UN TEOREMA DE INMERSION EN ESPACIOS TONELADOS QUE NO SON BORNOLOGICOS (*)

por

MANUEL VALDIVIA

N. BOURBAKI y J. DIEUDONNE se preguntan en [1] y [2], respectivamente, si existe algún espacio tonelado que no es bornológico. L. NACHBIN, [4], y T. SHIROTA, [5], responden a esta cuestión dando un ejemplo de un espacio tonelado que no es bornológico. En [6] hemos demostrado que si E es el producto topológico de una familia no numerable de espacios tonelados no nulos, existe en E una infinidad de subespacios densos, tonelados y no bornológicos.

En este artículo vamos a utilizar en parte el método seguido en [6], y demostraremos un teorema de inmersión en espacios tonelados que no son bornológicos.

Los espacios vectoriales que utilizamos aquí están definidos sobre el cuerpo K de los números reales o de los números complejos. Si $< E, F >$ es un par dual de espacios vectoriales representamos, como es habitual, por $\sigma(E, F)$ la topología en E de la convergencia uniforme sobre cada conjunto finito de F. Si E es un espacio vectorial topológico escribimos E' para su dual topológico. Para la dimensión algebraica de E ponemos dim E. Si A es un conjunto, card A significa el número cardinal de A y $\mathcal{P}_n(A)$ es el conjunto de todas las partes numerables, finitas o infinitas, de A. El número cardinal del conjunto de los números enteros lo representamos por ω.

TEOREMA 1. *Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita. Si E es separable, entonces $E[\sigma(E, E')]$ es un subespacio denso de un espacio tonelado F, de manera que F no es bornológico.*

Demostración: Si B es la bola unidad cerrada en E, y B^0 es el conjunto polar de B en E', entonces, para cada entero positivo n,

(*) Subvencionado en parte por el «Patronato para el Fomento de la Investigación en la Universidad».

nB^0 es metrizable para la topología inducida por $\sigma(E', E)$ y, por lo tanto, podemos hallar en nB^0 un conjunto numerable A_n $\sigma(E', E)$-denso en nB^0. Sea S la familia de todas las sucesiones de $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ que convergen en $E'[\sigma(E', E)]$. Sea f una aplicación de E' en S tal que si $x \in E'$, $f(x)$ $\sigma(E', E)$-converge a x. Si $x, y \in E'$, $x \neq y$, es inmediato que el conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ es distinto de $\{y_1, y_2, \ldots, y_n \ldots\}$ siendo $f(x) = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f(y) = \{y\}_{n=1}^{\infty}$ y, por lo tanto, card $E' \leq$ card $\mathcal{P}_n(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 2^{\omega}$. Por otra parte, E', con la bola unidad cerrada B^0, es un espacio de Banach de dimensión infinita, y puesto que todo espacio de Banach separable de dimensión infinita tiene dimensión igual a 2^{ω}, [3], entonces $\dim E' = 2^{\omega}$. Si M es el dual algebraico de E', con la topología $\sigma(M, E')$, M es igual a K^I, card $I = 2^{\omega}$. Sea L el subespacio de M formado por todas las funciones que son nulas en todos los puntos de I salvo, a lo sumo, en una infinidad numerable, veamos, ahora que L es un espacio tonelado. Puesto que L es sucesionalmente completo basta ver que dicho espacio es casi-tonelado. En L sea U un conjunto absolutamente convexo cerrado y bornívoro y sea $\overline{U}$ su clausura en M. Puesto que M es tonelado es suficiente probar que $\overline{U}$ es absorbente en M. Sea x un vector en M. Sea $\{x_j : j \in J, \leq\}$ una red en L tal que J es el conjunto de todas las partes finitas de I, de manera que $\leq$ es la relación de inclusión en J, y $x_j(i) = x(i)$, $i \in j$, $x_j(x_i) = 0$, $i \in I \sim j$. Dicha red converge a x en M. Puesto que el conjunto $\{x_j : j \in J\}$ es acotado en L existe un $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$, tal que $\{\lambda x_j : j \in J\} \in U$ y, por lo tanto, $\lim \{\lambda x_j : j \in J, \leq\} = \lambda x \in \overline{U}$.

Es inmediato que card $L = 2^{\omega}$ y puesto que card $E = 2^{\omega}$, se tiene que la envoltura lineal G de $E \cup L$ tiene 2^{ω} como número cardinal. Si H es el conjunto de elementos de M, que son límites de sucesiones contenidas en G, entonces es obvio que card $H = 2^{\omega}$. Puesto que card $M = 2^{2^{\omega}} > 2^{\omega}$ existe un $x_0 \in M$, que no es límite de ninguna sucesión de G. Sea F la envoltura lineal de $G \cup \{x_0\}$, con la topología $\sigma(F, E')$. Evidentemente $E[\sigma(E, E')]$ es denso en F y vamos a probar que F es tonelado y no es bornológico. El espacio L es tonelado y denso en F, de donde se deduce que F es tonelado. Supongamos que F es bornológico. Si en F $\mathcal{B}$ es la familia de todos los conjuntos acotados, absolutamente convexos y cerrados, entonces F es el límite inductivo de la familia $\{E_B : B \in \mathcal{B}\}$, en donde E_B es el espacio normado envoltura lineal de B, con bola unidad B.

Puesto que G es un hyperplano denso de F existe un conjunto A en B, tal que $G \cap E_A$ es un hyperplano denso en E_A, de aquí que exista un y_0 en E_A, $y_0 \notin G$, y una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $G \cap E_A$, de manera que en E_A $y_0 = \lim_n y_n$. Podemos poner $x_0 = \mu y_0 + z$, $\mu \in K$, $\mu \neq 0$, $z \in G$. La sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $z_n = \mu y_n + z$, $n = 1, 2, \ldots$, está en G y converge en F a x_0, lo cual es una contradicción, de donde se deduce que F no es bornológico.

c. q. d.

El teorema siguiente se refiere a la dimensión algebraica de ciertos espacios de BANACH, (ver también [3]).

TEOREMA 2. *Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita. Si $\{x_i, u_i \colon i \in I\}$ es un sistema biortogonal para E, tal que $\{x_i \colon i \in I\}$ es total en E, entonces $\dim E = \operatorname{card} \mathcal{P}_n(I)$.*

Demostración: Sea S el conjunto de los elementos de E que se obtienen de todas las expresiones sumables en E de la forma $\sum\{a_i x_i \colon i \in I\}$, con a_i racional. S es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números racionales. Si $J \in \mathcal{P}_n(I)$ sea $x(J) = \sum a_i(J) x_i$, $a_i(J) \neq 0$ si $i \in J$, $a_i(J) = 0$ si $i \notin J$. Si $J_1, J_2 \in \mathcal{P}_n(I)$ y $J_1 \neq J_2$ existe un $j_0 \in J_1, j_0 \notin J_2$ y, por lo tanto, se tiene que

$$< u_{j_0}, x(J_1) > = < u_{j_0}, a_{j_0}(J_1)\, x_{j_0} > \neq 0$$

$$< u_{j_0}, x(J_2) > = < u_{j_0}, a_{j_0}(J_2)\, x_{j_0} > = 0$$

de aquí que $x(J_1) \neq x(J_2)$, lo que nos indica que

$$\operatorname{card} S \geq \operatorname{card} \mathcal{P}_n(I), \quad (1).$$

Si H es una base de Hamel de S, entonces cada elemento de S es una combinación lineal racional de un número finito de elementos de H, de donde se deduce que

$$\operatorname{card} H = \operatorname{card} S, \quad (2).$$

Por otra parte si en S $y_j = \sum\{a_{i_j} x_i \colon i \in I\}, j = 1, 2, \ldots, p$ son vectores linealmente independientes, entonces, puesto que a_{i_j} es racional, $i \in I, j = 1, 2, \ldots, p$, podemos hallar $i_1, i_2, \ldots, i_p \in I$, de manera que

$$\begin{vmatrix} a_{i_1} 1 & a_{i_2} 1 & \ldots & a_{i_p} 1 \\ a_{i_1} 2 & a_{i_2} 2 & \ldots & a_{i_p} 2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_1} p & a_{i_2} p & \ldots & a_{i_p} p \end{vmatrix} \neq 0,$$

y, por lo tanto, $y_1, y_2, \ldots, y_p$, son linealmente independientes en E, de aquí que

$$\dim E \geq \dim S, \ (3).$$

En E existe un conjunto A denso, de manera que card $A =$ card I, y como a cada $x \in E$ se le puede asignar una sucesión en A, que converge a x, se deduce que

$$\text{card}\, E \leq \text{card}\, \mathcal{P}_n(I), \ (4).$$

De (1), (2), (3) y (4) se obtiene

$$\text{card}\, \mathcal{P}_n(I) \leq \text{card}\, S = \dim S \leq \dim E \leq \text{card}\, \mathcal{P}_n(I)$$

y de aquí, $\dim E = \text{card}\, \mathcal{P}_n(I)$.

c. q. d.

Nota. Si E es un espacio de Banach separable, de dimensión infinita, existe un sistema biortogonal $\{x_n, u_n\}_{n=1}^{\infty}$ para E, tal que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es total en E y, por lo tanto, $\dim E = \text{card}\, \mathcal{P}_n(N)$, siendo N el conjunto de los números naturales, es decir $\dim E = 2^{\omega}$ que es el teorema de Löwig.

REFERENCIAS

1. N. BOURBAKI: *Sur certains spaces vectoriels topologiques*. Ann. Inst. Fourier, 5-16 (1950).

2. J. DIEUDONNE: *Recent development in the theory of locally convex spaces*. Bull. Amer. Math. Soc. 59, 495-512 (1953).

3. H. LÖWIG: *Über die Dimension linearer Räume*. Studia Math. *5*, 18-23 (1934).

4. L. NACHBIN: *Topological vector spaces of continuous functions*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, *40*, 471-474 (1954).

5. T. SHIROTA: *On locally convex vector spaces of continuous functions*. Proc. Jap. Acad. *30*, 294-298 (1954).

6. M. VALDIVIA: *On nonbornological barrelled spaces*. Ann. Inst. Fourier, *22*, 2, 27-30 (1972).