SOBRE EL PRODUCTO DE SUCESIONES Y SERIES

por

PABLO BOBILLO GUERRERO

INDICE

INTRODUCCION

Al investigar si en algún espacio de sucesiones con límite generalizado (o de series divergentes sumables) puede introducirse una estructura de anillo normado, nos encontramos con que la principal dificultad radica en la definición de productos de series que sean verdaderas composiciones internas dentro del espacio considerado, más bien que en la definición de una norma para la que el espacio resulte completo.

En los tratados clásicos se observa, de una parte, que no se habla del problema general de caracterización de los productos de series tales que sea válido el resultado: la suma de la serie producto es el producto de las sumas de las series factores. Se dan, en cambio, algunos resultados en hipótesis fuertes (Abel, Cesaro, Mertens, etc.) Por otra parte se puede observar que, si se da algún resultado que generalice estas proposiciones, no se trata de verdaderas composiciones internas. Por ejemplo, el producto de CAUCHY de dos series sumables-Césaro de orden k, no es en general sumable de orden k, sino de orden $2k+1$.

Nosotros nos planteamos tal problema general de caracterización, imponiendo que los productos de series a considerar sean por lo menos bilineales y continuos. Por razones de comodidad haremos un estudio del producto de sucesiones, y luego trasladaremos los resultados al caso de las series. En el apéndice incluiremos, además, el único resultado que hemos obtenido directamente relacionado con la idea que nos llevó, primitivamente, a ocuparnos de estas cuestiones: las series sumables Césaro constituyen un álgebra densa en un anillo normado local.

En el capítulo I se consideran los productos que pueden definirse en un espacio de sucesiones cuasiconvergentes dotado de una estructura especial que pasamos a definir. Si ω representa el espacio vectorial sobre $\mathbf{C}$ de todas las sucesiones complejas, y si ω_c representa el subespacio vectorial de las sucesiones casi constantes, diremos que un subespacio vectorial S de ω es un espacio de tipo S sí: a) $S \supset \omega_c$. b) S está dotado de una topología compatible con la estructura de grupo aditivo de S. c) $\forall\, s = \{A_i\}_{i \in N} \in S$, $\{S_i\}_{i \in N} \to S$ siendo $S_i = \{A_0, A_1, ..., A_i, 0, 0, 0, ...\}$.

Hay que tener cuidado en que el producto de números complejos por sucesiones de S no es necesariamente continuo. Como se demostrará en la nota 1, vale la propiedad: si F es aplicación bilineal de $S \times S$ en S, F es continua si es separadamente continua, y continua en $(\bar{0}, \bar{0})$, siendo $\bar{0}$ el elemento nulo de S.

Un subespacio vectorial S de ω se dirá que es de tipo P si S está dotado de una topología tal que las proyecciones π^n son continuas. Recuérdese que

$$\pi^n(\{A_i\}_{i \in N}) = A_n, \qquad \forall\, n \in N.$$

Si S es de tipo S y de tipo P, se dirá que es de tipo SP. Llamaremos C al subespacio vectorial de ω formado por las sucesiones convergentes, y $\mathcal{B}$ a su topología de la norma del supremo.

Por C_0 designaremos el subespacio de las sucesiones de límite 0. Al tratar con matrices infinitas utilizaremos términos habituales como «fila absolutamente convergente», «columna de límite cero», «producto de fila por columna» etc.

En el capítulo II nos ocuparemos de la situación que se da habitualmente: que el espacio de sucesiones cuasiconvergentes no está dotado de estructura topológica.

En el capítulo III se hace un estudio de los productos en C, considerando la topología producto y la de KRULL, sucesivamente. En este caso, naturalmente, se dan condiciones más precisas que en el caso general.

En el capítulo IV se consideran los productos definidos en un espacio de sucesiones con base de SCHAUDER. Si el límite generalizado no es aplicación continua del espacio citado en $\mathbf{C}$, nada nuevo se añade, en esencia, a los resultados del primer capítulo, en donde tal situación se da. Por ello, se insiste en el caso de que sí sea continuo.

En el capítulo V se estudian los productos definidos sobre C, dotado de su topología natural $\mathcal{B}$.

En el capítulo VI se dan condiciones para establecer propiedades algébricas del producto tales como asociatividad, conmutatividad y otras.

En el capítulo VII se analiza la traslación de estos resultados a espacios de series formales complejas.

Finalmente, en el apéndice se incluyen unas consideraciones sobre el caso de los algoritmos de TOEPLITZ.

La cuestión que podríamos llamar recíproca se resuelve rápidamente, desde el punto de vista teórico al menos. Dada un álgebra topológica S de series formales complejas, se trata de hallar los homomorfismos continuos σ de S en $\mathbf{C}$ tales que se cumple la condición de regularidad

$$\sigma\left(\sum_{n \in N} a_n X^n\right) = \sum_{n \in N} a_n, \quad \text{si} \quad \sum_{n \in N} a_n \text{ converge.}$$

Es cuestión de seleccionar del espectro maximal de S aquellos ideales maximales que dan lugar a homomorfismos regulares.

Es interesante observar que, si se verifica

$$\lim \{\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\}_{n \in N} = \sum_{n \in N} a_n X^n$$

necesariamente converge la serie $\sum_{n \in D} a_n$. Pues por ser σ regular es

$$\sigma\left(\sum_{i=0} a_i X^i\right) = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

Y por ser σ continuo,

$$\sigma\left(\sum a_n X^n\right) = \sigma\left(\lim \{\sum a_i X_i\}_{n \in N}\right) =$$

$$= \lim \{\sigma\left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\right)\}_{n \in N} = \lim \{a_0 + a_1 + \dots + a_n\}_{n \in N} = \sum_{n \in N} a_n.$$

NOTA — En este trabajo el símbolo

$$\sum_{i,j \in N} x_{ij}$$

representa el límite

$$\lim_{\substack{i \to \infty \\ j \to \infty}} \sum_{\substack{m=0,\dots,i \\ n=0,\dots,j}} x_{mn}$$

Análogamente el símbolo

$$\sum_{i \in N} x_i$$

representa

$$\lim_{i \to \infty} \sum_{n=0}^{i} x_n$$

Lo advertimos para que no haya confusión con otros convenios admitidos en textos sobre grupos topológicos.

CAPITULO I

PRODUCTO DE SUCESIONES CUASICONVERGENTES PERTENECIENTES A UN ESPACIO DE TIPO *SP*

Sea S un subespacio vectorial de ω tal que $\omega_c \subset S$. Suponemos dotado a S de una estructura de espacio SP. Sea λ un algoritmo lineal de convergencia en S; esto es, λ es una aplicación lineal de S en $\mathbf{C}$. Suponemos que λ es regular, lo que significa:

$$\lambda(\{A_i\}_{i\in N}) = \lim \{A_i\}_{i\in N}, \quad \text{si} \quad \{A_i\}_{i\in N} \in S \cap C$$

Se trata de estudiar los productos bilineales y continuos T, definidos en S, tales que se verifica la condición que llamaremos de MERTENS:

$$\lambda(s_1 \mathsf{T} s_2) = \lambda(s_1)\cdot\lambda(s_2), \qquad \forall (s_1, s_2) \in S \times S$$

Obsérvese que λ no es continuo. Consideremos por ejemplo la sucesión

$$S = \{1, 1, 1, ..., 1, ...\}$$

Por tanto,

$$S_i = \{1, 1, ..., 1, 0, 0, ...\}$$

A pesar de que $\{S_i\}_{i\in N} \to S$, $\{\lambda(S_i)\}_{i\in N}$ no tiende hacia $\lambda(S) = 1$.

Llamemos $e_i = \{\delta_{in}\}_{n\in N}$, $\forall\, i \in N$.

Así, se tiene

$$e_i = \{0, 0, \overset{i}{\smile}\!\!..., 0, 1, 0, 0, ..., 0, ...\}.$$

LEMA 1. — La serie $\sum\limits_{n\in N} A_i e_i$, siendo $\{A_i\}_{i\in N} \in S$, es convergente en S, y su suma es $\{A_i\}_{i\in N}$.

En efecto,

$$\sum_{n=0}^{i} A_n e_n = A_0 e_0 + A_1 e_1 + ... +$$
$$+ A_i e_i = \{A_0, A_1, ..., A_i, 0, 0, ..., 0, ...\}$$

que tiende hacia $\{A_i\}_{i\in N}$ por ser S de tipo S.

TEOREMA 1. — Supongamos que S está dotado de un producto $\top$ bilineal y continuo que satisface la condición de Mertens. Llamemos

$$e_i \top e_j = \{\varepsilon_{ij}^n\}_{n \in N}. \quad \text{Tesis:} \quad \{A_i\}_{i \in N} \top \{B_j\}_{j \in N} =$$
$$= \{\sum \varepsilon_{ij}^n A_i B_j\}_{n \in N}, \quad \forall (\{A_i\}_{i \in N}, \{B_j\}_{j \in N}) \in S \times S.$$

En efecto, por la continuidad de $\top$, es $\{A_i\}_{i \in N} \top \{B_j\}_{j \in N} = (\sum_{i \in N} A_i e_i) \top (\sum_{j \in N} B_j e_j) \top = \sum_{i,j \in N} A_i B_j e_i \top e_j$, serie doble convergente en S, y por ser continua cada π^n, se tiene que

$$\pi^n (\{A_i\}_{i \in N} \top \{B_j\}_{j \in N}) = \sum_{i,j \in N} \pi^n (A_i B_j e_i \top e_j) = \sum_{i,j \in N} A_i B_j \varepsilon_{ij}^n,$$

serie doble compleja convergente, y por tanto

$$\{A_i\}_{i \in N} \top \{B_j\}_{j \in N} = S = \{\pi^n(s)\}_{n \in N} = \{\sum_{i,j \in N} \varepsilon_{ji}^n A_i B_j\}_{n \in N} \qquad \text{C. Q. D.}$$

Los números complejos ε_{ij}^n han de cumplir pues, necesariamente, que para cada par de sucesiones de S, $\{A_i\}_{i \in N}$ y $\{B_j\}_{j \in N}$, y para cada $n \in N$, la serie doble compleja $\sum_{i,j \in N} \varepsilon_{ij}^n A_i B_j$ converge.

En particular, si consideramos el par $(e_i, \{B_j\}_{j \in N})$, resulta que la convergencia de la serie doble implica la convergencia de $\sum_{j \in N} \varepsilon_{ij}^n B_j$. Por tanto, $\forall\, n \in N$, y $\forall\, i \in N$, converge $\sum_{j \in N} A_i \varepsilon_{ij}^n B_j$. En virtud de un conocido teorema, ello implica

$$\sum_{i,j \in N} \varepsilon_{ij}^n A_i B_j = \sum_{i \in N} A_i \sum_{j \in N} \varepsilon_{ij}^n B_j, \quad \forall\, n \in N.$$

Análogamente se demuestra que

$$\sum_{i,j \in N} \varepsilon_{ij}^n A_i B_j = \sum_{j \in N} B_j \sum_{i \in N} \varepsilon_{ij}^n A_i, \quad \forall\, n \in N.$$

Si llamamos M_n a la matriz compleja infinita $(\varepsilon_{ij}^n)_{i,j \in N}$, pondremos formalmente

$$\sum_{i,j \in N} \varepsilon_{ij}^n A_i B_j = (A_i)\, M_n\, [B_j]$$

siendo (A_i) una matriz de una fila e infinitas columnas, y $[B_j]$ una matriz de una columna e infinitas filas. Las observaciones anteriores prueban que se verifica

$$((A_i)\ M_n)\ [B_j] = (A_i)\ [M_n\ [B_j]]$$

lo que justifica el símbolo

$$(A_i)\ M_n\ [B_j].$$

La sucesión de matrices $\{M_n\}_{n \in N}$ cumple pues la propiedad

(1 a): $\forall\, n \in N$ y $\forall\, (\{A_i\}_{i \in N},\ \{B_j\}_{j \in N}) \in S \times S$

la serie doble $\sum\limits_{i,\, j \in N} \varepsilon_{ij}^n A_i B_j$ converge. También vale, naturalmente, la propiedad

(1 b):
$$\{\sum_{i,j \in N} \varepsilon_{ij}^n A_i B_j\}_{n \in N} \in S,$$
$$\forall\, (\{A_i\}_{i \in N},\ \{B_j\}_{j \in N}) \in S \times S.$$

Puesto que $\lambda\,(e \top e) = 1$, siendo $e = \{1\}$, vale

$$(2):\quad \lambda\,(\{\sum_{i,j \in N} \varepsilon_{ij}^n\}_{n \in N}) = 1$$

Análogamente se verifica

(3): Si $(\{A_i\}_{i \in N},\ \{B_j\}_{j \in N}) \in S \times S$

y una de las dos sucesiones tiene límite generalizado nulo,

$$\lambda\,(\{\sum_{i,j \in N} \varepsilon_{ij}^n A_i B_j\}_{n \in N}) = 0.$$

Finalmente, la continuidad de $\top$ implica la validez de

(4): La aplicación de $S \times S$ en S que asigna a cada par $(\{A_i\}_{i \in N},\ \{B_j\}_{j \in N})$ como imagen la sucesión $\{\sum\limits_{i,j \in N} \varepsilon_{ij}^n A_i B_j\}_{n \in N}$ es separadamente continua, y además es continua en $(\bar{0},\ \bar{0})$, siendo $\bar{0}$ el elemento nulo de S.

TEOREMA 2. — Sea $\{M_n\}_{n \in N}$ una sucesión de matrices complejas infinitas que satisfacen las propiedades (1 a), (1 b), (2), (3) y (4), siendo $M_n = (\varepsilon_{ij}^n)_{i,j \in N}$. Tesis: Es bilineal y continuo, y cumple la condición de Mertens el producto T definido por la fórmula

$$\{A_i\}_{i \in N} \mathsf{T} \{B_j\}_{j \in N} = \{(A_i) M_n [B_j]\}_{n \in N} =$$
$$= \{\sum_{i,j \in N} \varepsilon_{ij}^n A_i B_j\}_{n \in N}, \ \forall (\{A_i\}, \{B_j\}) \in S \times S.$$

En efecto, la bilinealidad es inmediata. Y la continuidad también, como ya dijimos en la Introducción. Para ver que se cumple la condición de Mertens observemos que si $\lambda(s') = a' \wedge \lambda(s'') = a''$ se tiene

$$S' \mathsf{T} S'' = (S' - a' e) \mathsf{T} (S'' - a'' e) + a' a'' e \mathsf{T} e +$$
$$+ (S' - a' e) \mathsf{T} (a'' e) + (a' e) \mathsf{T} (S'' - a'' e),$$

ya que

$$S' \mathsf{T} S'' = (S' - a' e + a' e) \mathsf{T} (S'' - a'' e + a'' e)$$

con lo cual

$$\lambda(S' \mathsf{T} S'') = \lambda(a' a'' e \mathsf{T} e) = a' a'' \lambda(\{\sum_{i,j \in N} \varepsilon_{ij}^n\}_{n \in N}) = a' a''.$$

O sea, $$\lambda(S' \mathsf{T} S'') = \lambda(S') \cdot \lambda(S''). \qquad \text{C. Q. D.}$$

Dos productos distintos en S dan lugar a sucesiones de matrices diferentes, pues de no ser así, ya que vale la fórmula

$$\{A_i\}_{i \in N} \mathsf{T} \{B_j\}_{j \in N} = \{(A_j) M_n [B_j]\}_{n \in N}$$

resulta que los productos coinciden.

Recíprocamente, dos sucesiones de matrices distintas que cumplan las cinco propiedades citadas dan lugar a productos distintos. Sean, en efecto $\{M_n\}_{n \in N}$ y $\{\overline{M}_n\}_{n \in N}$ dos sucesiones de matrices complejas infinitas que cumplen las cinco propiedades citadas, y sean T y $\overline{\mathsf{T}}$ los productos a que dan lugar. Si tales sucesiones son distintas, existe $n \in N$ tal que $M_n \neq \overline{M}_n$. Por tanto, existe un par (i, j) de N^2 tal que $\varepsilon_{ij}^n \neq \bar{\varepsilon}_{ij}^n$. Con ello,

$$\pi^n (e_i \mathsf{T} e_j) = \varepsilon_{ij}^n \neq \bar{\varepsilon}_{ij}^n = \pi^n (e_i \overline{\mathsf{T}} e_j)$$

por lo que $e_i \mathsf{T} e_j \neq e_i \overline{T} e_j$.

Hay pues correspondencia biyectiva entre los productos en S bilineales y continuos que satisfacen la condición de Mertens y las sucesiones de matrices complejas infinitas que verifican (1a), 1b), (2), (3) y (4).

Veamos dos propiedades más de la sucesión de matrices:

(I). — Para cada par (i, j) de N^2 se cumple

$$\lambda\left(\{\varepsilon_{ij}^{n}\}_{n \in N}\right) = 0.$$

En efecto, $\{\varepsilon_{ij}^{n}\}_{n \in N} = e_i \top e_j$, por lo que

$$\lambda\left(e_i \top e_j\right) = \lambda\left(e_i\right) \cdot \lambda\left(e_j\right) = 0.$$

(II). — $\lambda\left(\{\sum\limits_{j \in N} \varepsilon_{ij}^{n}\}_{n \in N}\right) = 0, \quad \forall\, i \in N$

$$\lambda\left(\{\sum_{i \in N} \varepsilon_{ij}^{n}\}_{n \in N}\right) = 0, \quad \forall\, j \in N$$

Basta calcular $\quad \lambda\left(e \top e_j\right)$ y $\lambda\left(e_i \top e\right)$.

Nota 1. — Sea S un espacio de tipo S. Como dijimos, una aplicación F bilineal de $S \times S$ en S es continua si es separadamente continua y es continua en $(\bar{0}, \bar{0})$. Veamos la demostración.

La necesidad de la condición es obvia. Veamos la suficiencia. Sea (a, b) un elemento de $S \times S$. Escribamos

$$F(a + h,\ b + k) - F(a, b) = F(h, k) + F(a, k) + F(h, b).$$

Como las traslaciones de S son homeomorfismos, para ver que F es continua en (a, b) bastará que para cada entorno W de $\bar{0}$ hallemos un entorno $U \times V$ de $(0, 0)$ tal que si (h, k) pertenece a $U \times V$ sea $F(a + h,\ b + k) - F(a, b) \in W$.

Sea W_0 tal que $W_0 + W_0 + W_0 \subset W$, W_0 entorno de $\bar{0}$. Existe $U' \times V'$ tal que $(h, k) \in U' \times V' \Rightarrow F(h, k) \in W_0$.

Sea U'' tal que $h \in U'' \Rightarrow F(h, b) \in W_0$.

Y sea V'' tal que $k \in V'' \Rightarrow F(a, k) \in W_0$.

Si llamamos $U = U' \cap U''$ y $V = V' \cap V''$ resulta que $(h, k) \in$ $\in U \times V$ implica $F(a + h,\ b + k) - F(a, b)$ pertenece a W, como queríamos demostrar.

Es muy importante tener en cuenta que si la topología de S es compatible con la estructura de espacio vectorial de S basta que F sea continua en $(\bar{0}, \bar{0})$ para que sea continua en $S \times S$. Ello puede verse en la ref. (1), pág. 171, n.º 14.

CAPITULO II

PRODUCTO DE SUCESIONES CUASICONVERGENTES EN GENERAL

Un algoritmo lineal de convergencia puede presentarse definido en un subespacio vectorial S de ω sin estructura topológica alguna. En tal caso conviene dotar a S de una topología inducida por alguna topología de ω. En el caso de que el algoritmo sea de Toepltz, ya veremos en el apéndice qué topología «natural» puede considerarse para S.

Vamos a considerar dos topologías de ω: la topología producto usual (nótese que $\omega = \mathbf{C}^N$), y la topología de KRULL. Las topologías inducidas sobre S se llamarán la topología ordinaria de S y la topología de KRULL de S, respectivamente.

Como es sabido, ω dotada de la topología producto es un espacio de FRECHET. Las seminormas son las aplicaciones $|\pi^n|$. Evidentemente, ω con tal topología es espacio de tipo SP.

Recordemos cómo se introduce la topología de KRULL.

Si $\{A_i\}_{i \in N} \in \omega - \{\bar{0}\}$, se define $k(\{A_i\}_{i \in N}) =$

$$= \text{mín}\,\{n\,;\ n \in N \wedge A_n \neq 0\}.$$

Si $\{A_i\}_{i \in N}$ es precisamente el elemento nulo $\bar{0}$ de ω, el c conjunto anterior es vacío. Convendremos en que $k(\bar{0}) = \infty$.

Se define $\delta(S, \bar{0}) = e^{-k(s)}$, $\forall\, S \in \omega - \{\bar{0}\}$.

Si definimos $\delta(\bar{0}, \bar{0}) = 0$, la igualdad anterior vale para todo ω con el convenio formal usual $e^{-\infty} = 0$.

Se define

$$d : \omega \times \omega \longrightarrow \mathbf{R}_0^+$$

por la fórmula $d(S_1, S_2) = \delta(S_1 - S_2, \bar{0})$.

Es un sencillo ejercicio comprobar que ω, con la topología a que da lugar tal distancia, es espacio completo, y de tipo SP. Por definición, $\{S_i\}_{i \in N} \to 0$ si $\{k(S_i)\}_{i \in N} \to \infty$. Tal convergencia, por supuesto, ha de entenderse en $\mathbf{R}_0^+$ completado con un elemento máximo, ∞, en virtud del convenio anterior.

LEMA 2. — Sea $\sum_{i,j \in N} S_{ij}$ una serie doble de elementos de ω, convergente para la topología de KRULL. Sea $S_{ij} = \{a_{ij}^n\}_{n \in N}$. Tesis: $\forall\, n \in N$, $\exists\, \nu_n \in N$ tal que $i, j \geq \nu_n$ implica $a_{ij}^n = 0$.

En efecto, si es S la suma de la serie citada (con $S \in \omega$ naturalmente), $\forall\, n \in N$, $\exists\, \nu_n \in N$ tal que $i, j \geq \nu_n - 1$ implica $k(S - \sigma_{ij}) > n$ siendo $\sigma_{ij} = \sum_{h=0}^{i} \sum_{l=0}^{j} S_{hl}$.

Por tanto, si $i, j \geq \nu_n - 1$, $(S - \sigma_{ij})$ es una sucesión de ω con sus $\bar{n}$ primeros términos nulos. Así, ya que $S_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma_{i-1,j-1} - \sigma_{i-1,j} - \sigma_{i,j-1} = (\sigma_{ij} - S) + (\sigma_{-1,j-1} - S) - (\sigma_{i-1,j} - S) - (\sigma_{i,j-1} - S)$ también S_{ij} tendrá sus $\bar{n}$ primeros términos nulos, con tal que $i, j \geq \nu_n$. En particular, $a_{ij}^n = 0$. Nótese que si aparece el siguiente de n, es decir $\bar{n}$, es debido a que incluimos el cero en el conjunto de los números naturales.

TEOREMA 3. — Sea S un subespacio vectorial de ω tal que $S \supset \omega_c$ y supongamos dotado a S de un algoritmo lineal de convergencia λ regular. Dotemos a S de la topología de KRULL, con lo que S queda dotado de estructura de espacio de tipo SP. Sea T un producto bilineal y continuo en S que satisface la condición de MERTENS. Tesis: La correspondiente sucesión $\{M_n\}_{n \in N}$ de matrices complejas infinitas verifica (1a), (1b), (2), (3) y la propiedad

(4[x]): Cada M_n es casi nula, lo que significa que todos sus términos son nulos salvo un número finito a lo sumo.

En efecto, al ser T continuo, es separadamente continuo. Sea $(n, j) \in N^2$. Consideremos la aplicación de S en S dada por la fórmula

$$\{A_i\}_{i \in N} \longrightarrow \{A_i\}_{i \in N} \mathsf{T}\, e_j$$

Existe ν_n tal que $k(\{A_i\}_{i \in N}) > \nu_n$ implica

$$k(\{A_i\}_{i \in N} \mathsf{T}\, e_j) > n \iff \sum_{i \in N} \varepsilon_{ij}^m A_i = 0, \ \forall\, m \leq n.$$

Tomando $\{A_i\}_{i \in N} = e_l$, con $l > \nu_n$, concluimos

$$\varepsilon_{lj}^n = 0, \ \forall\, l < \nu_n.$$

Es decir, cada fila de cada M_n consta de un número finito de términos no nulos a lo sumo. Y lo mismo puede demostrarse para las columnas.

Tal resultado, en unión del lema 2 prueba que vale (4^x), sin más que considerar la serie doble de elementos de S

$$\sum_{i,j \in N} e_i \mathsf{T} e_j = e \mathsf{T} e.$$

NOTA 2. — Del teorema anterior se deduce que la validez de (4^x) implica trivialmente la validez de (1 a).

TEOREMA 4. — Si S es un espacio del tipo descrito en el teorema anterior, cada sucesión de matrices complejas infinitas $\{M_n\}_{n \in N}$ que cumpla (1 b), (2), (3) y (4^x) da lugar a un producto T en S bilineal y continuo que satisface la condición de MERTENS.

Bastará que probemos la validez de (4). Es decir, que T es separadamente continuo, y continuo en $(\bar{0}, \bar{0})$. Por supuesto,

$$\{A_i\}_{i \in N} \mathsf{T} \{B_j\}_{j \in N} = \{(A_i) M_n [B_j]\}_{n \in N}.$$

Veamos que T es separadamente continuo. Sea $\{A_i\}_{j \in N}$ un elemento dado de S. Veamos que la aplicación de S en S dada por

$$\{B_j\}_{j \in N} \longrightarrow \{A_i\}_{i \in N} \mathsf{T} \{_j B\}_{j \in N}.$$

es continua en el origen $\bar{0}$.

Dado $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$, elijamos $n \in N$ tal que $e^{-n} < \varepsilon$. Sea $\nu \in N$ tal que $M_0, M_1, ..., M_n$ tengan elementos no nulos a lo sumo en las ν primeras filas y columnas. Con ello, para cada $m = 0, 1, ..., n$ se tiene

$$\sum_{i,j \in N} \varepsilon_{ij}^m A_i B_j = \sum_{i,j = 0, ..., \nu - 1} \varepsilon_{ij}^m A_i B_j$$

Por consiguiente, si $k(\{B_i\}_{j \in N}) > \nu$ será

$$\sum_{i,j \in N} \varepsilon_{ij}^m A_i B_j = 0, \quad \forall\, m = 0, 1, 2, ..., u.$$

Llamemos $\delta = e^{-\nu}$. Con ello

$$d(\{B_j\}_{j \in N}, 0) < \delta \Leftrightarrow k(\{B_j\}_{j \in N}) > \nu \Rightarrow k(\{\sum \varepsilon_{ij}^m A_i B_j\}_{m \in N}) =$$
$$= k(\{A_i\} \mathsf{T} \{B_i\}) > n \Leftrightarrow d(\{A_i\} \mathsf{T} \{B_j\}, \bar{0}) < \varepsilon$$

Queda pues probada la continuidad de T por la derecha. Análogamente se prueba que T es continuo por la izquierda.

Para ver que T es continuo en $(\bar{0}, \bar{0})$, dado $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ se definen n, ν y δ como antes, y se observa que si

$$k(\{A_i\}_{i \in N}) > \nu \quad \text{y si} \quad k(\{B_j\}_{j \in N}) > \nu$$

evidentemente es

$$\sum_{i, j \in N} \varepsilon_{ij}^m A_i B_j = 0, \quad \forall_m = 0, 1, \ldots, n.$$

O sea,

$$k(\{A_i\} \mathsf{T} \{B_j\}) > n.$$

De otro modo,

$$\left.\begin{array}{l} d(\{A_i\}_{i \in N}, \bar{0}) < \delta \\ d(\{B_j\}_{j \in N}, \bar{0}) < \delta \end{array}\right\} \Rightarrow d(\{A_i\} \mathsf{T} \{B\}, \bar{0}) < \varepsilon.$$

lo cual no es sino la definición de continuidad de T en $(\bar{0}, 0)$.

Desde el punto de vista del cálculo, la validez de (4^x) implica que las series dobles que aparecen en el caso general se reducen a sumas finitas al dotar a S de la topología de KRULL. Tal cosa sucede también si se dota a S de la topología ordinaria, como probaremos en los teoremas siguientes.

TEOREMA 5. — Sea S un subespacio vectorial de ω, tal que $S \supset \omega_c$, dotado de un algoritmo lineal de convergencia regular λ. Dotamos a S de su topología ordinaria, con lo que S adquiere estructura de espacio de tipo SP. Sea T un producto en S, bilineal y continuo, que satisface la condición de Mertens. Tesis: La correspondiente sucesión de matrices complejas infinitas satisface, además de (1a), (1b), (2), (3), la propiedad

(4^x): Cada matriz M_n es casi nula (o sea, consta de un número finito de términos no nulos a lo sumo).

En efecto, sea $n \in N$, y definamos $\varphi_n : S \times S \longrightarrow \mathbf{C}$ mediante la fórmula

$$\varphi_n(S_1, S_2) = \pi^n(S_1 \mathsf{T} S_2), \ \forall (S_1, S_2) \in S \times S.$$

Cada φ_n es una aplicación bilineal y continua, ya que $\varphi_n = \pi^n \circ \mathsf{T}$ Por tanto, φ_n está acotada en un entorno del origen, que será del tipo $U \times V$, siendo

$$U = \{x = \{x_i\}_{i \in N} \in S \, ; \, |\pi^{i_h}(x)| < \varepsilon, \ h = 1, 2, ..., r\}$$
$$V = \{y = \{y_j\}_{j \in N} \in S \, ; \, |\pi^{i_k}(y)| < \varepsilon, \ k = 1, 2, ..., s\}$$

Pues bien, sólo los rs términos ε_{ij}^n con

$$\begin{cases} i = i_1, i_2, ..., i_r \\ j = j_1, j_2, ..., j_s \end{cases} \quad \text{pueden ser no nulos.}$$

Pues si existe $\varepsilon_{ij}^n \neq 0$, con uno de sus subíndices distinto de los anteriores, se llega a contradicción.

Tomemos $i \neq i_h$, $\forall h = 1, 2, ..., r$. Con ello $me_i \in U$, cualquiera sea $m \in N$. Se tiene $\frac{\varepsilon}{2} e_j \in V$.

Pero $$\varphi_n\left(me_i, \frac{\varepsilon}{2} e_j\right) = \frac{m\,\varepsilon}{2} \varphi(e_i, e_j) = \frac{m\,\varepsilon}{2} \varepsilon^{ij}_n$$

que tiende a infinito si se hace tender m a infinito, en contra de la acotación citada.

Teorema 5 bis. — Si S es del tipo indicado en el teorema anterior, cada sucesión de matrices complejas infinitas $\{M_n\}_{n \in N}$ que satisface (1b), (2), (3), y (4^x) da lugar a un producto T en S, bilineal y continuo, que satisface la condición de Mertens.

Ante todo hay que observar que por ser cada M_n casi nula, (1a) se cumple automáticamente.

La demostración del teorema es inmediata porque la validez de (4^x) implica que cada φ_n es continua. Como en el teorema anterior, se define φ_n por la fórmula:

$$\varphi_n(S_1, S_2) = \pi^n(S_1 \mathsf{T} S_2).$$

Pero como $\varphi_n = \pi^n \circ \mathsf{T}$, de la continuidad de cada φ_n se deduce la continuidad de T, por definición de topología producto (Vid. referencia (2), págs. 45 y 46).

CAPITULO III

PRODUCTOS DE SUCESIONES CONVERGENTES

Vamos a estudiar los productos que cumplen las tres condiciones ya dichas en el caso particular $S = C$. En este capítulo consideraremos dotado a C de la topología ordinaria o de la topología de KRULL. Más adelante consideraremos la estructura $(C, \mathcal{B})$.

LEMA 3. — Sea $\{r_i\}_{i \in N}$ una sucesión de números reales tal que, para cada $\{x_i\}_{i \in N} \in C_0(\mathbf{R})$, la serie $\sum_{i \in N} r_i x_i$ es convergente.

Tesis: $\sum_{i \in N} |r_i| < +\infty$.

En efecto, de no ser así, es que

$$\lim \{|r_0| + |r_1| + \dots + |r_i|\}_{i \in N} = +\infty .$$

Definamos

$$x_i = \frac{\operatorname{sgn}(r_i)}{\sqrt{1 + |r_0| + \dots + |r_i|}}, \quad \forall\, i \in N$$

Con ello,
$$r_0 x_0 + r_1 x_1 + \dots + r_i x_i =$$
$$= \frac{|r_0|}{\sqrt{1 + |r_0|}} + \dots + \frac{|r_i|}{\sqrt{1 + |r_0| + \dots + |r_i|}} \geq$$
$$\geq \frac{|r_0| + \dots + |r_i|}{\sqrt{1 + |r_0| + \dots + |r_i|}} \longrightarrow +\infty$$

en contra de que, como $\{x_i\} \to 0$, debe converger $\sum_{i \in N} r_i x_i$.

El recíproco es trivial.

LEMA 4. — Sea $\{z_i\}_{i \in N}$ una sucesión de números complejos tal que, para cada $\{x_i\}_{i \in N} \in C_0(\mathbf{R})$, la serie $\sum z_i x_i$ converge.

Tesis: $\sum |z_i| < +\infty$.

En efecto, basta poner $z_j = r_j + i\,\varrho_j$ y aplicar el lema anterior. Pues la convergencia de $\sum_{j \in N} z_j x_j$ equivale a la de cada una de las series reales $\sum_{j \in N} r_j x_j$ y $\sum_{j \in N} \varrho_j x_j$. Por tanto, $\sum_{j \in N} |r_j| < +\infty$ y $\sum_{j \in N} |\varrho_j| < +\infty$, de donde es $\sum_{j \in N} |z_j| < +\infty$, por ser $|z_j| \leq |r_j| + |\varrho_j|$.

El recíproco es también trivial.

LEMA 4 bis. — Si $\{z_i\}_{i \in N} \in l^1$, $f: (C, \mathcal{B}) \to \mathbf{C}$ dada por $f(\{A_i\}_{i \in N}) = \sum_{i \in N} z_i A_i$, es continua. La demostración es trivial.

LEMA 5. — Sea $(a_{ij})_{i,j \in N}$ una matriz compleja infinita tal que para cada $(\{A_i\}_{i \in N}, \{B_j\}_{j \in N}) \in C \times C$ la serie doble compleja $\sum_{i,j \in N} a_{ij} A_i B_j$ converge. Tesis: La aplicación $f: C \times C \to \mathbf{C}$ dada por

$$f(\{A_i\}_{i \in N}, \{B_j\}_{j \in N}) = \sum_{i,j \in N} a_{ij} A_i B_j$$

es continua, dotando a $C \times C$ de la topología $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$.

En efecto, bastará ver que es separadamente continua, ya que es f bilineal y $(C, \mathcal{B})$ métrico completo (Vid. referencia (1), página 172, n.º 14).

Considerando un par del tipo $(e_i, \{B_j\}_{j \in N})$ se llega a la conclusión de que para cada $i \in N$, $\sum_{j \in N} a_{ij} B_j$ converge cualquiera sea $\{B_j\}_{j \in N} \in C$. Debe pues ser, para cada $i \in N$,

$$\sum_{j \in N} |a_{ij}| < +\infty.$$

Con ello, para cada $i \in N$, la aplicación que asigna a cada $\{B_j\}_{j \in N}$ el número complejo $\sum_{j \in N} a_{ij} B_j$, es aplicación continua de $(C, \mathcal{B})$ en $\mathbf{C}$. Así, si $\{A_i\}_{i \in N}$ es un elemento fijo de C, la aplicación f_n de $(C, \mathcal{B})$ en $\mathbf{C}$ dada por

$$f_n(\{B_j\})_{j \in N} = \sum_{i=0}^{n} A_i \sum_{j \in N} a_{ij} B_j$$

es continua, cualquiera sea $n \in N$.

Por otra parte, como ya se ha dicho, para cada $\{B_j\}_{j \in N} \in C$ es

$$\sum_{i,j \in N} a_{ij} A_i B_j = \sum_{i \in N} A_i \sum_{j \in N} a_{ij} B_j.$$

Por consiguiente, según el teorema de Banach-Steinhaus (Vid. referencia (3), pág. 138), f es separadamente continua por la derecha, ya que

$$\lim_{n \to \infty} f_n (\{B_j\})_{j \in N} = f(\{A_i\}_{i \in N}, \{B_j\}_{j \in N}).$$

Análogamente se prueba que f es separadamente continua por la izquierda.

LEMA 6. — Supongamos dotado a C de una estructura de espacio SP. Sea T un producto bilineal y continuo en C que satisface la condición de Mertens. Llamemos λ al límite ordinario. Tesis: Si se define $\varphi_n : C \times C \to \mathbf{C}$ por la fórmula $\varphi_n (s_1, s_2) = \pi^n (s_1 \mathsf{T} s_2)$, $\forall\, n \in N \wedge \forall\, (s_1, s_2) \in C \times C$ existe $M \in \mathbf{R}^+$ tal que $\|\varphi_n\| \leq M$, $\forall\, n \in N$.

Ante todo obsérvese que

$$\varphi_n (\{A_i\}_{i \in N}, \{B_j\}_{j \in N}) = \sum_{i, j \in N} \varepsilon_{ij}^n A_i B_j$$

por lo que cada φ_n es aplicación bilineal continua de $C \times C$ en $\mathbf{C}$, dotado a $C \times C$ de la topología $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$, según el lema 5.

Para demostrar el enunciado, definamos

$$|\varphi_n| : (C \times C, \mathcal{B} \times \mathcal{B}) \longrightarrow \mathbf{R}$$

por la fórmula $|\varphi_n| (s_1, s_2) = |\varphi_n (s_1, s_2)|$.

Ahora bien, puesto que

$$\lambda (s_1 \mathsf{T} s_2) = \lim \{\pi^n (s_1 \mathsf{T} s_2)\}_{n \in N} = \lim \{\varphi_n (s_1, s_2)\}_{n \in N}$$

resulta que las $|\varphi_n|$ son funciones numéricas semicontinuas (continuas) con envolvente superior finita, por lo que existe una bola en $C \times C$ en que las $|\varphi_n|$ están uniformemente acotadas. (Vid. referencia (3), pág. 295).

Si definimos la norma en $C \times C$ por la fórmula

$$\|(s_1, s_2)\| = \text{máx}\, \{\|s_1\|, \|s_2\|\}, \ \forall\, (s_1, s_2) \in C \times C$$

se tiene, según acaba de decirse, que existe $k \in \mathbf{R}^+$ y una bola

$$B((s_1^0, s_2^0), \varrho) \ \text{ tal que } \ (s_1\, s_2) \in B((s_1^0, s_2^0), \varrho) \ \text{ implica}$$
$$|\varphi_n| (s_1, s_2) = |\varphi_n (s_1, s_2)| \leq k, \ \forall\, n \in N.$$

Veamos que existe $K \in \mathbf{R}^+$ tal que $\forall\, n \in N$ es

$$|\varphi_n(s_1, s_2)| \leq K, \quad (s_1, s_2) \in B((\bar{0}, \bar{0}), \varrho).$$

Con ello la demostración estará terminada, ya que llamando

$$M = \frac{K}{\varrho^2} \quad \text{queda} \quad (s_1, s_2) \in B((\bar{0}, \bar{0}), 1)$$

implica

$$(\varrho s_1, \varrho s_2) \in B(\bar{0}, \bar{0}), \varrho,$$

con lo cual

$$|\varphi_n(s_1, s_2)| = \frac{1}{\varrho^2} |\varphi_n(\varrho s_1, \varrho s_2)| \leq \frac{K}{\varrho^2} = M, \quad \forall\, n \in N.$$

Por tanto

$$||\varphi_n|| \leq M, \quad \forall\, n \in N.$$

Consideremos, pues,

$$\varphi_n(s_1, s_2) = \varphi_n(s_1^0, s_2^0) + \varphi_n(s_1 + s_1^0, s_2 + s_2^0) - \varphi_n(s_1^0, s_2) - \varphi_n(s_1, s_2^0).$$

Como las aplicaciones $\varphi_n(s_1^0, \quad)$ y $\varphi_n(\quad, s_2^0)$ son aplicaciones lineales y continuas de (C, B) en $\mathbf{C}$, y tienen envolvente superior finita, Están uniformemente acotadas en norma (Vid. referencia (3), página 317, teorema 3). Sean k_1 y k_2 las respectivas cotas. Con ello

$$|\varphi_n(s_1, s_2)| \leq |\varphi_n(s_1 + s_1^0, s_2 + s_2^0)| +$$
$$+ |\varphi_n(s_1^0, s_2^0)| + k_1 ||s_1^0|| \cdot ||s_2|| + k_2 ||s_2^0|| \cdot ||s_1||.$$

Si $(s_1, s_2) \in B((\bar{0}, \bar{0}), \varrho)$ es

$$(s_1 + s_1^0, s_2 + s_2^0) \in B((s_1^0, s_2^0), \varrho)$$

y por tanto

$$|\varphi_n(s_1, s_2)| \leq k + k + k_1 ||s_1^0|| \varrho + k_2 ||s_2^0|| \varrho.$$

Si llamamos

$$K = 2k + \varrho (k_1 ||s_1^0|| + k_2 ||s_2^0||)$$

queda probado el resultado anunciado.

TEOREMA 6. — Sea $\{M_n\}_{n\in N}$ una sucesión de matrices complejas infinitas tal que, llamando $M_n = (\varepsilon_{ij}^n)_{i\,j\in N}$, valen 1a), (2), (I), (II) y la propiedad

(5): $\exists\, M \in \mathbf{R}^+$ tal que $\|\varphi_n\| \leq M, \ \forall\, n \in N.$

Por supuesto, se define $\varphi_n(\{A_i\}_{i\in N}, \{B_j\}_{j\in N}) = (A_i)\, M_n\, [B_j]$; φ_n es aplicación continua de $(C \times C, \mathcal{B} \times \mathcal{B})$ en $\mathbf{C}$ (lema 5).

Tesis: Valen (1b) y (3).

Tenemos que demostrar que $\forall\, (\{A_i\}_{i\in N}, \{B_j\}_{j\in N}) \in C \times C$

$$\{\sum_{i,j\in N} \varepsilon_{ij}^n A_i B_j\}_{n\in N} \in C.$$

y además que

$$\lim \{\sum \varepsilon_{ij}^n A_i B_j\}_{n\in N} = 0$$

si una de las dos sucesiones $\{A_i\}_{i\in N}$, $\{B_j\}_{j\in N}$, tiene límite 0.

Supongamos que

$$\lim \{A_i\}_{i\in N} = \lim \{B_j\}_{j\in N} = 0.$$

Dado $\delta < 0$, existe $\nu \in N$ tal que $i, j \geq \nu$ implica

$$|A_i| < \delta \wedge |B_j| < \delta.$$

Llamemos

$$\alpha = \{A_0, A_1, \ldots, A_{\nu-1}, 0, \ldots, 0, \ldots\}$$

y

$$\beta = \{B_0, B_1, \ldots, B_{\nu-1}, 0, \ldots, 0, \ldots\}.$$

Con ello se tienen las relaciones

$$\{A_i\}_{i\in N} - \alpha = \{0, \ldots, 0, A_\nu, A_{\nu+1}, \ldots\} = a$$
$$\{B_j\}_{j\in N} - \beta = \{0, \ldots, 0, B_\nu, B_{\nu+1}, \ldots\} = b$$

Es trivial que cada φ_n es aplicación bilineal de $C + C$ en $\mathbf{C}$.

Así,
$$\varphi_n(\{A_i\}_{i\in N}, \{B_j\}_{j\in N}) = \varphi_n(a + \alpha, b + \beta) =$$
$$= \varphi_n(a, b) + \varphi_n(a, \beta) + \varphi_n(\alpha, b) + \varphi_n(\alpha, \varrho)$$

Como $\varphi_n(\alpha, \beta) = \sum_{i,j<\nu} \varepsilon_{ij}^n A_i B_j$ resulta que $\lim \{\varphi_n(\alpha, \beta)\}_{n\in N} = 0$, en virtud de (I).

Así pues, existe $\nu_0 \in N$ tal que $n \geq \nu_0$ implica

$$|\varphi_n(\alpha, \beta)| < \delta$$

Obsérvese que ν_0 depende exclusivamente de δ, para un par

$(\{A_i\}_{j\in N}, \{B_j\}_{j\in N})$ dado de $C_0 \times C_0$. Si $n \geq \nu_0$, se tiene

$$\begin{aligned}
|\varphi_n(\{A_i\}_{j\in N}, \{B_j\}_{j\in N})| &< \delta + ||\varphi_n|| \cdot ||a|| \cdot ||\beta|| + \\
&+ ||\varphi_n|| \cdot ||\alpha|| \cdot ||b|| + ||\varphi_n|| \cdot ||\alpha|| \cdot ||\beta|| \leq \delta + \\
&+ M(||\{A_i\}_{i\in N}|| \cdot ||\beta|| + ||\{B_j\}_{j\in N}|| \cdot ||\alpha|| + ||\alpha|| \cdot ||\beta||) \leq \\
&\leq \delta + M(\delta\,||\{A_i\}_{i\in N}|| + \delta\,||\{B_j\}_{j\in N}|| + \delta^2) = \\
&= \delta\,[1 + M(||\{A_i\}_{i\in N}|| + ||\{B_j\}_{j\in N}|| + \delta)].
\end{aligned}$$

Dado $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$, tomemos

$$\delta = \text{mín}\left\{1, \frac{\varepsilon}{1 + M(1 + ||\{A_i\}_{i\in N}|| + ||\{B_j\}_{j\in N}||}\right\}$$

con lo cual

$$\begin{aligned}
&\delta\,[1 + M(\delta + ||\{A_i\}_{i\in N}|| + ||\{B_j\}_{j\in N}||)] \leq \\
&\leq \delta\,[1 + M(1 + ||\{A_i\}_{i\in N}|| + ||\{B_j\}_{j\in N}||)] \leq \varepsilon,
\end{aligned}$$

En resumen, dado $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$, se determina $\nu_0 \in N$, y queda

$$n \geq \nu_0 \Rightarrow |\varphi_n(\{A_i\}_{i\in N}, \{B_j\}_{j\in N})| < \varepsilon.$$

Lo cual significa $\lim \{\sum_{i,j\in N} \varepsilon_{ij}^n A_i B_j\}_{n\in N} = 0.$

Supongamos ahora $\{A_i\}_{i\in N} \in C_0$. Veamos que

$$\lim \{\varphi_n(\{A_i\}_{i\in N}, e)\}_{n\in N} = 0.$$

Dado $\delta \in \mathbf{R}^+$, sea $\nu \in N$ tal que $i \geq \nu$ implica

$|A_i| < \delta$. Y sea $\alpha = \{A_0, A_1, \ldots, A_{\nu-1}, 0, \ldots, 0, \ldots\}$.

Por tanto, si llamamos como antes $a = \{A_i\}_{i\in N} - \alpha$, quedará

$$\varphi_n(\{A_i\}_{i\in N}, e) = \varphi_n(a, e) + \varphi_n(\alpha, e).$$

Pero $\varphi_n(\alpha, e) = \sum_{i=0}^{\nu-1} A_i \sum_{j \in N} \varepsilon_{ij}^n \to 0$ en virtud de (II).

Sea pues $\nu_0 \in N$ tal que $n \geq \nu_0$ implica $|\varphi_n(\alpha, e)| < \delta$.

Con ello, si $n \geq \nu_0$, se tiene

$$|\varphi_n(\{A_i\}_{i \in N}, e)| < \delta + |\varphi_n(a, e)| \leq \delta +$$
$$+ M\,||a|| \cdot ||e|| = \delta + M\,||a|| \leq \delta + M\,\delta.$$

Dado $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$, se toma $\delta = \dfrac{\varepsilon}{1 + M}$, y hallando $\nu_0 \in N$ del modo indicado podemos concluir

$$n \geq \nu_0 \Rightarrow \Rightarrow |\varphi_n(\{A_i\}_{i \in N}, e)| < \varepsilon.$$

Lo que significa

$$\lim \{\varphi_n(\{A_i\}_{i \in N}, e)\}_{n \in N} = 0.$$

Análogamente se prueba

$$\lim \{\varphi_n(e, \{A_i\}_{i \in N})\}_{n \in N} = 0.$$

Supongamos, en general,

$$(\{A_i\}_{i \in N}, \{B_j\}_{j \in N}) \in C \times C.$$

Llamemos

$$A = \lim \{A_i\}_{i \in N} \quad \text{y} \quad B = \lim \{B_j\}_{j \in N}.$$

Con ello

$$\varphi_n(\{A_i\}_{i \in N}, \{B_j\}_{j \in N}) = \varphi_n(\{A_i\} - A e + A e, \{B_j\}_{j \in N} - B e + B e) =$$
$$= \varphi_n(\{A_i\} - A e, \{B_j\} - B e) + A\,\varphi_n(e, \{B_j\} - B e) +$$
$$+ B\,\varphi_n(\{A_j\} - A e, e) + A B\,\varphi_n(e, e)$$

Ahora bien, en virtud de los resultados anteriores

$$\lim \{\varphi_n(\{A_i\} - A e, \{B_j\} - B e)\}_{n \in N} = \lim \{\varphi_n(e, \{B_j\} - B e)\}_{n \in N} =$$
$$= \lim \{\varphi_n(A_i\} - A e, e)\}_{n \in N} = 0,$$

y como

$$A B\,\varphi_n(e, e) = A B \sum_{i, j \in N} \varepsilon_{ij}^n$$

que por (2) es sucesión convergente de límite $A B$, se tiene que

$$\{\varphi_n(\{A_i\}_{i \in N}, \{B_j\}_{j \in N})\}_{n \in N}$$

es convergente, con límite AB.

TEOREMA 7. — Cada sucesión de matrices complejas infinitas que verifica (1a), (2), (I), (II), (4) y (5) da lugar a un producto T en C bilineal y continuo que satisface la condición de Mertens.

TEOREMA 8. — Hay correspondencia biyectiva entre los productos bilineales y continuos en C que satisfacen la condición de MERTENS, y las sucesiones de matrices complejas infinitas que satisfacen las propiedades (2), (I), (II), (4^{x}) y (5), supuesto dotado a C de la topología ordinaria.

TEOREMA 9. — El mismo resultado puede enunciarse si se considera dotado a C de la topología de KRULL.

La demostración de los resultados anteriores consiste en resumir lemas y teoremas que les preceden.

NOTA 3. — Como se ha visto, la verificación de (1a) no ofrece dificultad ninguna en los casos de dotar al espacio S de la topología ordinaria o de la topología de Krull.

En el caso de considerar dotada a C de una topología distinta de las consideradas, la verificación de la validez de (1a) puede dar lugar a tener que manejar verdaderas series dobles complejas. No podemos pasar por alto el análisis de las condiciones que aseguran la validez de (1a) en el caso de una estructura cualquiera de espacio de tipo SP para C.

Dice (1a): «Para cada $n \in N$, la serie doble compleja

$$\sum_{i, j \in N} \varepsilon_{ij}^{n} A_i B_j$$

es convergente, cualquiera sea

$$(\{A_i\}_{i \in N}, \{B_j\}_{j \in N}) \in C \times C».$$

Una cómoda condición suficiente para que valga (1a) es que

$$\sum_{i, j \in N} |\varepsilon_{ij}^{n}| < +\infty, \quad \forall n \in N.$$

Una condición equivalente a (1 a), con la ventaja de que en ella no hace falta manejar series dobles complejas, viene dada por el

TEOREMA 10. — Condición necesaria y suficiente para que converja la serie compleja $\sum_{i,j\in N} a_{ij} A_i B_j$, cualquiera sea el par $(\{A_i\}_{i\in N}, \{B_j\}_{j\in N}) \in C \times C$, es que se verifiquen:

(a) $\sum_{i,j\in N} a_{ij}$ converge.

(b) $\sum_{i\in N} |\sum_{j\in N} a_{ij}| < +\infty$.

(c) Las filas de $(a_{ij})_{i,j\in N}$ son absolutamente convergentes.

(d) Para cada $\{x_n\}_{n\in N} \in C_0$, se tiene

$$\sum_{i\in N} |\sum_{j\in N} a_{ij} x_j| < +\infty \quad \text{y} \quad \sum_{j\in N} |\sum_{i\in N} a_{ij} x_i| < +\infty.$$

Veamos la necesidad.

(a) es inmediata.

En cuanto a (b), considerando pares del tipo $(\{a_i\}_{i\in N}, e)$ se llega a la conclusión de que $\sum_{i\in N} a_i (\sum_{i\in N} a_{ij})$ converge para cada $\{a_i\}_{i\in N} \in C_0$. Por tanto, debe ser $\sum_{i\in N} |\sum_{j\in N} a_{ij}| < +\infty$.

Si se consideran pares $(\{a_i\}_{i\in N}, \{b_j\}_{j\in N})$ de $C_0 \times C_0$ se llega a concluir la validez de (d).

La condición (c) es inmediata asimismo.

Veamos la suficiencia.

Empecemos por probar que $\sum_{i,j\in N} a_{ij} a_i b_j$ converge, para cada par $(\{a_i\}_{i\in N}, \{b_j\}_{j\in N})$ de $C_0 \times C_0$.

Definamos $F : C_0 \times C_0 \to \mathbf{C}$ mediante la fórmula

$$F(\{a_i\}_{i\in N}, \{b_j\}_{j\in N}) = \sum_{i\in N} a_i \sum_{j\in N} a_{ij} b_j,$$

$$\forall (\{a_i\}_{i\in N}, \{b_j\}_{j\in N}) \in C_0 \times C_0.$$

Esta F es claramente bilineal y continua por la izquierda. Para ver que es continua por la derecha fijemos $\{a_i\}_{i\in N} \in C_0$, y consideremos la aplicación $f : C_0 \to \mathbf{C}$ definida así

$$f(\{b_j\}_{j\in N}) = \sum_{i\in N} a_i \sum_{j\in N} a_{ij} b_j, \ \forall \{b_j\}_{j\in N} \in C_0.$$

Si para cada $n \in N$ definimos $f_n : C_0 \to \mathbf{C}$ por la fórmula

$$f_n(\{b_j\}_{j \in N}) = \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j \in N} a_{ij} b_j, \ \forall \{b_j\}_{j \in N} \in C_0$$

se tendrá evidentemente

$$\lim_{n \to \infty} f_n(\{b_j\}_{j \in N}) = f_n(\{b\}_{j \in N}),$$

y como tanto f como cada f_n son lineales, f es continua en virtud del teorema de Banach-Steinhaus, pues cada f_n es continua.

Por supuesto, al hablar de continuidad, consideramos dotado a C_0 de la topología inducida por $\mathcal{B}$. Como es sabido, C_0 es subespacio cerrado, luego completo, de C.

Es inmediato que si $\{a_i\}_{i \in N} \in C_0$, la suma de al serie $\sum_{i \in N} a_i e_i$ de elementos de C_0 es precisamente $\{a_i\}_{i \in N}$. Pues

$$\|\{a_i\}_{i \in N} - (a_0 e_0 + a_1 e_1 + \dots + a_n e_n)\| =$$
$$= \|\{0, \dots, 0, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{n+h}, \dots\}\| = \sup |a_{n+h}|$$

que tiende a cero por ser $\{a_i\}_{i \in N} \to 0$.

Luego si F es bilineal y continua, se tiene que

$$F(\{a_i\}_{i \in N}, \{b_j\})_{j \in N} = F(\sum_{i \in N} a_i e_i, \sum_{j \in N} b_j e_j) = \sum_{i,j \in N} a_i b_j F(e_i, e_j).$$

Por identificación es $F(e_i, e_j) = a_{ij}$, por lo que concluimos que $\sum_{i,j \in N} a_{ij} a_i b_j$ converge, para cada $(\{a_i\}, \{b_j\}) \in C_0 \times C_0$. Este razonamiento de identificación no valdría en C, pues $\{e_i\}_{i \in N}$ es base topológica de C_0 pero no de C.

Consideremos, finalmente, un par $(\{A_i\}_{i \in N} \{B_j\}_{j \in N}) \in C \times C$. Llamemos $A = \lim \{A_i\}_{i \in N}$ y $B = \lim \{B_j\}_{j \in N}$. Con lo cual, es

$$\{A_i\}_{i \in N} = A e + [\{A_i\}_{i \in N} - A e] = A e + \{a_i\}_{i \in N}$$
$$\{B_j\}_{j \in N} = B e + [\{B_j\}_{j \in N} - B e] = B e + \{b_j\}_{j \in N}$$

siendo

$$(\{a_i\}_{i \in N}, \{b_j\}_{j \in N}) \in C_0 \times C_0. \quad \text{Así,} \sum_{\substack{i=0,\dots,m \\ j=0,\dots,n}} a_{ij} A_i B_j =$$

$$= \sum_{id} a_{ij} a_i b_j + \sum_{id} a_{ij} A b_j +$$

$$+ \sum_{id} a_{ij} a_i B + \sum_{id} a_{ij} A B = \sum_{id} a_{ij} a_i b_j +$$

$$+ A B \sum_{id} a_{ij} + A \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{ij} b_j + B \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{ij} a_i.$$

Observemos que como $\sum_{i \in N} (\sum_{j \in N} a_{ji} b_j)$ converge, existe

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j \in N} a_{ij} b_j = \lim_{m \to \infty} \sum_{j \in N} (\sum_{i=0}^{m} a_{ij}) b_j.$$

Definamos $f_m : C_0 \to \mathbf{C}$, para cada $m \in N$, por la fórmula

$$f_m (\{b_j\})_{j \in N} = \sum_{j \in N} (\sum_{i=0}^{m} a_{ij}) b_j, \quad \forall \{b_j\}_{j \in N} \in C_0.$$

Claramente es f_m continua, para cada $m \in N$, en virtud de (c). Pero ello implica que las f_m están uniformemente acotadas en norma por cierto $M \in \mathbf{R}^+$ (Vid. referencia (3), pág. 327, teorema 3).

Con ello, $\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{ij} b_j = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j \in N} a_{ij} b_j - \sum_{i=0}^{m} \sum_{j > n} a_{ij} b_j.$

Pero $\sum_{i=0}^{m} \sum_{j > n} a_{ij} b_j = \sum_{j > n} b_j (\sum_{i=0}^{m} a_{ij}).$

Si llamamos $S_n = \{b_j\}_{j \in N} - \{b_0, ..., b_n, 0, ...\}$

queda $|\sum_{i=0}^{m} \sum_{j > n} a_{ij} b_j| = |f_m (s_n)| \leq M \, ||S_n||.$

Como $||S_n|| \to 0$, concluimos que existe

$$\lim_{(m, n) \to (\infty, \infty)} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{ij} b_j$$

y vale precisamente

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j \in N} a_{ij} b_j = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} a_{ij} b_j$$

Ya sabemos que convergen $\sum_{i,j \in N} a_{ij} a_i b_j$ y $\sum_{i,j \in N} a_{ij}$. Nos queda por probar que converge $\sum_{i,j \in N} a_{ij} a_j$, pero la demostración es totalmente análoga a la de la convergencia de $\sum_{i,j \in N} a_{ij} b_j$.

Nota 3 *bis.* — Deliberadamente hemos incluido la propiedad (b) en el enunciado anterior, si bien no interviene para nada en la demostración de la suficiencia, no tanto porque (b) sea necesaria (aunque ya se ha visto que no es independiente de las otras tres) como porque cabe preguntarse si (a), (b) y (c) no darán lugar a una condición necesaria y suficiente mínima. Y tal pregunta viene sugerida por el hecho de que la convergencia de $\sum\limits_{i,j\in N} |a_{ij}|$ es una cómoda condición que asegura

$$\sum_{i,j\in N} a_{ij} A_i B_j \quad \text{converge,} \quad \forall\ (\{A_i\}_{i\in N},\ \{B_j\}_{j\in N}) \in C \times C$$

y el «parecido» de (b) con tal condición es más que formal.

Pues bien, la respuesta es negativa, como prueba el siguiente ejemplo: Consideremos una matriz (a_{ij}) de términos

$$\begin{bmatrix}
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & - & - & - \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & - & - & - \\
0 & 0 & 1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & - & - & - \\
0 & 0 & -1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & - & - & - \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & -1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & - & - & - \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1/5 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & - & - & - \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/7 & -1/7 & 0 & 0 & - & - & - \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/7 & +1/7 & 0 & 0 & - & - & - \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & &
\end{bmatrix}$$

No es difícil comprobar la validez de (a), (b) y (c). En cambio, no vale (d), que es una condición que ya probamos debe cumplirse necesariamente. Basta tomar

$$\{b_j\}_{j\in N} = \left\{\frac{1}{2\,L\,2}, \frac{-1}{2\,L\,2}, \frac{1}{2\,L\,3}, \frac{-1}{2\,L\,3}, \frac{1}{2\,L\,5}, \frac{-1}{2\,L\,5}, \cdots\right\}$$

$$\{|\sum_{j\in N} a_{ij} b_j|\}_{i\in N} = \left\{\frac{1}{L\,2}, \frac{1}{L\,2}, \frac{1}{3\,L\,3}, \frac{1}{3\,L\,3}, \cdots\right\}$$

Y como es sabido, $\sum\limits_{i\in N} |\sum\limits_{j\in N} a_{ij} b_j|$ diverge en virtud del criterio de condensación de Cauchy para series de términos reales positivos decrecientes.

NOTA 4. — Hemos consultado copiosa bibliografía clásica para tratar de decidir si (1 a) implica que $\sum_{i \in N} |a_{ji}| < +\infty$. Pero en los tratados antiguos (Riesz, Hellinger-Toeplitz, Julia, Volterra, von Neumann, Riesz-Nagy) no se ocupan de cuestiones fuera del caso del espacio de Hilbert.

Por una parte, buscar contraejemplos choca con la dificultad de que, aunque cueste creerlo, los criterios más fuertes de los conocidos (Abel, Dedekind, Hardy & Landau ...) dan poco de sí en esta cuestión. Una lista muy completa de criterios puede verse en la referencia (4). Por otro lado, al aplicar recursos de Análisis funcional se encuentra la dificultad de que hay pocos resultados no triviales acerca de aplicaciones bilineales sobre espacios normados, o de aplicaciones lineales de un espacio normado en otro distinto. Puede mirarse cualquier tratado, como el célebre de Dunford-Schwarz, y comparar la riqueza de resultados sobre operadores, con la casi ausencia de noticias sobre cuestiones como la que nos ocupa.

En el teorema 10, en el fondo, lo que se hace es posible gracias a la isometria de $\mathcal{L}(C, C; \mathbf{C})$ con $\mathcal{L}(C, \mathcal{L}(C, \mathbf{C})) = \mathcal{L}(C, l^1)$, ya que el dual de C es l^1, como es sabido. Para tal isometría puede verse la ref. (5), pág. 26 y 27.

Queda pues sin decidir si $\sum |\varepsilon_{ij}^n| < +\infty$ es condición necesaria para la validez de (1 a). El hecho significativo de que autores modernos no presten atención a las series múltiples convergentes pero no absolutamente convergentes (Vid. p. e. referencia (6), que se ocupa de procedimientos efectivos de cálculo fundamentalmente), casi nos lleva a conjeturar la necesidad de tal condición, aparte el repaso (de que hemos hablado) de los criterios conocidos.

Desgraciadamente, una poderosa herramienta (referencia 7) no es utilizable en este caso, al no ser nucleares los espacios normados.

CAPÍTULO IV

PRODUCTO DE SUCESIONES CUASICONVERGENTES PERTENECIENTES A UN ESPACIO CON BASE TOPOLOGICA DE SCHAUDER

Sea S un subespacio vectorial de ω, tal que $S \supset \omega_c$, dotado de una estructura de e. v. t. para la que posee una base topológica $\{\varepsilon_i\}_{i \in N}$. Ello significa que, para cada elemento s de S hay una sucesión $\{a_i\}_{i \in N}$ de números complejos tal que s es la suma de la serie $\sum\limits_{i \in N} a_i \varepsilon_i$ de elementos de . Y además, tal sucesión es única.

Si se define $f_i(s) = a_i$, $\forall\, i \in N$, las aplicaciones f_i se llaman los funcionales correspondientes a la base citada. Cuando cada uno de ellos es continuo, se dice que es una base de Schauder. Tal sucederá en los casos que vamos a considerar, debido a que si un e, v, t, es metrizable y completo, cada base es necesariamente de Schauder (Vid. referencia 8).

Finalmente, supongamos dotado a S de un algoritmo lineal de convergencia regular λ. Vamos a estudiar qué condiciones generales permiten definir productos bilineales y continuos en S que cumplan la condición de Mertens.

Definiremos S^* como el conjunto

$$\left\{ \{a_i\}_{i \in N} \in \omega\,; \quad \sum_{i \in N} a_i \varepsilon_i \text{ converge en } S \right\}$$

Si se define $\chi : S \to S^*$ por la fórmula

$$\chi\left(\sum a_i \varepsilon_i\right) = \{a_i\}_{i \in N}$$

es inmediato que χ es un isomorfismo algebraico de S en S^*, dotando a éste de estructura de e. v. c. del modo natural. Trasladando la topología de S a S^* por medio de la biyección χ, S^* queda dotado de estructura de e. v. t. isomorfo algébrica y topológicamente a S. Una parte de S^* será abierta si y sólo si su imagen por χ^{-1} lo es.

Si S posee un producto bilineal, continuo y que satisfaga la condición de Mertens, es inmediato que se verifican

(A_0) : Para cada $(\{a_i\}_{i\in N}, \{b_j\}_{j\in N}) \in S^* \times S^*$ la serie doble compleja $\sum\limits_{i,j\in N} \varepsilon_{ij}^n a_i b_j$, $\forall n$, converge, siendo $\{\varepsilon_{ij}^n\}_{n\in N} = \chi(\varepsilon_i \mathsf{T} \varepsilon_j)$.

Y la sucesión $\{\sum\limits_{i,j\in N} \varepsilon_{ij}^n a_i b_j\}_{n\in N}$ pertenece a S^*.

(B_0) : $\lambda(\sum\limits_{n\in N} \varepsilon_n \sum\limits_{i,j\in N} \varepsilon_{ij}^n u_i u_j) = 1$

siendo $\{1, 1, ..., 1, ...\} = \sum\limits_{i\in N} u_i \varepsilon_j$

(C_0) : $\lambda(\sum\limits_{n\in N} \varepsilon_n \sum\limits_{i,j\in N} \varepsilon_{ij}^n a_i b_j) = \lambda(\sum\limits_{n\in N} \varepsilon_n \sum\limits_{i,j\in N} \varepsilon_{ij}^n b_i a_j) = 0$,

$\forall \{b_j\}_{j\in N} \in S^*$, siendo $\lambda(\sum\limits_{i\in N} a_i \varepsilon_i) = 0$.

(D_0): La aplicación $\varphi : S^* \times S^* \to S^*$ definida por

$\varphi(\{a_i\}_{i\in N}, \{b_j\}_{j\in N}) = \{\sum\limits_{i,j\in N} \varepsilon_{ij}^n a_i b_j\}_{n\in N}$, es continua en $(\bar{0}, \bar{0})$.

Por supuesto, $\bar{0}$ indica la sucesión nula. Y vale la fórmula

$$(\sum_{i\in N} a_i \varepsilon_i) \mathsf{T} (\sum_{j\in N} b_j \varepsilon_j) = \sum_{n\in N} \varepsilon_n \sum_{i,j\in N} \varepsilon_{ij}^n a_i b_j.$$

Recíprocamente, dada una sucesión de matrices complejas infinitas $\{M_n\}_{n\in N}$, tal que llamando $M_n = (\varepsilon_{ij}^n)_{i,j\in N}$ se verifican las propiedades que acabamos de señalar, puede definirse un producto en S bilineal y continuo que satisface la condición de Mertens, mediante la fórmula

$$(\sum_{i\in N} a_i \varepsilon_i) \mathsf{T} (\sum_{j\in N} b_j \varepsilon_j) = \chi^{-1} (\{\sum_{i,j\in N} \varepsilon_{ij}^n a_i b_j\}_{n\in N})$$

manifiestamente equivalente a la primera de esta página.

En el capítulo I tratamos un caso semejante al que ahora consideramos, muy importante por ser allí $\varepsilon_j = e_j$ y sobre todo por ser $a_i = A_i$, $\forall \{A_i\}_{i\in N} \in S$.

La demostración de los resultados enunciados es paralela a la que se dio en el primer capítulo, y la omitimos. En cambio, analizaremos qué sucede cuando λ es aplicación continua de S en $\mathbf{C}$, situación que no podía presentarse en el caso considerado en el capítulo primero, como oportunamente se probó.

TEOREMA 11. — Sea S un subespacio vectorial de ω dotado de una estructura de e. v. t. que admite una base de Schauder $\{\varepsilon_j\}_{i \in N}$. Supongamos dotado a S de un algoritmo lineal de convergencia λ continuo en S.
Sea T un producto en S, continuo y bilineal, que satisfaga la condición de Mertenns. Llamemos $l_i = \lambda(\varepsilon_i)$, y $\{\varepsilon_{ij}^n\}_{n \in N} = \chi(\varepsilon_i \mathsf{T} \varepsilon_j)$.
Tesis: Se verifican las propiedades

(A): $\forall\, (\{a_i\}_{i \in N}, \{b_j\}_{j \in N}) \in S^* \times S^*$,

$$\sum_{i,j \in N} \varepsilon_{ij}^n a_i b_j \text{ converge, } \forall\, n \in N.$$

(A bis): $\{\sum\limits_{i,j \in N} \varepsilon_{ij}^n a_i b_j\}_{n \in N} \in S^*$,

$$\forall\, (\{a_i\}_{i \in N}, \{b_j\}_{j \in N}) \in S^* \times S^*.$$

(B): $\sum\limits_{n \in N} \varepsilon_{ij}^n l_n = l_i l_j, \ \forall\, (i, j) \in N \times N.$

(C): Si definimos $\varphi : S^* \times S^* \to S^*$ por la fórmula

$$\varphi(\{a_i\}_{i \in N}, \{b_j\}_{j \in N}) = \{\sum_{i,j \in N} \varepsilon_{ij}^n a_i b_j\}_{n \in N},$$

φ es continua en $(\bar{0}, \bar{0})$, siendo $\bar{0}$ la serie nula.

En efecto, la validez de (A) y de (A bis) es evidente. En cuanto a (B), empecemos por observar que la continuidad de λ implica

$$\lambda(\sum_{i \in N} a_i \varepsilon_i) = \sum_{i \in N} \lambda(a_i \varepsilon_i) = \sum_{i \in N} a_i l_i$$

Como $\varepsilon_i \mathsf{T} \varepsilon_j = \sum\limits_{n \in N} \varepsilon_{ij}^n \varepsilon_n$, se tendrá por consiguiente

$$l_i l_j = \lambda(\varepsilon_i \mathsf{T} \varepsilon_j) = \lambda(\sum_{n \in N} \varepsilon_{ij}^n \varepsilon_n) = \sum_{n \in N} \varepsilon_j l_n$$

Simultáneamente, se ha demostrado la convergencia de tal serie y se ha calculado su suma. Finalmente, (C) es inmediata.

Conviene recalcar que en este teorema ni se ha exigido que $S \supset \omega_c$, ni que λ sea regular. También hay que hacer observar que la continuidad de T equivale a la de φ, ya que χ y χ^{-1} son continuas, en virtud de la conmutatividad de los diagramas

$$\begin{tikzcd}
S \times S \arrow[rr, "\chi \times \chi"] \arrow[d, "\mathsf{T}"'] & & S^* \times S^* \arrow[d, "\varphi"] \\
S & & S^* \arrow[ll, "\chi^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
S^* \times S^* \arrow[rr, "\chi^{-1} \times \chi^{-1}"'] \arrow[d, "\varphi"'] & & S \times S \arrow[d, "\mathsf{T}"] \\
S^* & & S \arrow[ll, "\chi"]
\end{tikzcd}$$

Utilizaremos tal hecho en demostraciones posteriores. Enunciemos un recíproco del teorema anterior.

Teorema 12. — Si S es un espacio como el individuo en el teorema anterior, y si $\{M_n\}_{n \in N}$ es una sucesión de matrices complejas infinitas tal que llamando $M_n = (\varepsilon_{ij}^n)_{i,j \in N}$ valen (A), (A bis), (B) y (C), el producto T definido por la fórmula

$$(\sum_{i \in N} a_i \, \varepsilon_i) \, \mathsf{T} \, (\sum_{j \in N} b_j \, \varepsilon_j) = \sum_{n \in N} \varepsilon_n \sum_{i,j \in N} \varepsilon_{ij}^n \, a_i \, b_j$$

es bilineal y continuo, y satisface la condición de Mertens.

En efecto, la bilinealidad no ofrece dificultad; ni tampoco la continuidad, si se observa que el producto T se ha definido de manera que conmutan los diagramas de la página 44.

Veamos que vale la condición de Mertens. Dados dos elementos de S,

$$s_1 = \sum_{i \in N} a_i \, \varepsilon_i \quad \text{y} \quad s_2 = \sum_{j \in N} b_j \, \varepsilon_j, \quad \text{será} \quad (\{a_i\}, \{b_j\}) \in S^* \times S^*.$$

Por otra parte,

$$\lambda \, (s_1 \, \mathsf{T} \, s_2) = \lambda \, (\mathsf{T} \, (s_1, s_2)) = (\lambda \, T) \, (s_1 \, \mathsf{T} \, s_2)$$

y como $\lambda \mathsf{T}$ es aplicación continua de $S \times S$ en $\mathbf{C}$, será

$$(S_1, S_2) = (\sum_{i \in N} a_i \varepsilon_i, \sum_{j \in N} b_j \varepsilon_j) = \lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} (\sum_{i=0}^{m} a_i \varepsilon_i, \sum_{j=0}^{n} b_j \varepsilon_j)$$

en virtud de la definición de topología producto. Por tanto,

$$(\lambda \mathsf{T})(s_1, s_2) = \lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} [(\lambda \mathsf{T})(\sum_{i \leq m} a_i \varepsilon_i, \sum_{j \leq n} b_j \varepsilon_j)]$$

Pero

$$(\lambda \mathsf{T})(\sum_{i \leq m} a_i \varepsilon_i, \sum_{j \leq n} b_j \varepsilon_j) = \lambda (\sum_{\substack{i=0,\ldots,m \\ j=0,\ldots,n}} a_i b_j \varepsilon_i \mathsf{T} \varepsilon_j) = \sum_{(\mathrm{id})} a_i b_j l_i l_j$$

ya que

$$\lambda (\varepsilon_i \mathsf{T} \varepsilon_j) = \lambda (\sum_{n \in N} \varepsilon_{ij}^{n} \varepsilon_n) = \sum_{n \in N} \varepsilon_{ij}^{n} l_n = l_i l_j$$

O sea,

$$(\lambda \mathsf{T})(s_1, s_2) = \lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} (\sum_{i \leq m} a_i l_i)(\sum_{j \leq n} b_j l_j) = (\sum_{i \in N} a_i l_i)(\sum_{j n N} b_j l_j) = \lambda(s_1) \cdot \lambda(s_2).$$

NOTA 5. — Siempre puede «normalizarse» la base topológica $\{\varepsilon_i\}_{i \in N}$ de manera que l_i sea igual a cero o a uno, evidentemente. En general, si se multiplica cada ε_i por un número complejo $z_i \neq 0$, también $\{z_i \varepsilon_i\}_{i \in N}$ es topológica de S.

Capítulo V

PRODUCTO DE SUCESIONES EN (C, B)

Vamos a estudiar el caso particular $S = C$, dotado C de la topología natural de la norma del supremo B, que hace de C un espacio de Banach.

Definamos

$$\varepsilon_0 = \{1,\ 1, \ldots, 1, \ldots\}$$

$$\varepsilon_1 = \{0,\ 1, \ldots, 1, \ldots\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varepsilon_i = \{\overbrace{0, \ldots,}^{i-1} 0,\ 1, \ldots, 1, \ldots\} \quad \text{(etc.)}$$

Vamos a demostrar que $\{\varepsilon_i\}_{i \in N}$ es base de Schauder de (C, B).

En efecto, si $\{A_i\}_{i \in N} \varepsilon C$, definamos $A_{-1} = 0$ y $a_i = A_i - A_{i-1}$, para cada $i \in N$. Pues bien,

$$\{A_i\}_{i \in N} = \sum_{i \in N} a_i \, \varepsilon_i$$

Calculemos

$$\begin{aligned} & a_0 \, \varepsilon_0 + a_1 \, \varepsilon_1 + \ldots + a_n \, \varepsilon_n = \\ & = \{a_0,\ a_0,\ a_0, \ldots, a_0,\ a_0, \ldots\} + \\ & + \{0,\ a_1,\ a_1, \ldots, a_1,\ a_1, \ldots\} + \\ & + \{0,\ 0,\ a_2, \ldots, a_2,\ a_2, \ldots\} + \\ & + \ldots + \{0,\ 0,\ 0,\ \ldots, a_n,\ a_n, \ldots\} = \\ & = \{A_0,\ A_1,\ A_2, \ldots, A_n,\ A_n,\ A_n, \ldots\} \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned} & \{A_i\}_{i \in N} - (a_0 \, \varepsilon_0 + a_1 \, \varepsilon_1 + \ldots + a_n \, \varepsilon_n) = \\ & = \{0,\ 0, \ldots, 0,\ A_{n+1} - A_n,\ A_{n+2} - A_n, \ldots\} \end{aligned}$$

y

$$|| \{A_i\}_{i \in N} - \sum_{i=0}^{n} a^i \, \varepsilon_i || = \sup_{h \in N} |A_{n+h} - A_n|$$

Ya que $\{A_i\}_{i\in N}$ es de Cauchy ello implica

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\,\varepsilon_i \longrightarrow \{A_i\}_{i\in N}$$

Que cada f_i es continuo es inmediato por ser

$$|f_i(\{A_n\}_{n\in N}) - f_i(\{B_n\}_{n\in N})| \leq \sup_{n\in N} |A_n - B_n| = \|\{A_n\}_{n\in N} - \{B_n\}_{n\in N}\|.$$

Por supuesto, λ es ahora el límite ordinario. Y es continuo, ya que

$$|\lambda(\{A_n\}_{n\in N}) - \lambda(\{B_n\}_{n\in N})| = |\lambda(\{A_n - B_n\}_{n\in N})| \leq$$
$$\leq \sup_{n\in N} |A_n - B_n| = \|\{A_n\}_{n\in N} - \{B_n\}_{n\in N}\|,$$

Finalmente, en este caso es

$$l_i = 1,\ \forall\, i \in N, \quad \text{y} \quad C^* = \{\{a_i\}_{i\in N} \in \omega\,;\ \sum_{i\in N} a_i \text{ converge}\}.$$

Si se define $\|\{a_i\}_{i\in N}\| = \sup_{n\in N} |\sum a_i|$, $\forall\, \{a_i\}_{i\in N} \in C^*$, χ es una isometría de C en C^*.

Teorema 13. — Sea T un producto bilineal y continuo que satisface la condición de Mertens en C, dotado de la topología $\mathcal{B}$ y del límite ordinario como algoritmo λ. Llamemos $\chi(\varepsilon_i \mathsf{T}\, \varepsilon_j) = \{\varepsilon_{ij}^n\}_{n\in N}$. Tesis: Se cumplen las propiedades

(Aa): $\sum_{i,j\in N} \varepsilon_{ij}^n\, a_i\, b_j$ converge, cualquiera sea $n \in N$, para cada $(\{a_i\}_{i\in N}, \{b_j\}_{j\in N}) \in C^* \times C^*$

(Bb): $\sum_{n\in N} \varepsilon_{ij}^n = 1$, $\forall\, (i, j) \in N \times N$.

(Cc): Existe $M \in \mathbf{R}^+$ tal que $\|\varphi_n\| \leq M$, $\forall\, n \in N$.

La aplicación φ_n se define así: llamemos

$\sigma_n(\{a_i\}_{i\in N}, \{b_j\}_{j\in N}) = \sum_{i,j\in N} \varepsilon_{ij}^n\, a_i\, b_j$

Pues bien, $\varphi(\{a_i\}_{i\in N}, \{b_j\}_{j\in N}) =$

$= \{\sigma_0(\ldots), \sigma_1(\ldots), \ldots, \sigma_n(\ldots), 0, 0, 0, \ldots\}$

Hay que hacer observar que si s_1, $s_2 \in C$, $\sigma_n(\chi(s_1), \chi(s_2)) = f_n(s_1 \mathsf{T} s_2)$.

O sea, $\sigma_n = f_n \mathsf{T} (\chi^{-1} \times \chi_{-}{}^{1})$, luego es continua. Con ello es trivial que φ_n es aplicación continua de $C^* \times C^*$ en C^*, para cada $n \in N$.

Demostremos lo enunciado. Desde luego, (Aa) y (Bb) no ofrecen la menor dificultad. Para demostrar la validez de (Cc) llamemos

$$\bar{\sigma}_n = \sigma_0 + \sigma_1 + \dots + \sigma_n, \ \forall\, n \in N.$$

Pues bien, las $|\bar{\sigma}_n|$ son funciones numéricas semicontinuas (continuas) con envolvente superior finita, ya que

$$\lim \{\bar{\sigma}(\{a_i\}, \{b_j\})\}_{n \in N} = \lambda[\chi^{-1}(\{_i a\})] \cdot \lambda[\chi^{-1}(\{b_j\})].$$

Como en el lema 6, se concluye que hay una constante $M \in \mathbf{R}^+$ tal que

$$\forall\, n \in N, \ |\bar{\sigma}_n(\{a_i\}, \{b_j\})| \leq M, \ \forall\, (\{a_i\}, \{b_j\}) \in B,$$

siendo B la bola unidad de $C^* \times C^*$.

Con ello $$\|\varphi_n\| \leq M, \ \forall\, n \in N.$$

NOTA 6. — Es obligado hacer un comentario sobre las condiciones en que puede asegurarse la validez de (Aa).

Llamemos C_0^* al conjunto

$$\{\{a_i\}_{i \in N} \in \omega\,; \ \sum_{i \in N} |a_i - a_{i+1}| < +\infty\}.$$

Vamos a demostrar que si $\{z_i\} \in \omega$ verifica que $\sum_{i \in N} z_i a_i$ es convergente para cada $\{a_i\} \in C^*$, necesariamente $\{z_i\} \in C_0^*$.

Ante todo, observemos que $\{z_i\}$ está acotada. De no ser así, puede construirse una parcial $\{z_{i_j}\}_{j \in N}$ tal que

$$|z_{i_{j+1}}| > 2\,|z_{i_j}|, \ \forall\, j \in N.$$

Vamos a definir $\{a_i\}_{i \in N}$ como una sucesión que tiene sus términos nulos, excepto los de subíndice del tipo i_j, que serán

$$a_{i_j} = |z_{i_{j-1}}|^{-1}\,|z_{i_j}|^{-1}$$

$$a_{i_j} > \frac{1}{2}\,|z_{i_j}|^{-1}$$

Como que $|a_{i_j} z_{i_j}| > \frac{1}{2}$, $\forall j \in N$, $\sum_{i \in N} a_i z_i$ no converge, a pesar de que $\{a_i\}_{i \in N} \in C^*$ manifiestamente.

En virtud de la fórmula de sumación parcial de Abel

$$\sum_{i=0}^{n} a_i z_i = A_n z_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} A_i (z_i - z_{i+1}),$$

siendo $A_i = a_0 + a_1 + \dots + a_i$, podemos decir que $\sum_{i \in N} |z_i - z_{i+1}| < < + \infty$. De no ser así, definamos

$$A_i = [1 + |z_0 - z_1| + \dots + |z_i - z_{i+1}|]^{-\frac{1}{2}} v(z_i - z_{i+1})$$

donde $$v(0) = 0, \quad v(z) = \frac{\bar{z}}{|z|} \quad \text{si} \quad z \neq 0.$$

Así, $$A_0 (z_0 - z_1) + A_1 (z_1 - z_2) + \dots + A_n (z_n - z_{n+1}) =$$

$$= \frac{|z_0 - z_1|}{\sqrt{1 + |z_0 - z_1|}} + \dots + \frac{|z_n - z_{n+1}|}{\sqrt{1 + |z_0 - z_1| + \dots + |z_n - z_{n+1}|}} \geq$$

$$\geq \frac{|z_0 - z_1| + \dots + |z_n - z_{n+1}|}{\sqrt{1 + |z_0 - z_1| + \dots + |z_n - z_{n+1}|}} \to + \infty$$

Es trivial que la condición es suficiente.

Teorema 13 bis. — Para que converja la serie doble compleja $\sum_{i,j \in N} a_{ij} a_i b_j$ cualquiera sea el par $(\{a_i\}_{i \in N}, \{b_j\}_{j \in N})$ de $C^* \times C^*$, es necesario y suficiente que $\{\sum_{j \in N} a_{ij} b_j\}_{i \in N} \in C_0^*$, para cada $\{b_j\}_{j \in N} \in C^*$, en virtud del resultado anterior.

La necesidad no ofrece dificultad. Cuando a la suficiencia, basta ver que

$$\Phi : (\{a_i\}, \{b_j\}) \longrightarrow \sum_{i \in N} a_i \sum_{j \in N} a_{ij} b_j$$

es aplicación bilineal continua de $C^* \times C^*$ en $\mathbf{C}$, lo que se deduce de la aplicación reiterada del teorema de Banach-Steinhaus; y observar que ello implica $\sum_{i \in N} a_i \sum_{j \in N} a_{ij} b_j = \sum_{i,j \in N} a_{ij} a_i b_j$.

No detallamos estas demostraciones porque son casi repetición de las que vimos en la nota 3 y resultados que siguen del capítulo III.

Al ser $\Phi : (\{a_i\}, \{b_j\}) \longrightarrow \sum_{i \in N} a_i \sum_{j \in N} a_{ij} b_j$ bilineal y continua, por ser C^* de tipo S (como es fácil ver) hay números complejos μ_{ij} tales que $\Phi(\{a_i\}, \{b_j\}) = \sum_{i,j \in N} \mu_{ij} a_i b_j$.

Por identificación, es $\mu_{ij} = a_{ij}$

y se concluye

$$\sum_{i,j \in N} a_{ij} a_i b_j \quad \text{converge}, \quad \forall (\{a_i\}, \{b_j\}) \in C^* \times C^*.$$

TEOREMA 14. — Sea $\{M_n\}_{n \in N}$ una sucesión de matrices complejas infinitas tal que si llamamos $M_n = (\overset{n}{\varepsilon}_{ij})_{i,j \in N}$ se verifican las propiedades (Aa), (Bb) y (Cc). Tesis: Si se define un producto por

$$s_1 \mathsf{T} s_2 = \sum_{n \in N} \varepsilon_n \sum_{i,j \in N} \overset{n}{\varepsilon}_{ij} a_i b_j,$$

$$\forall s_1 = \sum_{i \in N} a_i \varepsilon_i \in C \wedge \forall s_2 = \sum_{j \in N} b_j \varepsilon_j \in C,$$

T es bilineal y continuo y satisface la condición de Mertens.

En primer lugar observemos que la validez de esas tres propiedades permite introducir las aplicaciones continuas φ_n y σ_n, como se detalló en el teorema precedente.

Tenemos que probar que la definición dada corresponde a una verdadera composición interna en C. O sea, hay que probar que

$$\{\sum_{i,j \in N} \overset{n}{\varepsilon}_{ij} a_i b_j\}_{n \in N} \in C^*.$$

O lo que es lo mismo,

$$\{\sigma_n(\{a_i\}, \{b_j\})\}_{n \in N} \in C^*.$$

Pues bien, calculemos

$$\sigma_0(\{a_i\}, \{b_j\}) + \sigma_1(\{a_i\}, \{b_j\}) + \ldots + \sigma_k(\{a\}_i, \{b_j\}) =$$

$$= \sum_{n=0}^{k} \sum_{i,j \in N} \overset{n}{\varepsilon}_{ij} a_i b_j = \sum_{i,j \in N} a_i b_j \sum_{n=0}^{k} \overset{n}{\varepsilon}_{ij} = \sum_{i,j \in N}^{\nu} a_i b_j \sum_{n=0}^{k} \overset{n}{\varepsilon}_{ij} + \sum_{i=0}^{\nu} \sum_{j > \nu} a_i b_j \sum_{n=0}^{k} \overset{n}{\varepsilon}_{ij} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{\nu} \sum_{i > \nu} a_i b_j \sum_{n=0}^{k} \overset{n}{\varepsilon}_{ij} + \sum_{i,j > \nu} a_i b_j \sum_{n=0}^{k} \overset{n}{\varepsilon}_{ij}.$$

Debe observarse que estos pasos son legítimos en virtud de que

$$\sum_{i,j=0}^{\nu'} \varepsilon_{ij}^{n} a_i b_j = \sum_{i,j=0}^{\nu} \varepsilon_{ij}^{n} a_i b_j + \sum_{\nu<i\leq\nu'} \sum_{j=0}^{\nu} (\mathrm{id}) +$$

$$+ \sum_{\nu<j\leq\nu'} \sum_{i=0}^{\nu} (\mathrm{id}) + \sum_{\nu<i,j\leq\nu'} (\mathrm{id}), \quad \text{con} \quad \nu' > \nu.$$

Con ello podemos escribir

$$\delta_k = \Bigl| \sigma_0 (\{a_i\}, \{b_j\}) + \dots + \sigma_k (\{a_i\}, \{b_j\}) -$$

$$- \sum_{i,j=0}^{\nu} a_i b_j \sum_{n=0}^{k} \varepsilon_{ij}^{n} \Bigr| \leq \Bigl| \sum_{n=0}^{k} \sum_{i,j>\nu} \varepsilon_{ij}^{n} a_i b_j \Bigr| +$$

$$+ \Bigl| \sum_{n=0}^{k} \sum_{i=0}^{\nu} \sum_{j>\nu} (\mathrm{id}) \Bigr| + \Bigl| \sum_{n=0}^{k} \sum_{j=0}^{\nu} \sum_{i>\nu} (\mathrm{id}) \Bigr| \leq$$

$$\leq || \varphi_k (\{0, \dots, 0, a_{\nu+1}, \dots\}, \{0, \dots, 0, b_{\nu+1}, \dots\}) || +$$

$$+ || \varphi_k (\{a_i\}_{i \in N}, \{0, \dots, 0, b_{\nu+1} + 1, \dots\}) || +$$

$$+ || \varphi_k (\{0, \dots, 0, a_{\nu+1}, \dots\}, \{b_j\}_{j \in N} || \leq$$

$$\leq M \, || \{0, \dots, 0, a_{\nu+1}, \dots\} || \cdot || \{0, \dots, 0, b_{\nu+1}, \dots\} || +$$

$$+ M \, [|| \{a_i\} || \cdot || \{0, \dots, b_{\nu+1}, \dots\} || + || \{b_j\} || \cdot || \{0, \dots, a_{\nu+1}, \dots\} ||]$$

Dado $\varepsilon < 0$, elijamos $\nu_0 \in N$ tal que $\nu \geq \nu_0 \Rightarrow \Rightarrow \delta_k < \frac{\varepsilon}{2}$.

Es esencial el hecho de que ν_0 depende exclusivamente de ε, y no de k, para un par determinado $(\{a_i\}, \{b_j\}) \in C^* \times C^*$.

Por tanto, si $\nu \geq \nu_0$, podemos concluir

$$\sum_{i,j=0}^{\nu} a_i b_j \sum_{n \in N}^{k} \varepsilon_{ij}^{n} - \frac{\varepsilon}{2} < \sigma_0 (\{a_i\}, \{b_j\}) + \dots +$$

$$+ \sigma_k (\{a_i\}, \{b_j\}) < \sum_{i,j=0}^{\nu} a_i b_j \sum_{n=0}^{k} \varepsilon_{ij}^{n} + \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall \, k \in N.$$

Con ello, haciendo tender k a infinito queda

$$\sum_{i,j=0}^{\nu} a_i b_j \sum_{n \in N} \varepsilon_{ij}^{n} - \frac{\varepsilon}{2} = \sum_{i,j=0}^{\nu} a_i b_j - \frac{\varepsilon}{2} \leq$$

$$\leq \underline{\lim} \, [\sigma_0(\{a_i\}, \{b_j\}) + \dots + \sigma_k(\{a_i\}, \{b_j\})] \leq$$

$$\leq \overline{\lim} \, [\sigma_0(\{a_i\}, \{b_j\}) + \dots + \sigma_k(\{a_i\}, \{b_j\})] \leq$$

$$\leq \sum_{i,j=0}^{\nu} a_i b_j + \frac{\varepsilon}{2} = \sum_{i,j=0}^{\nu} a_i b_j \sum_{n \in N} \varepsilon_{ij}^n + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por tanto

$$(\sum_{i=0}^{\nu} a_i)(\sum_{j=0}^{\nu} b_j) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \underline{\lim} \, [\dots] \leq \overline{\lim} \, [\dots] \leq (\sum_{i=0}^{\nu} a_i)(\sum_{j=0}^{\nu} b_j) + \frac{\varepsilon}{2},$$

Si hacemos tender ν a infinito, queda

$$(\sum_{i \in N} a_i)(\sum_{j \in N} b_j) - \varepsilon < (\sum_{i \in N} a_i)(\sum_{j \in N} b_j) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \underline{\lim} \, [\dots] \leq \overline{\lim} \, [\dots] \leq$$

$$\leq (\sum_{i \in N} a_i)(\sum_{j \in N} b_j) + \frac{\varepsilon}{2} < (\sum_{i \in N} a_i)(\sum_{j \in N} b_j) + \varepsilon.$$

Y haciendo tender ε a cero, queda finalmente

$$(\sum_{i \in N} a_i)(\sum_{j \in N} b)_j \leq \underline{\lim} \, \{\sum_{r=0}^{k} \sigma_r(\{a_i\}, \{b_j\})\}_{k \in N} \leq$$

$$\leq \overline{\lim} \, \{\sum_{r=0}^{k} \sigma_r(\{a_i\}, \{b_j\})\}_{k \in N} \leq (\sum_{i \in N} a_i)(\sum_{j \in N} b_j).$$

O sea, simultáneamente se ha probado la convergencia de la serie $\sum_{k \in N} \sigma_k(\{a_i\}, \{b_j\})$, y se ha hallado que su suma es $(\sum_{i \in N} a_i)(\sum_{j \in N} b_j)$. Por lo tanto, podemos escribir

$$\lambda(s_1, s_2) = \lambda(\sum_{n \in N} \varepsilon_n \sigma_n(\{a_i\}, \{b_j\})) = \sum_{k \in N} \sigma_k(\{a_i\}, \{b_j\}) =$$

$$= (\sum_{i \in N} a_i)(\sum_{j \in N} b_j) = \lambda(s_1) . \lambda(s_2).$$

Queda probado, pues, que T está correctamente definido, y que satisface la condición de Mertens. La bilinealidad de T es evidente. Vamos a probar que T es continuo.

Si se define $\varphi : C^* \times C^* \to C^*$ por la fórmula

$$\varphi(\{a_i\}, \{b_j\}) = \{\sigma_n(\{a_i\}, \{b_j\})\}_{n \in N},$$

al ser $$\varphi(\{a_i\}, \{b_j\}) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(\{a_i\}, \{b_j\})$$

(lo que es evidente por ser C^* de tipo S) es φ bilineal y continua, sin más que utilizar (Cc).

En efecto, si $(\{a_i\}, \{b_j\}) \in [C^* - \{0\}] \times [C^* - \{0\}]$

se tiene $$\left\| \varphi_n\left(\frac{\{a_i\}}{\|\{a_i\}\|}, \frac{\{b_j\}}{\|\{b_j\}\|}\right)\right\| \leq M, \ \forall n \in N$$

por lo que $$\left\| \varphi\left(\frac{\{a_i\}}{\|\{a_i\}\|}, \frac{\{b_j\}}{\|\{b_j\}\|}\right)\right\| \leq M$$

O sea, $$\|\varphi(\{a_i\}, \{b_j\})\| \leq M \, \|\{a_i\}\| \cdot \|\{b_j\}\|$$

Y como que esta desigualdad vale cuando una de las dos sucesiones es nula, queda probada la continuidad de φ.

Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} C \times C \arrow[r, "\chi \times \chi"] \arrow[d, "\mathsf{T}"'] & C^* \times C^* \arrow[d, "\varphi"] \\ C & C^* \arrow[l, "\chi^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Vamos a probar que es conmutativo, para lo que hay que ver que

$$(\sum_{i \in N} a_i \varepsilon_i) \, \mathsf{T} \, (\sum_{j \in N} b_j \varepsilon_j) = \sum_{n \in N} \varepsilon_n \sum_{i,j \in N} \varepsilon_{ij}^n a_i b_j = \sum_{n \in N} \varepsilon_n \sigma_n(\{a_i\}, \{b_j\}) =$$
$$= \chi^{-1}(\{\sigma_n(\ldots)\}_{n \in N}) = \chi^{-1}[\varphi(\{a_i\}, \{b_j\})] = (\chi^{-1}\varphi)(\{a_i\}, \{b_j\}) =$$
$$= (\chi^{-1}\varphi)[(\chi \times \chi)(\sum_{i \in N} a_i \varepsilon_i, \sum_{j \in N} b_j \varepsilon_j)] = [\chi^{-1}\varphi(\chi \times \chi)](\sum_{i \in N} a_i \varepsilon_i, \sum_{j \in N} b_j \varepsilon_j).$$

Con ello, $\mathsf{T} = \chi^{-1}\varphi(\chi \times \chi)$. Por tanto, T es continuo, como φ.

Deliberadamente hemos utilizado el lenguaje de «hacer tender a», que nos ha parecido más conveniente para seguir la demostración del teorema 14 que la rigurosa expresión formal de propiedades y reglas del cálculo con límites y límites de oscilación.

Capítulo VI

PROPIEDADES ALGEBRAICAS DEL PRODUCTO

Vamos a dar condiciones que establezcan la asociatividad, conmutatividad u otras propiedades algebraicas de T. Supondremos que S es un subespacio vectorial de ω, dotado de estructura de e. v. t. que admite una base de Schauder $\{\varepsilon_i\}_{i \in N}$. Suponemos definido un producto T en S con los tres requisitos de siempre. Con ello, recordemos,

$$(\sum_{i \in N} a_i\, \varepsilon_i) \mathsf{T} (\sum_{j \in N} b_j\, \varepsilon_j) = \sum_{i, j \in N} a_i\, b_j\, \varepsilon_i \mathsf{T} \varepsilon_j.$$

Teorema 15. — T es conmutativo si y sólo si para cada $(i, j) \in N^2$ se verifica $\varepsilon_i \mathsf{T} \varepsilon_j = \varepsilon_j \mathsf{T} \varepsilon_i$.

Corolario. — T es conmutativo si y sólo si cada matriz de la sucesión correspondiente a T es simétrica. Pues recuérdese que

$$M_n = (\varepsilon_{ij}^n)_{i, j \in N} \wedge \chi\, (\varepsilon_i \mathsf{T} \varepsilon_j) = \{\varepsilon_{ij}^n\}_{n \in N}.$$

Teorema 16. — T es asociativo si y sólo si

$$(\varepsilon_i \mathsf{T} \varepsilon_j) \mathsf{T} \varepsilon_k = \varepsilon_i \mathsf{T} (\varepsilon_j \mathsf{T} \varepsilon_k), \ \forall\, (i, j, k) \in N^3.$$

En efecto, la condición es necesaria. Para ver que es suficiente, empecemos por observar que si $\{a_i\}_{i \in N} \in S^*$ se tiene

$$(\varepsilon_i \mathsf{T} \varepsilon_j) \mathsf{T} \sum_{k \in N} a_k\, \varepsilon_k = \sum_{k \in N} a_k\, (\varepsilon_i \mathsf{T} \varepsilon_j) \mathsf{T} \varepsilon_k,$$

en virtud de la bilinealidad y continuidad del producto. Pero por la misma razón, $\varepsilon_i \mathsf{T} (\varepsilon_j \mathsf{T} \sum_{k \in N} a_k\, \varepsilon_k) = \sum_{k \in N} a_k\, \varepsilon_i \mathsf{T} (\varepsilon_j \mathsf{T} \varepsilon_k)$. Así podemos decir, que para cada elemento s_3 de S se verifica

$$(\varepsilon_i \mathsf{T} \varepsilon_j) \mathsf{T} s_3 = \varepsilon_i \mathsf{T} (\varepsilon_j \mathsf{T} s_3), \ \forall\, (i, j) \in N \times N.$$

Tomemos un elemento $s_3 \in S$. Para cada $s_2 \in S$, se escribe $s_2 = \sum_{j \in N} b_j \varepsilon_j$, y se tiene $(\varepsilon_i \top \sum_{j=0}^{h} b_j \varepsilon_j \top s_3 = \sum_{j=0}^{h} b_j (\varepsilon_i \top \varepsilon_i) \top s_3 = \sum_{j=0}^{h} b_j \varepsilon_i \top (\varepsilon_j \top s_3) =$ $= \varepsilon_i \top (\sum_{j=0}^{h} b_j \varepsilon_j \top s_3)$ por lo que podemos concluir que $(\varepsilon_i \top s_2) \top s_3 =$ $= \varepsilon_i \top (s_2 \top s_3)$ por ser continuo $\top$.

Finalmente se llega a que

$$\forall \ (s_1, s_2, s_3) \in S \times S \times S \quad \text{es} \quad (s_1 \top s_2) \top s_3 = s_1 \top (s_2 \top s_3).$$

Corolario. — $\sum_{l \in N} \overset{n}{\varepsilon}_{lk} \overset{l}{\varepsilon}_{ij} = \sum_{h \in N} \overset{n}{\varepsilon}_{ih} \overset{h}{\varepsilon}_{jk}$ para cada $(i, j, k, n) \in N^4$ si $\top$ es asociativo.

En efecto, como $\chi(\varepsilon_k) = \{\delta_{hk}\}_{h \in N}$ será, ya que $\chi(\varepsilon_i \top \varepsilon_j) = \{\overset{l}{\varepsilon}_{ij}\}_{l \in N}$, $f_n[(\varepsilon_i \top \varepsilon_j) \top \varepsilon_k] = \sum_{l, h \in N} \overset{n}{\varepsilon}_{lk} \overset{l}{\varepsilon}_{ij} \delta_{hk} = \sum_{l \in N} \overset{n}{\varepsilon}_{lk} \overset{l}{\varepsilon}_{ij}$.

Análogamente se tiene $f_n[\varepsilon_i \top (\varepsilon_j \top \varepsilon_k)] = \sum_{k \in N} \overset{n}{\varepsilon}_{ih} \overset{h}{\varepsilon}_{jh}$.

Puede darse una «interpretación geométrica» de tal resultado; si llamamos «hilera (i, j)» a la sucesión $\{\overset{n}{\varepsilon}_{ij}\}_{n \in N}$, se puede enunciar: Condición necesaria y suficiente para que $\top$ sea asociativo es que para cada (i, j, k, n) perteneciente a N^4, el producto de la hilera (i, j) por la columna k-sima de M_n sea igual al producto de la fila i-sima de M_n por la hilera (k, j).

Teorema 16. — S posee elemento unidad u respecto de $\top$ si y sólo si, llamando $u = \sum_{i \in N} u_i \varepsilon_i$, se verifican

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i \in N} \overset{n}{\varepsilon}_{ih} u_i = \delta_{nh} \\ \sum_{j \in N} \overset{n}{\varepsilon}_{hj} u_j = \delta_{nh} \end{array}\right\} \ \forall \ (h, n) \in N^2$$

Basta imponer que para cada $h \in N$, $u \top \varepsilon_h = \varepsilon_h = \varepsilon_h \top u$ condición necesaria y suficiente evidente.

Corolario. — u es elemento unidad si para cada matriz M_n, el producto de la fila (columna) h-sima por $\{u_i\}_{i \in N}$ es δ_{nh}.

TEOREMA 18. — S es de Lie si:

a) Cada M_n es hemisimétrica ($\varepsilon_i \top \varepsilon_j = - \varepsilon_j \top \varepsilon_i$).

b) $\forall (i, j, k) \in N \times N \times N$, $\bar{0} =$

$= \varepsilon_i \top (\varepsilon_j \top \varepsilon_k) + \varepsilon_j \top (\varepsilon_k \top \varepsilon_i) + \varepsilon_k \top (\varepsilon_i \top \varepsilon_j)$.

Corolario. — S es de Lie si se verifican

a) Cada M_n es hemisimétrica

b) Para cada $(i, j, k) \in N^3 \wedge \forall n \in N$

$$\sum_{l \in N} (\varepsilon_{jh}^{n} \varepsilon_{ij}^{l} + \varepsilon_{li}^{n} \varepsilon_{jh}^{j} + \varepsilon_{lj}^{n} \varepsilon_{ki}^{l}) = 0.$$

NOTA 7. — Para que ε_0 sea elemento unidad es necesario y suficiente que $\varepsilon_{oh}^{n} = \varepsilon_{ho}^{n} = \delta_{nh}$, $\forall (n, h) \in N^2$.

NOTA 8. — Aunque en este trabajo nos ocupamos de unas caracterizaciones generales, no queremos dejar de señalar las dificultades prácticas que se presentan al definir productos que cumplan propiedades concretas, como la asociatividad por ejemplo. El lector acabará de convencerse, si consulta libros como (10) y (11), de la escasa información que hay sobre el tema. En el apéndice damos un ejemplo de cómo, en ciertos casos, puede dotarse de estructura de álgebra a un espacio determinado de sucesiones, o de series.

NOTA 9. — Si $\top$ dota a C de estructura de anillo normado conmutativo, con elemento unidad u, es inmediato que lim $u = 1$, y a consecuencia de ello que el conjunto de las sucesiones de límite cero es un ideal maximal. No damos la demostración, que es calcada de la usual para el caso de dotar a C del producto término a término.

Capítulo VII

PRODUCTO DE SERIES FORMALES COMPLEJAS

Sea S un subespacio vectorial de $\mathbf{C}[[X]]$. Consideremos dotado a S de una estructura de e. v. t. que admite una base de Schauder $\{X_i\}_{i \in N}$. Y sea σ un algoritmo lineal de sumación de series de S, regular o no. Esto es, σ es una aplicación lineal de S en $\mathbf{C}$. Sea i el isomorfismo canónico de $\mathbf{C}[[X]]$ en ω dado por la fórmula

$$i\,(\sum_{n \in N} a_n X^n) = \{A_n\}_{n \in N}$$

siendo $A_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$, $\forall\, n \in N$.

Si llamamos $S = i\,(S)$, resulta que la topología de S se traslada a una topología de S por medio de la biyección i, con lo que S queda dotado de una estructura de e. v. t. isomorfa a la de S, que admite la base de Schauder $\{\varepsilon_j\}_{j \in N}$, siendo $\varepsilon_j = i\,(X_j)$, $\forall\, j \in N$. Y $\lambda = \sigma\, i^{-1}$, es un algoritmo lineal de convergencia en S. Con ello, el problema de calcular un producto $\perp$ es S que sea bilineal y continuo y cumpla la condición de Mertens se reduce a calcular un producto $\perp$ en S que cumpla los tres requisitos indicados, de manera que conmute el diagrama

$$\begin{tikzcd}
S \times S \arrow[r, "i \times i"] \arrow[d, "\perp"'] & S \times S \arrow[d, "\top"] \\
S \arrow[r, "i^{-1}"] & S
\end{tikzcd}$$

Pues evidentemente, si existe un tal producto $\top$ en S, y se define $\perp$ en S de manera que sea conmutativo el diagrama anterior, si $\top$ cumple las tres condiciones:..., también las cumple $\perp$, ya que tanto i como i^{-1} son continuas.

Y dado un producto $\perp$ en S que cumpla las tres condiciones citadas, el producto $\top$ en S definido mediante el diagrama

$$\begin{array}{ccc} S \times S & \xleftarrow{\quad i^{-1} \times i^{-1} \quad} & S \times S \\ \perp \big\downarrow & & \big\downarrow \top \\ S & \xrightarrow[\quad i \quad]{} & S \end{array}$$

también cumple esas tres propiedades.

Naturalmente, la condición de Mertens para $\perp$ y para σ significa

$$\sigma\,[(\sum_{n\in N} a_n X^n) \perp (\sum_{n\in N} b_n X^n)] = \sigma\,(\sum_{n\in N} a_n X^n)\cdot\sigma\,(\sum_{n\in N} b_n X^n).$$

No vamos a trasladar todos los resultados anteriores a un «lenguaje de series», pero sí daremos un teorema (pura traslación, ya queda dicho) en atención a un importante ejemplo que sigue.

Teorema 19. — Sea $C = i^{-1}(C)$. Definimos una norma en C por la fórmula

$$\|\sum_{n\in N} a_n X^n\| = \sup_{n\in N} |a_0 + a_1 + \dots + a_n|.$$

De esta manera, C deviene espacio de Banach. Sea $\perp$ un producto bilineal y continuo en C que satisface la condición de Mertens, siendo por supuesto $\sigma\,(\sum_{n\in N} a_n X^n) = \sum_{n\in N} a_n$.

Es inmediato que $\{X^n\}_{n\in N}$ es base de Schauder de C.

Tesis: 1) $\forall\,(\sum_{m\in N} a_m X^m, \sum_{n\in N} b_n X^n) \in C \times C$, $\sum_{m,n} \varepsilon_{mn}^{k}\, a_m\, b_n$

converge, si llamamos

$$X^m \perp X^n = \sum_{k\in N} \varepsilon_{mn}^{k} X^k.$$

2) Para cada $m, n \in N \times N$, $\sum_{k\in N} \varepsilon_{mn}^{k} = 1$.

3) Si se define $\varphi_k (\sum_{m \in N} a_m X^m, \sum_{n \in N} b_n X^n) =$

$= \sum_{j=0} X^j \sum_{m, n \in N} \varepsilon^j_{mn} a_m b_n$

(que cada φ_k es continua es inmediato por 1) y 2))

existe $M \in \mathbf{R}^+$ tal que $\|\varphi_k\| \leq M, \ \forall\ k \in N$.

Igualmente puede darse un teorema recíproco.

Ejemplo. — Como es sabido, el producto de Cauchy no es una operación cerrada en C. Vamos a dar una demostración de tal hecho probando que, si se construyen formalmente las aplicaciones φ_k de que hemos hablado, no se cumple la condición necesaria 3) anterior.

Ahora es $X^m \perp X^n = W^{m+n}$, por lo que $\varepsilon^k_{mn} = \delta_{k, m+n}$. Con ello podemos escribir

$$\varphi_k (\sum_{m \in N} a_m X^m, \sum_{n \in m} b_n X^n) = \sum_{j=0} X^j \sum_{m+n=j} a_m b_n = \sum_{j=0} (a_0 b_j + \dots + a_j b_0) X^j.$$

Sabemos que $\|\varphi_k\| = \sup_{\substack{\|\Sigma a_n X^n\| \leq 1 \\ \|\Sigma b_n X^n\| \leq 1}} [\sup_{j \leq k} |A_0 b_j + \dots + A_j b_0|]$.

Pues bien, probemos que $\|\varphi_{2k}\| \geq 4k + 1, \ \forall\ k \in N$.

En efecto, consideremos $\sum_{n \in N} a_n X^n = \sum_{n \in N} b_n X^n = 1 - 2X + 2X^2 + 2X^3 - 2X^4 \pm \dots - 2X^{2k-1} + 2X^{2k}$.

Con ello, $A_0 = 1,\ A_1 = -1,\ A_2 = 1, \dots, A_{2k} = 1$.

por lo que $\|\Sigma a_n X^n\| = \|\Sigma b_n X^n\| = 1$.

Pero $A_{2k} b_0 + A_{2k-1} b_1 + \dots + A_0 b_{2k} = 4k + 1$.

Y por tanto $\|\varphi_k\| \geq 4k + 1, \ \forall\ k \in N$.

APÉNDICE

ALGORITMOS DE TOEPLITZ

Sea T una matriz compleja infinita (a_{ij}) tal que se verifica:

1) $\forall j \in N$, $\lim \{a_{ij}\}_{i \in N} = 0$.

2) $\forall i \in N$, $\sum_{j \in N} |a_{ij}| < M$, $M \in \mathbf{R}^+$

3) $\lim \{\alpha_i\}_{i \in N} = 1$, siendo $\alpha_i = \sum_{j \in N} a_{ij}$.

Como es sabido, el conjunto de las sucesiones complejas $\{x_j\}$ tales que converge $\{\sum a_{ij} x_j\}_{i \in N}$, es un subespacio vectorial de ω que se representa por $S(\mathsf{T})$, tal que $S(\mathsf{T}) \supset C$.

Si se define $\lambda(\{x_i\}) = \lim \{\sum_{j \in N} a_{ij} x_j\}_{i \in N}$, λ es un algoritmo lineal de convergencia regular. Pues bien, $S(\mathsf{T})$ puede dotarse de una estructura de e. v. t. localmente convexo tomando como seminormas

$$p_n(x) = x_n, \ \forall x = \{x_i\}_{i \in N} \in S(\mathsf{T}) \wedge \forall n \in N.$$

$$q_m(x) = \sup_{n \in N} \left|\sum_{l=0}^{k} a_{ml} x_l\right|, \ \forall m \in N.$$

Tal estructura puede verse detallada en la ref. (9), págs. 230 y 231.

Una nueva estructura puede darse a $S(\mathsf{T})$ si además de las seminormas anteriores se considera la seminorma

$$p : \{x_i\}_{i \in N} \longrightarrow \sup_{m \in N} \left|\sum_{n \in N} a_{mn} x_n\right|$$

Ahora, $S(\mathsf{T})$ tiene estructura de espacio de Fréchet, de tipo P, y con λ continuo. Por tanto, no puede ser de tipo S.

Para la primera estructura, λ no tiene por qué ser continuo. Veamos de encontrar base topológica para $S(\mathsf{T})$.

TEOREMA 20. — $\{e_i\}_{i \in N}$ constituye una base topológica de $S(\mathsf{T})$, para la primera estructura, si se satisface alguna de las condiciones que siguen (que no son necesarias):

1) T es triangular (o sea, $a_{mn} = 0$ si $n > m$).

2) Cada sucesión de $S(\mathsf{T})$ está acotada.

En efecto, veamos que para cada seminorma p_n y q_m es

$$p_n\left(\sum_{i=0}^{k} x_i e_i - \{x_i\}_{i\in N}\right) \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad k \to +\infty$$

$$q_m\left(\sum_{i=0}^{k} x_i e_i - \{x_i\}_{i\in N}\right) \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad k \to +\infty.$$

Pero $p_n\left(\sum_{i=0}^{k} x_i e_i - \{x_i\}_{i\in N}\right) = p_n(\{0, \ldots, 0, x_{k+1}, x_{k+2} \ldots\}) = 0$ si $k > n$.

Y $$q_m(\{0, \ldots, 0, x_{k+1}, x_{k+2} \ldots\}) = \sup_{n\in N} \left|\sum_{l=k+1}^{n} a_{ml} x_l\right|.$$

Si T es triangular, tomando $k \geq m$ se tiene

$$q_m(\{0, \ldots, 0, x_{k+1}, x_{k+2} \ldots\}) = 0.$$

Y si $\{x_l\}_{l\in N}$ está acotada por cierto $K \in \mathbf{R}^+$, es

$$q_m(\{0, \ldots, 0, x_{k+1}, x_{k+2} \ldots\}) \leq K \sup_{n\in N} \sum_{l=k+1} |a_{ml}| \leq K \sum_{l\geq k+1} |a_{ml}|$$

Pero como la fila m-sima es absolutamente convergente, el criterio de Cauchy establece que

$$q_m\left(\sum_{i=0} x_i e_i - \{x_i\}_{i\in N}\right) \longrightarrow 0, \quad \text{si} \quad k \to \infty.$$

NOTA 10. — Si λ es continuo, como $S(\mathsf{T})$ no puede ser de tipo S, seguro que $\{e_i\}_{i\in N}$ no es base topológica de $S(\mathsf{T})$.

TEOREMA 21. — Análogamente se prueba que $\{\varepsilon_i\}_{i\in N}$ es base topológica de $S(\mathsf{T})$ si vale una de las dos condiciones citadas.

Como se ve, según sea cada algoritmo particular hay notables ventajas a la hora de analizar las condiciones generales que caracterizan los productos de sucesiones. Pero no pueden darse resultados tan generales como los que vimos para sucesiones convergentes.

Vamos a dar algunos resultados relativos a las series sumables Césaro.

Sea M el conjunto de las series formales complejas $\sum_{n \in N} a_n X^n$ tales que $\sum_{n \in N} a_n$ es sumable Césaro de orden k, para algún k real, con $k > -1$. Brevemente, se dice que $\sum_{n \in N} a_n$ es (C, k)-sumable. Como es sabido (Vid. p. e. ref. 11, págs. 228-229) si $\sum_{n \in N} a_n$ es sumable (C, r) y si $\sum_{n \in N} b_n$ es sumable (C, s), su producto de Cauchy es sumable $(C, r + s + 1)$. Con ello, M resulta ser álgebra asociativa, unitaria y conmutativa para el producto citado.

En cambio, el conjunto de las seis sumables para un k determinado, no es estable respecto del producto de Cauchy.

Es sabido que cualquier elemento de M tiene radio de convergencia unidad (Vid. ref. 10, págs. 54 y 55). Por tanto, para cada

$$\sum_{n \in N} a_n X^n \in M, \quad \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 1, \quad \text{y por ello}$$

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n!}} = \overline{\lim} \left[\sqrt[n]{|a_n|} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \right] = 0.$$

Es decir, $\sum_{n \in N} \frac{|a_n|}{n!} < + \infty$.

Llamemos $F = \left\{ \sum_{n \in N} a_n X^n ; \sum_{n \in N} \frac{|a_n|}{n!} < + \infty \right\}$.

Vamos a demostrar que F es un álgebra de Banach local, tomando como producto en F el de convolución (o de Cauchy), y como norma

$$\left\| \sum_{n \in N} a_n X^n \right\| = \sum_{n \in N} \frac{|a_n|}{n!}, \quad \forall \sum_{n \in N} a_n X^n \in F.$$

Es fácil comprobar que F es álgebra asociativa, conmutativa y unitaria; y también que la aplicación definida es ciertamente una norma.

Si $(\sum_{n \in N} a_n X^n, \sum_{n \in N} b_n X^n) \in F \times F$ llamemos $\sum_{n \in N} c_n X^n$ a su producto de Cauchy. Se verifica

$$\frac{|c_n|}{n!} \leq \frac{|a_0| |b_n|}{n!} + \dots + \frac{|a_i| |b_{n-i}|}{n!} + \dots + \frac{|a_n| \cdot |b_0|}{n!} \leq$$

$$\leq \frac{|a_0|}{0!} \frac{|b_n|}{n!} + \dots + \frac{|a_i|}{i!} \frac{|b_{n-i}|}{(n-i)!} + \dots + \frac{|a_n|}{n!} \frac{|b_0|}{0!}.$$

Como $\sum_{n \in N} \frac{|c_n|}{n!}$ es minorante de la serie producto de Cauchy de $\sum_{n \in N} \frac{|a_n|}{n!}$ y $\sum_{n \in N} \frac{|b_n|}{n!}$, resulta de una parte que el producto definido es como se ha dicho composición interna de F. Y la misma desigualdad prueba

$$\sum_{n \in N} \frac{|c_n|}{n!} \leq \left(\sum_{n \in N} \frac{|a_n|}{n!} \right) \left(\sum_{n \in N} \frac{|b_n|}{n!} \right)$$

O sea, $\qquad \|(\sum_{n \in N} a_n X^n) (\sum_{n \in N} b_n X^n)\| \leq \|\sum_{n \in N} a_n X^n\| \cdot \|\sum_{n \in N} b_n X^n\|.$

En virtud de esa desigualdad concluimos que F es álgebra normada. Veamos que F es completo. Sea $\{S_i\}_{i \in N}$ una sucesión de elementos de F. Pongamos $S_i = \sum_{n \in N} a_n^i X^n$, $\forall\, i \in N$.

Si $\{S_i\}$ es de Cauchy, veamos que converge hacia cierto $S \in F$. Dado $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$, existe $i_0 \in N$ tal que $i \geq i_0$ implica

$$\sum_{n \in N} \frac{|a_n^{i+h} - a_n^i|}{n!} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall\, h \in N.$$

Ello nos asegura que, para cada $n \in N$, la sucesión $\{a_n^i\}_{i \in N}$ es convergente, ya que es sucesión de Cauchy de números complejos. Sea a_n su límite. Ahora bien, para cada $k \in N$, se tiene

$$\sum_{n=0}^{k} \frac{|a_n^{i+h} - a_n^i|}{n!} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall\, i \geq i_0 \wedge \forall\, h \in N.$$

Por tanto, si hacemos tender h a $+\infty$, se tiene

$$\sum_{n=0}^{k} \frac{|a_n - a_n^i|}{n!} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall\, i \geq i_0 \wedge \forall\, k \in N.$$

Con lo que $\qquad \sum_{n \in N} \frac{|a_n - a_n^i|}{n!} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall\, i \geq i_0.$

O sea, como $\sum_{n \in N} (a_n - a_n^{i_0}) X^n \in F$, resulta que $\sum_{n \in N} a_n X^n$

pertenece a F, y el resultado anterior puede simplificarse escribiendo

$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, i_0 \in N, \quad$ tal que $\quad i \geq i_0 \Rightarrow \|\sum_{n \in N} a_n X^n - \sum_{n \in N} a_n^i X^n\| < \varepsilon.$

Brevemente,

$$\lim \{\sum_{n \in N} a_n X^n\}_{i \in N} = \sum_{n \in N} a_n X^n.$$

Veamos que F es local. Así lo afirma Gelfand para un tipo de álgebras de Banach que incluye la que se considera, pero ni da la demostración ni dice dónde hallarla. Por ello la incluiremos. Por otra parte, el álgebra que nos ocupa es caso límite de los que Gelfand cita (Vid. ref. 12, págs. 108-110).

Si es M_0 el conjunto de las sucesiones de F con $a_0 = 0$, es inmediato que M_0 es un ideal maximal de F. Sea M un ideal maximal cualquiera.

Calculemos $(\sum_{n \in N} a_n X^n)(M)$. Como $\{X^n\}_{n \in N}$ es base topológica de F según es inmediato comprobar, resulta que

$$(\sum_{n \in N} a_n X^n)(M) = a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n [X(M)]^n.$$

Pero como $\quad |X(M)|^n = |X^n(M)| \leq ||X^n|| = \dfrac{1}{n!}$

es $\quad |X(M)| \leq \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$. O sea, $X(M) = 0$. Y por tanto

$$(\sum_{n \in N} a_n X^n)(M) = a_0.$$

Recordando $\quad \sum_{n \in N} a_n X^n \in M \Longleftrightarrow (\sum_{n \in N} a_n X_u)(M) = 0$

resulta que $M = M_0$. Por tanto F es local. Es trivial que las series finitas son densas en F, por lo que C, y $\mathcal{M}$ por tanto, son densas en F. El álgebra $\mathcal{M}$ queda así con una estructura topológica inducida por la de F. $\mathcal{M}$ es, naturalmente, álgebra normada.

La dificultad de introducir una norma en $\mathcal{M}$ para la que $\mathcal{M}$ resulte completo creemos que es debida a la dificultad de dar condiciones suficientes no triviales (es decir, no simples cambios de nomenclatura en la definición, como a veces se ve) para la sumabilidad Césaro de una serie compleja. Los tratados citados en la Bibliografía de Hardy y de Rey Pastor son buen testimonio de lo que decimos.

BIBLIOGRAFIA

(1) KOETHE: *Topological vector spaces I*. Springer-Verlag, Berlín, 1969.

(2) BOURBAKI: *Topologie géneral, caps I y II*. Hermann, París, 1965.

(3) ZAMANSKY: *Introducción al Algebra y Análisis modernos*. Montaner y Simón S.A., Barcelona, 1967.

(4) BROMWICH: *Infinite series*. Mc. Millan, Londres, 1965.

(5) CARTAN: *Calcul différentiel*. Hermann, París, 1967.

(6) SCHWARZ: *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*. Hermann, París, 1965.

(7) GROTHENDIECK: *Produits tensoriels topologiques et spaces nucleaires*. Mem. Math. Amer. Soc. 16 (1955).

(8) ARSOVE: *The Paley-Wiener theorem in metric linear spaces*. Pac. Jour. of Math. 10 (1960). Págs. 365-379.

(9) GOFFMANN & PEDRICK: *First course in Functional Analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs (New Jersey), 1965.

(10) REY PASTOR: *Teoría de los algoritmos lineales de convergencia y sumación*. Buenos Aires, Imprenta de la Universidad, 1931.

(11) HARDY: *Divergent series*. Oxford at the Clarendon Press, 1963.

(12) GELFAND: *Les anneaux normés commutatifs*. Gautiers-Villars, París, 1964.

Además de las obras anteriores, y de las de los autores mencionados en la Nota 4, hemos consultado los artículos citados por KOETHE en (1), página 423, sobre recientes investigaciones en espacios de sucesiones, donde no hemos visto tratada la cuestión que nos ha llevado a escribir esta Memoria. A tal obra remitimos al lector para no alargar innecesariamente esta lista de obras, que no se ocupan de la caracterización de los productos estudiada.