SOBRE LOS ESPACIOS VECTORIALES TOPOLOGICOS DE DIMENSIONES FINITAS (*)

por

MANUEL VALDIVIA

En este artículo damos una caracterización de aquellos espacios localmente convexos que son subespacios de un producto de rectas. Dicha caracterización la deducimos de un resultado que obtenemos aquí más general que el teorema de F. RIESZ que afirma que un espacio normado que tiene un entorno compacto es de dimensión finita. También damos un teorema válido para ciertos espacios topológicos del cual deducimos un teorema más general que el de F. RIESZ. Los espacios vectoriales que manejamos en este artículo están definidos sobre el cuerpo K de los números reales o de los números complejos. Si $< E, F >$ es un par dual de espacios vectoriales representamos, como es habitual, por $\sigma(E, F)$ la topología sobre E de la convergencia uniforme sobre las partes finitas de F. Si A es un conjunto en el espacio topológico T, denotamos por $\mathring{A}$ el interior de A y por $A \sim \mathring{A}$ el complementario de $\mathring{A}$ con respecto a A. Si la topología del espacio topológico T es $\mathcal{T}$ escribiremos a veces $T[\mathcal{T}]$ en vez de T.

TEOREMA 1. *Sea $< E, F >$ un par dual. Sea $\mathcal{T}$ una topología vectorial en E, tal que existe en $E[\mathcal{T}]$ un entorno cerrado U del origen, que no contiene ningún subespacio real de E de dimensión uno. Si $U \sim \mathring{U}$ es unión de α conjuntos cerrados en $E[\sigma(E, F)]$, entonces existe en F una familia $\{A_i : i \in I\}$ de conjuntos finitos, tal que $\cup \{A_i : i \in I\}$ es total en $F[\sigma(F, E)]$ y el número cardinal de I es α.*

Demostración: Supongamos que $U \sim \mathring{U}$ es igual a $\cup \{B_i : i \in I\}$ siendo B_i cerrado en $E[\sigma(E, F)]$, $i \in I$. Dado $i \in I$, es posible determinar en F un conjunto finito A_i tal que $P_i \cap B_i = \varnothing$, siendo P_i el

(*) Subvencionado en parte por el «Patronato para el Fomento de la Investigación en la Universidad».

conjunto polar de A_i en E. Para cada conjunto M de F representamos por $M^\perp$ el subespacio de E ortogonal a M. Entonces

$$[\cup \{A_i : i \in I\}]^\perp = \cap \{A_i^\perp : i \in I\} \cap \{P_i : i \in I\},$$

de donde se deduce que

$$[\cup \{A_i : i \in I\}]^\perp \cap (U \sim \mathring{U}) = \varnothing.$$

Si $x \in [\cup \{A_i : i \in I\}]^\perp$, $x \neq 0$, sea $G = \{\lambda x : \lambda \text{ real}\}$. Puesto que $G \not\subset U$ existe un λ_0 real, $\lambda_0 \neq 0$, tal que $\lambda_0 x \notin U$. Si $\lambda_0 > 0$ sea $\mu = \{\lambda : \lambda$ real, $\lambda x \in U, \lambda \leq \lambda_0\}$ y si $\lambda_0 < 0$, $\mu = \{\lambda : \lambda$ real, $\lambda x \in U$, $\lambda \geq \lambda_0\}$. Entonces μx es un punto de $U \sim \mathring{U}$, lo cual es una contradicción. c. q. d.

COROLARIO 1.1. *Sea $< E, F >$ un par dual. Sea $\mathcal{T}$ una topología vectorial en E, tal que existe en $E[\mathcal{T}]$ un entorno cerrado U del origen, que no contiene ningún subespacio real de E de dimensión uno. Si $U \sim \mathring{U}$ es cerrado en $E[\sigma(E, F)]$ entonces E es un espacio vectorial de dimensión finita.*

COROLARIO 2.1. *Sea E un espacio normado tal que $||x||$ es la norma de cada $x \in E$. Si el conjunto $\{x : x \in E, ||x|| = 1\}$ es unión de α conjuntos cerrados en $E[\sigma(E,F)]$ entonces existe en el dual topológico E' de E una familia $\{A_i : i \in I\}$ de conjuntos finitos de manera que $\cup \{A_i : i \in I\}$ es total en $E'[\sigma(E', E)]$ y el número cardinal de I es α.*

COROLARIO 3.1. *Sea E un espacio normado. Si $\{x : x \in E, ||x|| = 1\}$ es débilmente cerrado, entonces E es de dimensión finita.*

NOTA 1. Obsérvese que el conocido teorema de F. RIESZ es un caso particular del Corolario 3.1, puesto que si el espacio normado E tiene un entorno compacto, entonces $\{x : x \in E, ||x|| = 1\}$ es compacto y, por lo tanto, débilmente compacto, de aquí que sea débilmente cerrado.

TEOREMA 2. *Sea E un espacio localmente convexo separado. Sea $\{U_i : i \in I\}$ un sistema fundamental de entornos del origen, absolutamente convexos cerrados. El espacio E es un subespacio de K^J para algún conjunto de índices J si, y sólo si, $U_i \sim \mathring{U}_i$ es débilmente cerrado para cada $i \in I$.*

Demostración: Si E es un subespacio de K^J, entonces su topología coincide con la topología débil y, por lo tanto, $U_i \sim \mathring{U}_i$ es débilmente cerrado, para cada $i \in I$. Recíprocamente, supongamos que $U_i \sim \mathring{U}_i$ es débilmente cerrado para cada $i \in I$. Sea $F_i = \{x : x \in E, \lambda x \in U_i, \forall \lambda \in K\}$. Evidentemente F_i es cerrado en E. Si φ_i es la aplicación canónica de E sobre E/F_i, sea E_i el espacio normado sobre E/F_i que tiene como bola unidad $\varphi_i(U_i)$, es inmediato que $\varphi_i(U_i \sim \mathring{U}_i)$ es la esfera unidad en E_i y se verifica que $\varphi_i(U_i \sim \mathring{U}_i)$ es débilmente cerrado en E_i. Aplicando el Corolario 3.1 se tiene que E_i es de dimensión finita. Por otra parte E es un subespacio de $\Pi\{E_i : i \in I\}$ y, por lo tanto, E es un subespacio de K^J para un adecuado conjunto J. c.q.d.

TEOREMA 3. *Sea $E[\mathcal{T}]$ un espacio topológico separado. Sea $\mathcal{T}'$ una topología separada sobre E. En $E[\mathcal{T}]$ sea U un entorno cerrado de un punto dado x_0, tal que $U \sim \mathring{U}$ es cerrado en $E[\mathcal{T}']$. Si en $E[\mathcal{T}']$ x_0 tiene un sistema fundamental de entornos que son conexos en $E[\mathcal{T}]$, entonces U es un entorno de x_0 en $E[\mathcal{T}']$.*

Demostración: Puesto que $U \sim \mathring{U}$ es cerrado para la topología $\mathcal{T}'$, podemos hallar en $E[\mathcal{T}']$ un entorno V de x_0, conexo en $E[\mathcal{T}]$, de manera que $V \cap (U \sim \mathring{U}) = \varnothing$. Si F es el conjunto complementario de U en E se tiene que F es abierto en E para la topología $\mathcal{T}$. Puesto que

$$V = (V \cap U) \cup (V \cap F) = (V \cap \mathring{U}) \cup (V \cap F)$$

y V es conexo en $E[\mathcal{T}]$ se tiene que $V \cap F = \varnothing$ y, por lo tanto, $V \subset U$. c.q.d.

COROLARIO 1.3. *Sean $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ dos topologías separadas sobre un conjunto E, de manera que $\mathcal{T}$ es más fina que $\mathcal{T}'$, Supongamos que cada x de $E[\mathcal{T}]$ tiene un sistema fundamental de entornos cuyas fronteras son cerradas en $E[\mathcal{T}']$. Si cada punto x de $E[\mathcal{T}']$ tiene un sistema fundamental de entornos conexos en $E[\mathcal{T}]$ entonces $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ coinciden.*

COROLARIO 2.3. *Sea $E[\mathcal{T}]$ un espacio localmente compacto. Sea $\mathcal{T}'$ una topología de Hausdorff sobre E, menos fina que $\mathcal{T}$. Si cada punto x de $E[\mathcal{T}']$ tiene un sistema fundamental de entornos conexos en $E[\mathcal{T}]$, entonces $\mathcal{T}$ coincide con $\mathcal{T}'$.*

NOTA 2. El Corolario 2.3 puede considerarse como una forma topológica del teorema de F. RIESZ, puesto que si E es un espacio normado que tiene un entorno compacto, entonces E es localmente compacto y la topología $\sigma(E, E')$ es menos fina que la inicial, siendo los entornos convexos de los puntos de $E[\sigma(E, E')]$, conexos en E y, por lo tanto, la topología de E coincide con $\sigma(E, E')$, de aquí que E sea de dimensión finita.

TEOREMA 4. *Sea $E[\mathcal{T}]$ un espacio vectorial topológico separado. Sea $\mathcal{T}'$ una topología sobre E más fina que $\mathcal{T}$, de manera que $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ coinciden en cada subespacio real de E, de dimensión uno. Si existe en $E[\mathcal{T}']$ un entorno compacto del origen, entonces E es un espacio de dimensión finita.*

Demostración: Si en $E[\mathcal{T}']$ U es un entorno compacto del origen entonces $U \sim \mathring{U}$ es cerrado en $E[\mathcal{T}]$. Puesto que $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ coinciden en cada subespacio real de E de dimensión uno, entonces es fácil de comprobar que en $E[\mathcal{T}]$ existe un sistema fundamental de entornos del origen, que son conexos en $E[\mathcal{T}']$. Aplicando el Teorema 3 resulta que U es un entorno del origen en $E[\mathcal{T}]$. Puesto que U es compacto en $E[\mathcal{T}']$ se tiene que U es compacto en $E[\mathcal{T}]$ y, por lo tanto, aplicando el teorema de F. RIESZ para espacios vectoriales topológicos, [ver G. KOTHE, Topological Vector Spaces I, p. 155, Springer, Berlín-New York, 1969], resulta que E es de dimensión finita. c.q.d.

M. VALDIVIA
Universidad de Valencia