CARACTERIZACION DE APROXIMACIONES OPTIMAS EN ESPACIOS PRODUCTO

por

CARLOS BENÍTEZ

Departamento de Análisis Matemático
Universidad de Santiago de Compostela

El hecho de que en un espacio normado N, un elemento g_0 de un subespacio vectorial L de N, sea aproximación óptima, relativa a L, de otro elemento $f \in N$, $g_0 \in P_L(f)$ (*i. e.* $g_0 \in L$, $\|f - g_0\| \leq \leq \|f - g\|$, $\forall g \in L$) viene caracterizado por la existencia de un funcional lineal, acotado, $\varphi \in N^*$, con las propiedades que se enuncian en el siguiente teorema

TEOREMA 1 [ver. p. ej. [6] pág. 18]. Sea N un espacio normado, L un subespacio vectorial de N, $f \in N \setminus \bar{L}$ y $g_0 \in L$. Condición necesaria y suficiente para que g_0 sea aproximación óptima de f, relativa a L, es que exista un funcional lineal, acotado, $\varphi \in N^*$, que verifique

i) $\|\varphi\| = 1$

ii) $\varphi(g) = 0, \quad \forall g \in L$

iii) $\varphi(f) = \varphi(f - g_0) = \|f - g_0\| = \inf \{\|f - g\| : g \in L\} = e_L(f)$

(es la segunda igualdad de iii, la que propiamente constituye dicho apartado del teorema, pues las restantes son, respectivamente: consecuencia de ii, consecuencia de la definición de aproximación óptima, y definición de una notación).

Este teorema, publicado por I. SINGER [5] en 1956, y ya clásico en teoría de la aproximación, no pasa de ser una sencilla interpretación del teorema de HAHN-BANACH.

Por otra parte, si N y N' son espacios normados sobre el mismo cuerpo $\mathbf{K}$ ($\mathbf{R}$ ó $\mathbf{C}$) y si en el espacio producto $N \times N'$ se considera una norma que verifique la propiedad de «monotonía»

$$M) \quad \|f\| \leq \|f'\|', \quad \|g\| \leq \|g'\|' \Rightarrow \|(f, f')\|_* \leq \|(g, g')\|_*$$

entonces, evidentemente, se da la implicación

$$g_0 \in P_L(f), \; g'_0 \in P_{L'}(f') \Rightarrow (g_0, g'_0) \in P_{L \times L'}(f, f')$$

cualesquiera que sean los subespacios L y L', y los elementos f y f', de N y N', respectivamente.

El objeto del presente trabajo es la obtención de un funcional $\phi \in (N \times N')^*$, que caracterice el hecho de que (g_0, g'_0) es aproximación óptima de (f, f'), relativa a $L \times L'$, a partir de sendos funcionales $\varphi \in N^*$ y $\varphi' \in N'^*$, que caracterizan el que g_0 y g'_0 son aproximaciones óptimas de f y f', relativas a L y L', respectivamente. Suponiendo que se ha tomado en $N \times N'$ una M-norma.

Se parte para ello del isomorfismo algebraico entre los espacios $N^* \times N'^*$ y $(N \times N')^*$, que expresa la igualdad

$$(\varphi, \varphi')(f, f') = \varphi(f) + \varphi'(f')$$

y de los siguientes lemas, el segundo de los cuales se enuncia teniendo en cuenta que, a partir de ahora, se consideran identificados algebraicamente los espacios $N^* \times N'^*$ y $(N \times N')^*$.

LEMA 1. — Condición necesaria y suficiente para que una norma $\| \; \|_*$ en $N \times N'$, sea del tipo M es que se verifique la implicación

$$\|f\| = \|g\|, \; \|f'\|' = \|g'\|' \Rightarrow \|(f, f')\|_* = \|(g, g')\|^*$$

DEMOSTRACION. La necesidad es evidente.

Suficiencia. Sean $\|f\| \leq \|g\|$, $\|f'\|' \leq \|g'\|'$. Si ambos signos son de igualdad no hay nada que probar. Supongamos, por ejemplo, que $\|f\| < \|g\|$ y sea $t = \|f\| \cdot \|g\|^{-1} \in [0, 1)$, entonces

$$\|(f, f')\|_* = \|(tg, f')\|_* \leq \frac{1+t}{2} \|(g, f')\|_* + \\ + \left[1 - \frac{1+t}{2}\right] \|(-g, f')\|_* = \|(g, f')\|_*$$

en forma análoga se prueba ahora que lo anterior es menor o igual que $\|(g, g')\|_*$

COROLARIO 1. — La M-norma de un elemento de $N \times N'$ depende sólo de las normas en N y N' de sus componentes.

LEMA 2. — Si en $N \times N'$ está definida una M-norma $\|\ \|_*$, condición necesaria y suficiente para que el funcional lineal $\phi = (\varphi, \varphi') \in \in (N \times N')^*$ sea acotado, es que lo sean $\varphi \in N^*$ y $\varphi' \in N'^*$, y se verifica

$$\|\phi\|_* = \sup \{\|\varphi\| \, \|f\| + \|\varphi'\|' \, \|f'\|' : \|(f, f')\|_* = 1\}$$

DEMOSTRACION: Suficiencia. Cuando φ y φ' son acotados, también lo es ϕ, pues el número real del segundo miembro de la igualdad del enunciado es, evidentemente, una cota superior del conjunto de números reales

$$\{|\varphi(f) + \varphi'(f')| : \|(f, f')\|_* = 1\}$$

cuyo supremo es, por definición, la norma de ϕ.

Necesidad. La acotación de φ y φ', supuesta la de ϕ, se encuentra implícita en la demostración de la igualdad del enunciado, a la que se procede en dos etapas.

i) Se prueba que

$$\sup \{|\varphi(f) + \varphi'(f')| : \|(f, f')\|_* = 1\} =$$
$$= \sup \{|\varphi(f)| + |\varphi'(f')| : \|(f, f')\|_* = 1\}$$

Por ser $\|\ \|_*$ una M-norma, si se toma

$$k = sgn \ \overline{\varphi'(f')} \cdot \varphi(f) = \frac{\varphi'(f')}{|\varphi'(f')|} \frac{\overline{\varphi(f)}}{|\varphi(f)|}$$

(cuando $\varphi(f)$, o $\varphi'(f')$, son cero no hay nada que probar) se obtiene

$$\|(f, f')\|_* = \|(kf, f')\|_*$$
$$|\varphi(f) + \varphi'(f')| \leq |\varphi(f)| + |\varphi'(f')| = |\varphi(kf)| +$$
$$+ |\varphi'(f)| = |\varphi(kf) + \varphi'(f')|$$

cualesquiera que sean f y f', de donde se concluye, trivialmente, la igualdad citada.

ii) Ya que $|| \, ||_*$ es M-norma y, por tanto, su valor en un punto (f, f') sólo depende de las normas de sus componentes, se obtiene, tomando $r \geq 0$, $r' \geq 0$, tales que

$$||f|| = r, \; ||f'||' = r' \Rightarrow ||(f, f')||_* = 1$$

el siguiente resultado

$$\begin{aligned} &\sup \{|\varphi(f)| + |\varphi'(f')| : ||(f, f')||_* = 1\} \geq \\ &\geq \sup \{|\varphi(f)| + |\varphi'(f')| : ||f|| = r, \; ||f'||' = r'\} = \\ &= \sup \{|\varphi(f)| : ||f|| = r\} + \\ &+ \sup \{|\varphi'(f')| : ||f'||' = r'\} = ||\varphi|| \, r + ||\varphi'||' \, r' \end{aligned}$$

cualesquiera que sean r y r' en las condiciones enunciadas. En consecuencia

$$\begin{aligned} &\sup \{|\varphi(f)| + |\varphi'(f')| : ||(f, f')||_* = 1\} \geq \\ &\geq \sup \{||\varphi|| \, ||f|| + ||\varphi'||' \, ||f'||' : ||(f, f')||_* = 1\} \end{aligned}$$

lo que prueba la acotación de φ y φ', con lo que también es cierta la desigualdad inversa y ambas dan la igualdad buscada.

Corolario 2. — La norma del funcional lineal acotado $\phi = (\varphi, \varphi') \in (N \times N')^*$, es el *máximo* de la función real de dos variables reales

$$(x, y) \in \mathbf{R}^2 \longrightarrow ||\varphi|| \, x + ||\varphi'||' \, y$$

con la condición

$$||(x, y)||_{a*} = 1, \qquad x \geq 0, \; y \geq 0$$

Donde es, por definición, $||(x, y)||_{a*} = ||(xe, ye')||_*$, siendo $(e, e') \in N \times N'$ arbitrario, tal que

$$||e|| = ||e'||' = 1$$

El lema anterior es, realmente, una consecuencia de la equivalencia de todas la M-normas — cuya demostración es inmediata — salvo en la fórmula que da la norma del funcional $\phi = (\varphi, \varphi') \in (N \times N')^*$. Es precisamente porque nos interesa dicha fórmula, por lo que se enunció y demostró tal como está.

Supuesto lo anterior, sea $\|\ \|_*$ una M-norma en $N \times N'$ y sean $\varphi \in N^*$ y $\varphi' \in N'^*$, funcionales que caracterizan, en el sentido del Teorema 1, los hechos $g_0 \in P_L(f)$, $g'_0 \in P_{L'}(f')$. Se verifica entonces

TEOREMA 2. — Existen dos números reales no negativos, a, b, tales que el funcional

$$\phi = (a\varphi,\ b\varphi') \in (N \times N')^*$$

caracteriza, en el sentido del Teorema 1, el hecho

$$(g_0,\ g'_0) \in P_{L \times L'}\ (f,\ f')$$

DEMOSTRACION: Tales números han de someterse a las siguientes restricciones, inducidas por las que se exigen de ϕ y se suponen de φ y φ'

i) $$\|\phi\|_* = \text{máx}\ \{a\,\|\varphi\|\,\|h\| + b\,\|\varphi'\|'\,\|h'\|' : \|(h,\ h')\|_* = 1\} = \text{máx}\ \{a\,\|h\| + b\,\|h'\|' : \|(h,\ h')\|_* = 1\} = 1$$

ii) $$\phi\,(g,\ g') = a\varphi\,(g) + b\varphi'\,(g') = 0, \qquad \forall\,(g,\ g') \in L \times L'$$

iii) $$\phi\,(f - g_0,\ f' - g'_0) = a\varphi\,(f - g_0) + b\varphi'\,(f' - g'_0) = a\,\|f - g_0\| + b\,\|f' - g'_0\|' = \|(f - g_0,\ f' - g'_0)\|_*$$

Por consiguiente, los números buscados deben satisfacer la ecuación de i) y la algebraica lineal de iii). En cuanto a ii), nada dice sobre los números a y b, pues se verifica, cualesquiera que éstos sean.

Escribiendo la ecuación iii) en la forma

$$a\,\frac{\|f - g_0\|}{\|(f - g_0,\ f' - g'_0)\|_*} + b\,\frac{\|f' - g'_0\|'}{\|(f - g_0,\ f' - g'_0)\|_*} = 1$$

como el punto

$$(x,\ y) = \left(\frac{\|f - g_0\|}{\|(f - g_0,\ f' - g'_0)\|_*},\ \frac{\|f' - g'_0\|'}{\|(f - g_0,\ f' - g'_0)\|_*}\right)$$

posee norma $\|\ \|_{a*}$ igual a 1, ambas ecuaciones equivalen a la determinación de un funcional lineal, de matriz asociada $(a,\ b)$, en el espacio $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, dotado de la norma $\| \|_{a*}$, y cuya norma, igual a 1, se alcance en (x, y).

Dicho funcional es una extensión, según el teorema de HAHN-BANACH, del que se define en el subespacio de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ engendrado por (x, y), de la siguiente forma

$$\psi_1 : t\,(x,\ y) \in \ < (x,\ y) > \longrightarrow t \, \| (x,\ y) \|_{a*}$$

Además, a y b han de ser no negativos, pues si, por ejemplo, fuese $a < 0$, $b \geq 0$, se tendría: $a\,(-x) + by > ax + by$, contra la hipótesis, pues $\| (-x,\ y) \|_{a*} = \| (x,\ y) \|_{a*} = 1$.

Es evidente que si la M-norma es tal que

$$\| (f,\ \theta') \|_{*} = k \, \| f \|, \quad \| (\theta,\ f') \|_{*} = k' \, \| f' \|',$$

entonces

$$a \, \| f - g_0 \| + b \, \| f' - g'_0 \| \leq k \, \| f - g_0 \| + k' \, \| f' - g'_0 \|'$$

Se describe, a modo de ejemplo, la obtención de la norma de $\phi = (\varphi,\ \varphi')$, en función de las normas de φ y φ', cuando en el espacio se considera la familia de M-normas más interesantes y sencillas

$$\| (f,\ f') \|_p = [\, \| f \|^p + \| f' \|'^p]^{1/p}, \qquad (p \geq 1)$$
$$\| (f,\ f') \|_\infty = \text{máx} \, \{ \| f \|,\ \| f' \|' \}.$$

Como se dijo en el Corolario 2, la norma de ϕ, $\| \phi \|_p$. es el máximo de la función

$$(x,\ y) \in \mathbf{R}^2 \longrightarrow \| \varphi \| \, x + \| \varphi' \|' \, y \in \mathbf{R}$$

con la condición $\| (x,\ y) \|_{ap} = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Puede aplicarse, en el caso $1 < p < +\infty$, el método de los multiplicadores de Lagrange para la obtención de dicho máximo, que será, entonces, solución del sistema de ecuaciones

$$x^p + y^p = 1, \ x \geq 0, \qquad y \geq 0$$
$$\| \varphi \| + t p x^{p-1} = 0$$
$$\| \varphi' \|' + t p y^{p-1} = 0$$

es decir

$$x = \frac{||\varphi||}{[||\varphi||^p + ||\varphi'||'^p]^{1/p}}, \quad y = \frac{||\varphi'||'}{[||\varphi||^p + ||\varphi'||'^p]^{1/p}}$$

luego

$$||\phi||_p = \frac{||\varphi||^2 + ||\varphi'||'^2}{[||\varphi||^p + ||\varphi'||'^p]^{1/p}}$$

Para los casos $p = 1$, e ∞, se puede proceder fácilmente en forma directa

$$||\phi||_1 = \text{máx}\ \{||\varphi||\ ||h|| + ||\varphi'||'\ ||h'||' : ||h|| + \\ + ||h'||' = 1\} = \text{máx}\ \{||\varphi||, ||\varphi'||'\}$$

$$||\phi||_\infty = \text{máx}\ \{||\varphi||\ ||h|| + \\ + ||\varphi'||'\ ||h'||' : \text{máx}\ \{||h||, ||h'||'\} = 1\} = ||\varphi|| + ||\varphi'||'$$

Consecuencia inmediata de las desigualdades

$$\text{máx}\ \{||f||, ||f'||'\} = ||(f, f')||_\infty \leq ||(f, f')||_q \leq \\ \leq ||(f, f')||_p \leq ||(f, f')||_1 = ||f|| + ||f'||'$$

cuando $1 < p < q < +\infty$, son las

$$\text{máx}\ \{||\varphi||, ||\varphi'||'\} = ||(\varphi, \varphi')||_1 \leq ||(\varphi, \varphi')||_p \leq \\ \leq ||(\varphi, \varphi')||_q \leq ||(\varphi, \varphi')||_\infty = ||\varphi|| + ||\varphi'||'$$

Respecto a las soluciones a y b del problema planteado en el teorema anterior, resulta, para $1 < p < +\infty$, que son soluciones del sistema

$$a\,||f - g_0|| + b\,||f' - g'_0||' = [||f - g_0||^p + ||f' - g_0'||'^p]^{1/p}$$
$$a^2 + b^2 = [a^p + b^p]^{1/p}$$

Para $p = 2$, por ejemplo, se obtiene

$$a = \frac{||f - g_0||}{[||f-g_0||^2 + ||f' - g'_0||'^2]^{1/2}}, \quad b = \frac{||f' - g'_0||}{[||f-g_0||^2 + ||f' - g'_0||'^2]^{1/2}}$$

Cuando es $p = 1$, se tiene el sistema de ecuaciones

$$a\,||f - g_0|| + b\,||f' - g'_0||' = ||f - g_0|| + ||f' - g'_0||'$$
$$\text{máx}\ \{a, b\} = 1$$

con soluciones

$$a = b = 1, \quad \text{si} \quad \|f - g_0\| \neq 0, \quad \|f' - g'_0\|' \neq 0$$
$$a = 1, \quad b \in [0, 1], \quad \text{si} \quad \|f' - g'_0\|' = 0$$
$$a \in [0, 1], \quad b = 1, \quad \text{si} \quad \|f - g_0\| = 0$$

Y finalmente, para la norma $\| \|_\infty$, las ecuaciones son

$$a \|f - g_0\| + b \|f' - g'_0\|' = \text{máx} \{\|f - g_0\|, \|f' - g'_0\|'\}$$
$$a + b = 1$$

y las soluciones

$$a = 1, \ b = 0, \quad \text{si} \quad \|f - g_0\| > \|f' - g'_0\|'$$
$$a = 0, \ b = 1, \quad \text{si} \quad \|f - g_0\| < \|f' - g'_0\|'$$
$$a \in [0, 1], \ b = 1 - a, \quad \text{si} \quad \|f - g_0\| = \|f' - g'_0\|'$$

BIBLIOGRAFÍA

1. T. M. APOSTOL, *Análisis Matemático*, Ed., Reverté, Barcelona (1960).
2. R. C. BUCK, *Applications of duality in approximation theory*, Edit. por H. L. Garabedian, Elsevier Pub. Co. (1965).
3. G. CHOQUET, *Topología*, Toray-Masson, Barcelona (1971).
4. J. HORVÁTH, *Topological Vector Spaces and Distributions*. Vol. 1, Addison-Vesley (1966).
5. I. SINGER, *Caracterization des élements de meilleure approximation dans un espace de Banach quelconque*, Acta. Sci. Math. 17, 181-189 (1956).
6. I. SINGER, *Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1970.