. ADASCH, *Topologische Produkte gewisser topologischer Vektorräume.* Math. Ann. 189, 280-284 (1970)

[4] N. ADASCH, *Der Graphensatz in topologischen Vektorräumen.* Math. Z. 119, 131 142 (1971)

[5] N. ADASCH, *Vollständigkeit und der Graphensatz.* J. reine angew. Math. 249, 217-220 (1971)

[6] N. ADASCH, *Lokalkonvexe Räume mit einer Fundamentalfolge beschränkter Teilmengen.* erscheint in Math. Ann.

[7] J. DIEUDONNÉ, *Sur les propriétés de permanence de certains espaces vectoriels topologiques.* Ann. Soc. Polon. Math. 25, 50-55 (1952)

[8] B. ERNST, *Ultra-(DF)-Räume.* erscheint in J. reine angew. Math.

[9] S. O. IYAHEN, *On certain classes of linear topological spaces.* Proc. London Math. Soc. (3) 18, 285-307 (1968)

[10] J. KÖHN, *Induktive Limiten nicht lokal-konvexer topologischer Vektorräume.* Math. Ann. 181, 269-278 (1969)

[11] Y. KOMURA, *On linear topological spaces.* Kumamoto J. of Science 5 (3), 148-157 (1962)

[12] G. KÖTHE, *Topologische lineare Räume.* I. 2. Afl. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1966

[13] G. KÖTHE, *Die Bildräume abgeschlossener Operatoren.* J. reine angew. Math. 232, 110-111 (1968)

[14] G. KÖTHE, *General Linear Transformations of Locally Convex Spaces.* Math. Ann. 159, 309-328 (1965)

[15] W. ROBERTSON, *Completions of topological vector spaces.* Proc. London Math. Soc. (3) 8, 242-257 (1958)

[16] S. SAXON, *M. Levin, Every countable-codimensional subspace of a barreled space is barreled.* Proc. Amer. Math. Soc. 29, 91-96 (1971)

[17] S. TOMÂŠEK, *M-barreled spaces.* Comment. Math. Univ. Carolinae 11, 185-204 (1970)

[18] S. TOMÂŠEK, *M-bornological spaces.* Comment. Math. Univ. Carolinae 11, 235-248 [1970]

[19] M. VALDIVIA, *On (DF)-spaces.* Math. Ann. 191, 38-43 (1971)

[20] M. VALDIVIA, *Absolutely convex sets in barreled spaces.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble 21, 3-13 (1971)

[21] M. VALDIVIA, *A hereditary property in locally convex spaces.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble 21, 1-2 (1971)

[22] L. WAELBROECK, *Topological Vector Spaces and Algebras.* Lecture Notes in Mathematics, Springer Berlin-Heidelberg-New York 1971