EL TEOREMA DE INCREMENTOS FINITOS PARA FUNCIONES VECTORIALES DE VARIABLE REAL O COMPLEJA

por

PEDRO PI CALLEJA (E.T.S.A.B.)

1. — Mediante el concepto de número derivonormado aplicado a funciones vectoriales de variable real o compleja alcanzamos (1) (bibliografía al final) resultados análogos a los que L. SCHEEFFER (2) obtuvo para las funciones numéricas mediante los números derivados de DINI (3). Este trabajo (1) fue citado por F. SUNYER I BALAGUER (4) al demostrar que el conjunto excepcional A del teorema de SCHEEFFER en lugar de ser numerable, puede ser totalmente imperfecto es decir, si ninguno de sus subconjuntos no vacíos es perfecto y que así se alcanza el conjunto excepcional más general posible, pues si A contiene un subconjunto perfecto, el teorema de SCHEEFFER, según ya demostró éste (2), deja de ser cierto. LEBESGUE ya observó (5) que la misma demostración de SCHEEFFER (2) sirve para el caso de que el conjunto excepcional A no tenga la potencia del continuo, pero el resultado de SUNYER (4) es más general porque según un teorema de BERNSTEIN (6) existen conjuntos totalmente imperfectos con la potencia del continuo, aunque dicha «existencia» se basa en el postulado de ZERMELO (7).

Aquí nos proponemos rehacer nuestro trabajo anterior (1) teniendo en cuenta la observación de SUNYER (4), dando no tan sólo la demostración de éste no consignada en dicha contribución (4), sino también otra original basada en una observación de LEBESQUE (8).

2. — Dada una función vectorial $f(x)$ de variable real x con valores en un espacio normado E sobre el cuerpo real R, si consideramos la norma del cociente incremental de $f(x)$ en x, podemos definir el *número derivonormado*, siempre existente

$$[1] \qquad N_+ f(x) = \liminf_{y \to x^+} \frac{\|f(y) - f(x)\|}{|y - x|} \geq 0,$$

y análogamente $N^+ f(x)$ (con lim sup), $N_- f(x)$, $N^- f(x)$ (a la izquierda). Claro está que $\|f(x)\|$ representa la norma del vector $f(x)$, mientras que $|x|$ representa el valor absoluto del número real x.

Respecto a una función numérica $g(x)$ de variable real, designaremos los números derivados de DINI (3) por

$$[2] \qquad D_+ g(x) = \lim_{y \to x^+} \inf \frac{g(y) - g(x)}{y - x},$$

y análogamente $D^+ g(x)$ (con lim sup), $D_- g(x)$, $D^- g(x)$ (a la izquierda).

Tendremos entonces el siguiente *teorema de incrementos finitos para funciones vectoriales de variable real:*

TEOREMA 1. — *Sea $f(x)$ una función vectorial definida y continua en un intervalo cerrado y acotado $I = [a\,;\, b]$ del cuerpo R de números reales que toma sus valores en un espacio normado E sobre R; sea $g(x)$ una función numérica, continua y creciente en sentido amplio (no decreciente) en I, tal que en el complemento de un conjunto totalmente imperfecto A respecto de $[a\,;\, b)$ se cumpla*

$$[3] \qquad N_+ f(x) \leq D_+ g(x),$$

no siendo ambos miembros de [3] simultáneamente infinitos en dicho complemento. Entonces es

$$[4] \qquad \|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a).$$

Si además, existe al menos un punto de $[a\,;\, b)$ donde sea

$$[5] \qquad N_+ f(x) < D_+ g(x),$$

entonces es

$$[6] \qquad \|f(b) - f(a)\| < g(b) - g(a).$$

En dicho teorema se puede sustituir en [3] o [5] $N_+ f(x)$ y $D_+ g(x)$ por $N^+ f(x)$ y $D^+ g(x)$ o también por $N_- f(x)$ y $D_- g(x)$ o por $N^- f(x)$ y $D^- g(x)$ en $(a\,;\, b]$ a menos de un conjunto totalmente imperfecto A; en donde existan las derivadas laterales, será

$$\|f'_+(x)\| = N_+ f(x) = N^+ f(x)\,; \quad g'_+(x) = D_+ g(x) = D^+ g(x),$$

y análogamente a la izquierda, pudiéndose efectuar en las hipótesis [3] o [5] las correspondientes sustituciones.

Para la demostración de este teorema, comenzamos por aplicar el método que ya hemos seguido para funciones numéricas (9) y que mucho simplifica el seguido por SCHEEFEER (2). En las condiciones de hipótesis de la primera parte del teorema es absurdo suponer que es

$$||f(b) - f(a)|| > g(b) - g(a),$$

pues en dicho caso, existirían números positivos $K > 0$ y $p > 0$, tales que para todo k del intervalo $(0; K)$ sería:

$$||f(b) - f(a)|| > g(b) - g(a) + k(b - a) + p.$$

Si consideramos la función numérica, continua en $[a; b]$:

$$[7] \qquad \varphi(x, k) = ||f(x) - f(a)|| - g(x) + g(a) - k(x - a) - p,$$

se cumple $\varphi(a, k) < 0$, $\varphi(b, k) > 0$ y por un teorema clásico de BOLZANO sobre funciones continuas, existirá al menos un punto x de $(a; b)$ donde $\varphi(x, k) = 0$. Para cada k de $(0; K)$ existirá un bien determinado punto c de $(a; b)$ que sea extremo superior de los puntos de $(a; b)$ donde $\varphi(x, k) = 0$ y por la conservación de signo de una función continua en el entorno de un punto donde no es nula, habrá de ser $\varphi(c, k) = 0$. Además, se conservará $\varphi(x, k) > 0$ para todo x de $(c; b)$, pues es $\varphi(b, k) > 0$ y no puede anularse $\varphi(x, k)$ en $(c; b)$. Esto implica que c pertenece al conjunto excepcional A, pues si c perteneciera al complemento de A respecto de $[a; b)$ y fuese $D_+ g(c) = +\infty$, existiría algún x de $(c; b)$ que cumpla

$$\frac{||f(x) - f(c)||}{x - c} \leq N_+ f(c) + 1 \leq \frac{g(x) - g(c)}{x - c}.$$

(Si en la hipótesis interviniese $D^+ g(c) = +\infty$, al emplear $N^+ f(c)$ no simultáneamente infinito con $D^+ g(c)$, podríamos establecer la misma desigualdad entre los miembros extremos). Si en cambio fuese finito $D_+ g(c)$, al cumplirse por [3] la $N_+ f(c) \leq D_+ g(c)$, sería

$$\liminf_{x \to c^+} \frac{||f(x) - f(c)|| - (g(x) - g(c))}{x - c} \leq N_+ f(c) - D_+ g(c) \leq 0,$$

y por tanto, en este caso como en el anterior, para $k > 0$ existiría *algún* x de $(c\,;\,b)$ que cumpliese

$$[8] \qquad \|f(x) - f(c)\| \leqq g(x) - g(c) + k(x - c).$$

Así pues, si c perteneciese al complemento de A respecto de $[a\,;\,b)$, en dicho punto x de $(c\,;\,b)$ por la condición triangular que cumple la norma de un vector, por la [8] y por cumplirse $\varphi(c, k) = 0$, sería $\|f(x) - f(a)\| \leqq \|f(x) - f(c)\| + \|f(c) - f(a)\| \leqq g(x) - g(c) + k(x - c) + g(c) - g(a) + k(c - a) + p = g(x) - g(a) + k(x - a) + p$, es decir, por [7], en dicho punto x de $(c\,;\,b)$ sería $\varphi(x, k) \leqq 0$ que contradice la conclusión a que habíamos llegado de conservarse $\varphi(x, k) > 0$ para todo x de $(c\,;\,b)$.

Según observación de LEBESGUE (8), las $N_+ f(x)$ y $D_{\mp} g(x)$ son funciones medibles (B) y por tanto el conjunto A donde $N_+ f(x) - D_+ g(x) > 0$ es boreliano. Entonces, por un teorema de P. ALEXANDROFF (10) y F. HAUSDORFF (11), si A fuese no numerable, contendría topológicamente el conjunto ternario de CANTOR, que al ser perfecto y con la potencia del continuo, no podría estar contenido en el conjunto A supuesto totalmente imperfecto; por tanto A es numerable.

Sentado que c pertenecería al conjunto excepcional A que debe ser numerable, si ahora consideramos para $k_1 \neq k_2$ y un mismo punto x la diferencia

$$\varphi(x, k_1) - \varphi(x, k_2) = (k_1 - k_2)(x - a),$$

ésta no puede anularse para $x \neq a$. Como para todo k de $(0\,;\,K)$ es $\varphi(a, k) < 0$, si $\varphi(c, k_1) = 0$, no podrá corresponder a $k_2 \neq k_1$ el mismo $c(k_1)$. Así habríamos establecido una correspondencia biunívoca entre el intervalo *continuo* $(0\,;\,K)$ y un conjunto $c(k)$ contenido en el conjunto *numerable* A, lo que es absurdo, con lo que queda demostrado [4].

Supongamos ahora que se verificase

$$[9] \qquad \|f(b) - f(a)\| = g(b) - g(a),$$

entonces para todo x e y tales que $a \leqq x < y \leqq b$, sería también

$$[10] \qquad \|f(y) - f(x)\| = g(y) - g(x),$$

pues en caso de ser $||f(y) - f(x)|| < g(y) - g(x)$, de esto, la aplicación de [4] a los intervalos $[a : x]$, $[y ; b]$ y la propiedad triangular que cumple la norma de un vector, resultaría

$$||f(b) - f(a)|| \leq ||f(b) - f(y)|| + ||f(y) - f(x)|| + ||f(x) - f(a)|| <$$
$$< g(b) - g(y) + g(y) - g(x) + g(x) - g(a) = g(b) - g(a),$$

contrariamente a [9].

Por tanto, si en lugar de [6] se verifica [9], por [10] aplicado a la definición [1] de $N_+ f(x)$ y a la [2] de $D_+ g(x)$, sería $N_+ f(x) = D_+ g(x)$ en todo punto de $[a ; b)$ contrariamente a lo supuesto en [5] y así queda también demostrada la última parte del teorema 1.

Si el conjunto excepcional A no fuese totalmente imperfecto, es decir, contuviese un subconjunto perfecto, mediante la función ternaria de CANTOR, es fácil ver que el teorema dejaría de ser cierto, como ya demostró L. SCHEEFFER (2).

El teorema es más general que el de SCHEEFFER, porque según F. BERNSTEIN (6) en todo espacio completo, separable y no numerable «existe» un conjunto A que junto con su complementario es totalmente imperfecto y tiene la potencia del continuo. La demostración de «existencia» se basa en el postulado de ZERMELO, según observan W. SIERPINSKI y C. KURATOWSKI (7).

3. — El anterior teorema 1 resulta equivalente al teorema enunciado por F. SUNYER I BALAGUER en su trabajo citado (2) que dice: «*Una función continua está determinada a menos de una constante aditiva, cuando se conoce para cada valor de x, salvo quizá para aquellos de un conjunto A totalmente imperfecto, el valor finito del número derivado superior a la derecha de dicha función.* (Y lo mismo para el número derivado inferior a la derecha, superior a la izquierda e inferior a la izquierda).

La demostración de SUNYER no contenida en el trabajo citado (4) en lo referente al conjunto excepcional A, y que se nos comunicó verbalmente, aplicada al anterior teorema 1, es la siguiente:

Considerada la función continua [7] y para cada k de $(0 ; K)$ el punto c tal que $\varphi(c, k) = 0$, siendo $\varphi(x, k) > 0$ para todo x de $(c ; b]$, y sentado que c debería pertenecer al conjunto excepcional A, si ahora consideramos para $k_1 < k_2$ los puntos $c(k_1)$ y $c(k_2)$, como $\varphi(c(k_1), k_1) = 0$, de [7] deducimos que $\varphi(c(k_1), k_2) < 0$, que junto con $\varphi(b, k_2) > 0$, por definición de $c(k_2)$ demuestra que es $c(k_1) < c(k_2)$.

Así $c(k)$ es una función estrictamente creciente de k y que por tanto tendrá a lo más un conjunto numerable de puntos de discontinuidad. Si cubrimos dicho conjunto de puntos de discontinuidad por una sucesión de intervalos abiertos I_n de longitud total menor que $\frac{1}{2}K$, el complementario de $\bigcup I_n$ respecto de $[0; K]$ será cerrado con la potencia del continuo y por tanto contendrá un subconjunto perfecto P (teorema de CANTOR-BENDIXSON), que al estar acotado es compacto. Por ser la función $c(k)$ continua y creciente sobre $k \in P$, será también compacto sin puntos aislados, y por tanto perfecto, el conjunto $c(P) \subseteq A$, con lo que A no sería totalmente imperfecto en contra de la hipótesis del teorema, quedando así demostrado [4].

4. — El anterior teorema 1 puede demostrarse siguiendo el método de ZYGMUND (10), mediante el lema previo:

TEOREMA 2. — *Sea $f(x)$ una función vectorial definida y continua en un intervalo cerrado y acotado $I = [a; b]$ del cuerpo R de números reales que toma sus valores en un espacio normado E sobre R y sea $h(x)$ una función numérica, continua y creciente en sentido amplio (no decreciente) en I. Si los valores funcionales*

[11] $$F(x) = \|f(x) - f(a)\| - h(x) + h(a),$$

donde

[12] $$N_+ f(x) \geq D_+ h(x),$$

no contiene ningún intervalo no degenerado, entonces se conserva

[13] $$F(x) \leq 0$$

en I.

En dicho teorema se puede en [12] sustituir $N_+ f(x)$ y $D_+ h(x)$ por $N^+ f(x)$ y $D^+ h(x)$, o por $N_- f(x)$ y $D_- h(x)$, o por $N^- f(x)$ y $D^- h(x)$.

Para demostrarlo, sea S el subconjunto de I donde se cumpla [12], suponiendo por hipótesis que el conjunto funcional $F(S)$ no contiene ningún intervalo no degenerado. Vamos a ver que llegamos a una contradicción si suponemos que existe un punto x_1 de $(a; b]$ tal que sea $F(x_1) > 0$. Pues en el intervalo no degenerado $(0; F(x_1))$ existiría siempre un valor y_0 no perteneciente a $F(S)$ (pues por hipótesis $F(S)$ no contiene ningún intervalo no degenerado) y sea x_0 el extremo superior de los puntos del intervalo $[a; x_1]$ donde $F(x) \leq y_0$. Como $F(a) = 0$ y $0 < y_0 < F(x_1)$, por la continuidad de $F(x)$ debe ser $a < x_0 < x_1$ y $F(x_0) = y_0$, conservándose $F(x) > y_0$ para todo x de $(x_0; x_1]$. Entonces, para este intervalo, por [11] sería:

$$||f(x) - f(a)|| - h(x) + h(a) > ||f(x_0) - f(a)|| - h(x_0) + h(a),$$

de donde por la propiedad triangular que cumple la norma de un vector, se deduce:

$$||f(x) - f(x_0)|| \geqq ||f(x) - f(a)|| - ||f(x_0) - f(a)|| > h(x) - h(x_0),$$

que al ser aplicada a las definiciones [1] y [2] daría $N_+ f(x)_0 \geq D_+ h(x_0)$, es decir, por [12], el punto x_0 pertenecería a S, en contradicción con que $y_0 = F(x_0)$ no pertenece a $F(S)$.

Observaremos que si la condición [12] se formula para números derivados a la izquierda, tomaríamos como x_0 el extremo inferior de los puntos del intervalo $[a; x_1]$ donde $F(x) \geq y_0$, obteniendo también $F(x_0) = y_0$, conservándose $F(x) < y_0$ para todo x de $[a; x_0)$.

Mediante este teorema 2, podemos ahora desarrollar la siguiente demostración del teorema 1:

Sea para el número real $k > 0$ la función $h(x) = g(x) + kx$. Entonces, la condición [3] implica $N_+ f(x) < D_+ h(x)$ a cumplirse en el complemento de un conjunto totalmente imperfecto A respecto de $[a; b)$ y por tanto, se verifica la condición [12] a lo más en un conjunto totalmente imperfecto, cuyo transformado por [11] no podrá contener ningún intervalo no degenerado. Por tanto, podrá aplicarse el teorema 2 y por [13] será

$$[14] \qquad ||f(x) - f(a)|| - g(x) + g(a) - k(x - a) \leq 0$$

en I. Esto prueba que en I debe ser

$$||f(x) - f(a)|| \leq g(x) - g(a),$$

cumpliéndose en particular la tesis [4], pues en caso contrario, podría hallarse un $k > 0$ suficientemente pequeño para el que se daría la desigualdad opuesta a la [14].

La última conclusión [6] se deduce de [5] como antes.

5. — Como corolario del teorema 1 obtenemos:

TEOREMA 3. — *Para que una función vectorial $f(x)$ definida y continua en un intervalo I del cuerpo real R, con valores en un espacio normado E sobre R sea constante en I, es necesario y suficiente que $N_+ f(x)$ dado por* [1] *se anule en todos los puntos del complemento de un conjunto totalmente imperfecto A respecto de I.* (En el enunciado puede sustituirse $N_+ f(x)$ por $N^+ f(x)$ o por $N_- f(x)$ o por $N^- f(x)$).

Pues si en el teorema 1 se toma para $g(x)$ la constante 1, se verifica la hipótesis [3] y por [4] se cumplirá $\|f(b) - f(a)\| \leqq 0$; como la norma de un vector es siempre un número real no negativo, de ahí se deduce que $\|f(b) - f(a)\| = 0$, y como el vector nulo es el único que tiene norma nula, será $f(b) = f(a)$. El razonamiento subsiste para todo par de puntos de I y así queda demostrado el teorema 3.

6. — Extendamos los teoremas 1 y 3 al campo complejo para lo que introducimos ahora para funciones vectoriales de variable independiente z perteneciente al cuerpo C de números complejos, el *número derivonormado*, siempre existente:

$$[15] \qquad \overline{N} f(z) = \lim_{\zeta \to z} \sup \frac{\|f(\zeta) - f(z)\|}{|\zeta - z|} \geqq 0,$$

y analogamente $\underline{N} f(z)$ con lim inf en lugar de lim sup.

Pero como ahora, en los teoremas a obtener no serán intercambiables estos números derivados superior e inferior, introduzcamos también el *número derivonormado radial*

$$[16] \qquad N R f(z) = \operatorname{extr} \sup_{-\pi < \theta \leqq \pi} \left(\liminf_{t \to 0+} \frac{\|f(z + t e^{i\theta}) - f(z)\|}{t} \right) (t \text{ positivo}).$$

Tendremos entonces:

TEOREMA 4. — *Sea $f(z)$ una función vectorial definida y continua en un recinto (abierto) convexo D del cuerpo C de números complejos, que toma sus valores en un espacio normado E sobre C. Si definiendo $\overline{N} f(z)$ por* [15] *se tiene $\overline{N} f(z) \leqq m$ para todos los puntos z del complemento respecto de D de un conjunto A cuyas secciones rectilíneas son totalmente imperfectas, entonces es*

$$[17] \qquad \|f(b) - f(a)\| \leqq m\,|b - a|$$

para todo par de puntos a y b de D. Esta conclusión subsiste si en lugar de $\overline{N} f(z) \leqq m$, se presupone la condición menos restringida $N R f(z) \leqq m$, donde $N R f(z)$ se define por [16].

En cambio (cfr. teorema 1), la conclusión no subsiste si en lugar de $\overline{N}f(z) \leq m$ se tiene $\underline{N}f(z) \leq m$. Por ejemplo, si se hace corresponder a $z = x + iy$ su parte imaginaria $y = f(z)$, entonces es $\underline{N}f(z) = 0$ (basta hacer $\zeta \to z$ sobre horizontal) y para $y_2 > y_1$ se tiene $||f(x_2 + iy_2) - f(x_1 + iy_1)|| = y_2 - y_1 > 0$, en lugar de ser ≤ 0.

Para demostrar el teorema 4 basta aplicar el teorema 1 a la función

$$F(t) = \frac{1}{b - a} f(a + t(b - a)) \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq 1$$

y tomar $g(t) = mt$, pues se cumple [3] (para límites superiores) en el complemento de la intersección con A del segmento que une a y b, ya que si $N^+ F(t)$ está dada por [1] (con límite superior en lugar de lim inf) y se tiene en cuenta [15], se verifica en dicho complemento

$$N^+ F(t) = \limsup_{\tau \to t^+} \frac{||F(\tau) - F(t)||}{\tau - t} =$$

$$= \limsup_{\tau \to t^+} \frac{||f(a + \tau(b - a)) - f(a + t(b - a))||}{|b - a|(\tau - t)} \leq$$

$$\leq \overline{N}f(a + t(b - a)) \leq m;$$

entonces, de [4] se deduce inmediatamente para $||F(1) - F(0)||$ la tesis [17] que queríamos demostrar.

La demostración anterior subsiste si se aplica la condición $N\,Rf(z) \leq m$, sin más que sustituir $N^+ F(t)$ por $N_+ F(t)$, lim sup por lim inf y $\overline{N}f(a + t(b - a))$ por $N\,Rf(a + t(b - a))$. En cambio falla para $\underline{N}f(a + t(b - a))$.

TEOREMA 5. — *Para que una función vectorial $f(z)$ definida y continua en un recinto (abierto) D del cuerpo C de números complejos, que toma sus valores en un espacio normado E sobre C, sea constante, es necesario y suficiente que $\overline{N}f(z)$ definido por* [15] *sea nulo en el complemento de un subconjunto A de D de secciones rectilíneas totalmente imperfectas. También $f(z)$ se reduce a una constante si en lugar de $\overline{N}f(z)$ se supone solamente que $N\,Rf(z)$ definido por* [16] *es nulo en el complemento de un subconjunto A de D de secciones rectilíneas totalmente imperfectas.*

En contraste con lo que ocurre para las funciones vectoriales de variable real (§ 5), aquí la conclusión no subsiste, si en lugar de

$\bar{N}f(z) = 0$ (o $N\,R f(z) = 0$) se considera $\underline{N}f(z) = 0$. Por ejemplo, si a $z = x + iy$ se hace corresponder su parte imaginaria $y = f(z)$, resulta una función continua para la que es $\underline{N}f(z) = 0$ en todo punto de D y la función no es constante.

Para demostrar el teorema 5, consideremos que sea a un punto cualquiera de D; el conjunto Q de puntos z de D donde $f(z) = f(a)$ es *cerrado* respecto de D porque $f(z)$ es continua; por aplicación del teorema 4 con $m = 0$ a un entorno abierto convexo contenido en D de un punto cualquiera de Q, se ve que Q es también *abierto* respecto de D; luego Q es idéntico a D.

BIBLIOGRAFIA

(1) P. PI CALLEJA: *Los números derivonormados de funciones vectoriales* (Revista de la Unión Matemática Argentina, 17, 1955, pp. 161-172).

(2) L. SCHEEFFER: Acta Mathematica, *5*, 1884, pp. 52-283.

(3) U. DINI: *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali* (Pisa, 1878).

(4) F. SUNYER I BALAGUER: *Sur la détermination d'une fonction par ses nombres dérivés.* (Comptes Rendus Ac. Sci. Paris, *245*, 1957, pp. 1690-1692).

(5) H. LEBESGUE: *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* (2.ª ed., 1928, reimpr. 1950, Paris, p. 82).

(6) F. BERNSTEIN: Leipz. Ber., *60*, 1908, p. 329.

(7) W. SIERPINSKI y C. KURATOWSKI: Fund. Math., *8*, 1926, pp. 193-200.

(8) H. LEBESGUE: *Leçons sur l'intégration et la recheche des fonctions primitives* (2.ª ed., 1928, reimpr. 1950, Paris, p. 174).

(9) J. REY PASTOR, P. PI CALLEJA, C. A. TREJO: *Análisis matemático I* (2.ª ed., Kapeluss, Buenos Aires, Cap. IX, nota V, b_1).

(10) P. ALEXANDROFF: Comptes Rendus Ac. Sci. Paris, *162*, 1916, p. 323.

(11) F. HAUSDORFF: Math. Ann., *77*, 1916, p. 430.

(12) Citado en S. SAKS: *Theory of the integral* (2.ª ed. Varsovia, 1937, p. 203).