

L'UNIVERSO DI DE SITTER-CASTELNUOVO E LA TERMOIDRODINAMICA

per

GIUSEPPE ARCIDIACONO (a Roma)

1. INTRODUZIONE

In questi ultimi anni, lo studio dell'Universo di De Sitter, fatto dal punto di vista della teoria dei gruppi, ha acquistato particolare importanza ed attualità, e si è visto che per tale via si può ottenere una teoria che generalizza nel modo più semplice la relatività ristretta di Einstein [1].

Ma questo studio è stato fatto in modo incompleto, in quanto non si è cercato prima di comprendere il significato fisico e le conseguenze che derivano dal nuovo gruppo. In una serie di precedenti lavori, pubblicati su questa stessa rivista [2], ho fatto vedere che nello studio dell'Universo di De Sitter occorre distinguere lo spazio-tempo «assoluto» V_4 a curvatura costante, sede effettiva dei fenomeni fisici, dagli infiniti spazi-tempi «relativi» A_4 (spazi tangenti) nei quali ogni osservatore localizza e vede svolgersi i fenomeni. Ne segue una semplice interpretazione fisica della «relatività proiettiva», e le trasformazioni finite del gruppo di Fantappié acquistano una forma assai simile alle trasformazioni del gruppo di Poincaré.

Otteniamo allora una nuova teoria cosmologica, capace di superare il dilemma tra teorie «evoluzionarie» e teorie «stazionarie», e nella quale l'elettromagnetismo e la idrodinamica ci appaiono come casi-limiti di una sola teoria più generale, e cioè la «magnetoidrodinamica proiettiva».

Se introduciamo il vettore posizione x_A ($A = 1 \dots 5$) ed il vettore velocità proiettiva u_A (per semplicità non scriveremo le sbarrette sopra tali vettori), tali che

(1,1)

$$x_A x_A = r^2; \quad u_A u_A = -c^2; \quad x_A u_A = 0$$

a partire dal campo magnetoidrodinamico H_{AB} e dal suo duale H_{ABC}^* , si possono costruire altri tre vettori, e cioè il *campo idrodinamico* c_A , il *campo magnetico* h_A ed il *campo elettrico* e_A , nel seguente modo

$$(1,2) \quad {}_r c_A = x_B H_{AB}; \quad {}_c h_A = u_B H_{AB}; \quad {}_r c e_A = x_B u_C H_{ABC}^*$$

abbiamo così 5 vettori (x_A, u_A, c_A, h_A, e_A) i quali, oltre alle (1), soddisfano alle seguenti identità

$$(1,3) \quad c_A x_A = 0; \quad h_A u_A = 0; \quad e_A x_A = e_A u_A = 0$$

Si possono poi introdurre il *tensore elettromagnetico* f_{AB} ed il *tensore elettroidrodinamico*, così definiti

$$(1,4) \quad {}_r f_{AB} = x_C H_{ABC}^*; \quad {}_c e_{AB} = u_C H_{ABC}^*$$

ed allora il campo magnetoidrodinamico si può decomporre in due modi diversi

$$(1,5) \quad \left\{ \begin{array}{l} {}_r H_{AB} = c_A x_B - c_B x_A + \varepsilon_{ABCDE} x_C f_{DE} \\ -{}_c H_{AB} = h_A u_B - h_B u_A + \varepsilon_{ABCDE} u_C e_{DE} \end{array} \right.$$

L'indice f del fluido magnetoidrodinamico è il seguente

$$(1,6) \quad {}_r c^2 f = x_A u_B H_{AB} = c x_A h_A = -{}_r u_B c_B$$

Dalle (5) segue che il campo idrodinamico ed il campo magnetico sono dati da

$$(1,7) \quad \boxed{c_A = f u_A + q_A / f c^2; \quad {}_r h_A = c f x_A + y_A}$$

con $q_A x_A = q_A u_A = 0; \quad y_A x_A = y_A u_A = 0$.

Dalla prima formula si deduce che *nel caso più generale, il campo idrodinamico non è parallelo alla velocità del fluido*, ed allora il vettore q_A può essere interpretato come «vettore termico». Otteniamo così nel modo più semplice e naturale una «termoidrodinamica relativistica» che completa e perfeziona le precedenti teorie di Eckart, Beu-regard, Pham-Mau-Quan, Lichnerowicz ed altri.

In questo lavoro, dopo una breve esposizione della idrodinamica relativistica, esamineremo alcune più recenti ricerche sui fluidi ter-

modinamici relativistici. Tali teorie verranno esposte con un simbolismo unico ed opportunamente modificate, in modo da mettere in evidenza che esse non sono altro che casi particolari di una teoria più generale, e cioè la termodinamica proiettiva, invariante per il gruppo di Fantappié.

2. LA IDRODINAMICA RELATIVISTICA

Prima di esaminare le varie teorie dei fluidi con scambi di calore, è opportuno riassumere la idrodinamica relativistica, che esporremo in una nuova forma, in modo da metterne in evidenza il legame con la teoria elettromagnetica di Maxwell-Minkowski.

A tale scopo introduciamo i due vettori «corrente idrodinamica» C_i e G_i ($i = 1 \dots 4$), definiti a partire dal vettore velocità u_i del fluido

$$(2,1) \quad C_i = f u_i; \quad G_i = g u_i$$

I due scalari f e g sono gli «indici» del fluido (3), e soddisfano alla condizione

$$(2,2) \quad f \cdot g = \mu + p/c^2 = \mu'$$

Le equazioni del campo idrodinamico sono le seguenti

$$(2,3) \quad \boxed{\partial_i G_i = \sigma; \quad \partial_k C_i - \partial_i C_k = \Omega_{ik}}$$

dove lo scalare σ è la «sorgente» del campo, ed il tensore Ω_{ik} rappresenta il «vortice». Fatta questa premessa, l'equazione dinamica

$$(2,4) \quad f_i = \partial_k T_{ik} = \partial_k (\mu' u_i u_k + p \delta_{ik})$$

si può sviluppare nel seguente modo

$$\begin{aligned} f_i &= \partial_i p + \partial_k (C_i G_k) = \partial_i p + C_i \partial_k G_k + G_k \partial_k C_i = \\ &= \partial_i p + \sigma C_i + G_k \partial_k C_i - G_k \partial_i C_k + G_k \partial_i C_k = \\ &= \partial_i p + \sigma C_i + G_k \Omega_{ik} + G_k \partial_i C_k \end{aligned}$$

Essa assume una forma assai semplice

$$(2,5) \quad \boxed{f_i = \Omega_{ik} G_k + \sigma C_i}$$

se imponiamo la condizione di Synge

$$(2,6) \quad \partial_i p + G_k \partial_i C_k = 0$$

Moltiplicando i due membri per u_i avremo

$$(2,7) \quad d p + G_k d C_k = 0$$

da cui, ricordando che $u_i d u_i = 0$, segue che

$$d p + g u_k (f u_k + u_k d f) = d p - c^2 g d f = 0$$

ed infine si avrà

$$(2,8) \quad d p = \mu' c^2 d \log f$$

Tenendo presente la (2) ed integrando, otteniamo i due indici del fluido, espressi in funzione delle due variabili p e μ :

$$(2,9) \quad f = \exp \int_{p_0}^p \frac{d p}{\mu c^2 + p}; \quad g = \exp \int_{p_0}^p \frac{d \mu}{\mu + p/c^2}$$

Una volta data l'equazione di stato, che per i fluidi isotermi é del tipo $\mu = \mu(p)$, é possibile calcolare gli indici del fluido.

E' noto che nella teoria elettromagnetica, a partire dai due tensori H_{ik} (campo elettromagnetico) e B_{ik} (induzione), si può costruire il tensore energetico di Maxwell-Minkowski

$$(2,10) \quad \boxed{M_{ik} = H_{is} B_{sk} + \frac{1}{4} H_{rs} B_{rs} \delta_{ik}}$$

Si dimostra allora che l'equazione dinamica é la seguente

$$(2,11) \quad f_i = \partial_k M_{ik} + \frac{1}{4} (B_{rs} \partial_i H_{rs} - H_{rs} \partial_i B_{rs})$$

Vogliamo far vedere che *anche nel caso del campo idrodinamico, il tensore energetico e l'equazione dinamica possono essere scritte in funzione dei due vettori C_i e G_i* , ed assumono una forma assai simile alle (10) ed (11).

Si ha infatti

$$\begin{aligned} f_i &= \sigma C_i + \Omega_{ik} G_k = C_i \partial_k G_k + (\partial_k C_i - \partial_i C_k) G_k = \\ &= C_i \partial_k G_k + G_k \partial_k C_i - G_k \partial_i C_k, \end{aligned}$$

raggruppiamo i primi due termini e scomponiamo in due parti il terzo

$$\begin{aligned} f_i &= \partial_k (C_i G_k) - \frac{1}{2} G_k \partial_i C_k - \frac{1}{2} G_k \partial_i C_k = \\ &= \partial_k (C_i G_k) - \frac{1}{2} \partial_i (C_k G_k) + \frac{1}{2} C_k \partial_i G_k - \frac{1}{2} G_k \partial_i C_k \end{aligned}$$

Se allora introduciamo il tensore energetico

$$(2,12) \quad \boxed{T_{ik} = C_i G_k - \frac{1}{2} C_s G_s \delta_{ik}}$$

l'equazione del moto si scrive così

$$(2,13) \quad f_i = \partial_k T_{ik} - \frac{1}{2} (G_k \partial_i C_k - C_k \partial_i G_k)$$

e tali equazioni (12) e (13) risultano analoghe a quelle del campo elettromagnetico.

3. LA TEORIA DEI FLUIDI PERFETTI INCOMPRESSIBILI

Diremo che un fluido perfetto è incompressibile, se $f = g$, cioè

$$(3,1) \quad C_i = G_i = f u_i$$

Ne segue dalla (2,2) che

$$(3,2) \quad f = g = \sqrt{\mu + p/c^2}$$

La condizione (2,6) di Synge si riduce alla

$$(3,3) \quad d(p + C_k C_k/2) = 0$$

e scegliendo il valore zero per la costante arbitraria, otteniamo l'equazione di stato del fluido perfetto incompressibile

$$(3,4) \quad \boxed{\mu c^2 = p}$$

In conseguenza, l'indice del fluido diventa

$$(3,5) \quad f = \sqrt{2p/c^2}$$

e l'equazione dinamica (2,13) si riduce alla

$$(3,6) \quad f_i = \partial_k T_{ik} = \partial_k \left(f^2 u_i u_k + \frac{1}{2} f^2 c^2 \delta_{ik} \right)$$

Se ci poniamo nel caso in cui $f_i = 0$, avremo

$$f^2 u_k \partial_k u_i + f^2 u_i \partial_k u_k + u_k u_i \partial_k f^2 + \frac{1}{2} c^2 \partial_i f^2 = 0$$

da cui, ponendo $a_i = du_i/d\tau$, $\overset{\circ}{f} = df/d\tau$, si ha l'equazione del moto

$$(3,7) \quad f^2 a_i + f^2 u_i \partial_k u_k + 2f\overset{\circ}{f}u_i + c^2 f \partial_i f = 0$$

Moltiplicando i due membri per u_i si ha l'equazione di continuità

$$(3,8) \quad f(f \partial_k u_k + \overset{\circ}{f}) = 0$$

che si può scrivere così

$$(3,9) \quad \boxed{f \partial_i (f u_i) = f \partial_i C_i = 0}$$

e per $f \neq 0$ si riduce alla condizione di incompressibilità $\text{Div } C_i = 0$, secondo il Lichnerowicz.

La (7), tenendo conto della (8) diventa

$$(3,10) \quad f a_i + \overset{\circ}{f} u_i + c^2 \hat{c}_i f = 0$$

ed introducendo il tensore di proiezione di Eckart

$$(3,11) \quad \eta_{ik} = \delta_{ik} + u_i u_k / c^2$$

si può scrivere nel seguente modo

$$(3,12) \quad \boxed{\eta_{ik} (c^2 \partial_k f + f a_k) = 0}$$

Nel caso dei fluidi incompressibili ($\sigma = 0$), l'equazione (2,7) del moto si riduce alla

$$(3,13) \quad C_i \Omega_{ik} = 0$$

e ci dice che *il tensore vorticoso risulta ortogonale al vettore corrente idrodinamica.*

Se poi teniamo conto che $C_i = f u_i$, se ne deduce che l'equazione di continuità

$$(3,14) \quad u_k C_i \Omega_{ik} = f u_i u_k \Omega_{ik} \equiv 0$$

risulta identicamente soddisfatta.

4. EQUAZIONE DI STATO ED INDICE DEL FLUIDO

Nel caso più generale in cui $C_i \neq G_i$, per calcolare l'indice f del fluido (e quindi anche g), occorre conoscere l'equazione di stato, che nel caso dei fluidi isotermi, risulta del tipo

$$(4,1) \quad \mu = \mu(p)$$

Utilizzando la prima delle (2,11) otteniamo i seguenti valori dell'indice f , in corrispondenza alle varie equazioni di stato del fluido

Equazione di stato del fluido	p_0	Indice f del fluido
$\mu = \mu_0 = \text{cost}$	0	$1 + p/\mu_0 c^2$
$\mu c^2 = (n - 1) p$	1	$\sqrt[n]{p}$
$\mu c^2 = m + (n - 1) p$	1	$\sqrt[n]{(m + n p)/(m + n)}$
$\mu c^2 = m p^{n-1}$	1	$\sqrt[n]{(m + 1)/(m + p^{-n})}$

A partire dall'indice f del fluido, si può calcolare l'indice g , in base alla (2,2), cioè

$$(4,2) \quad g = (\mu c^2 + p)/f c^2$$

Così per esempio, l'indice $f = 1 + p/\mu_0 c^2$, in prima approssimazione ha il valore 1, e da esso si deduce che $g = \mu_0$.

Viceversa, se noi conosciamo l'indice f del fluido, espresso in funzione della pressione p , partendo dalla (2,10), otteniamo la seguente equazione di stato

$$(4,3) \quad \mu c^2 = f : (df/dp) - p$$

da cui si ha la seguente tabella

Indice f del fluido	Equazione di stato
$k + m p$	$\mu = \text{cost}$
$(k + m p)^n$	$\mu c^2 = \frac{k}{m n} + \left(\frac{1}{n} - 1\right) p$
$\sqrt[n]{k p}$	$\mu c^2 = (n - 1) p$
$k + m p^n$	$\mu c^2 = \frac{k}{m n} p^{1-n} + \left(\frac{1}{n} - 1\right) p$

In particolare, per $f = \sqrt{k p}$ si ottiene l'equazione di stato $\mu c^2 = p$ dei fluidi perfetti incompressibili, la quale non dipende dalla costante arbitraria k .

5. FLUIDI CON CONDUCIBILITA' TERMICA NULLA

Lo studio dei fluidi con scambi di calore può essere fatto a cominciare dal caso più semplice nel quale la conducibilità termica è nulla, e si ottiene allora la teoria di Taub e di Lichnerowicz [4].

In tale caso lo scalare μ può essere decomposto nella somma di una *densità materiale propria* μ e di una *densità propria di energia interna* E , nel seguente modo

$$(5,1) \quad \mu = \mu_0 (1 + E/c^2) \quad \text{con} \quad \mu_0 > 0$$

Ne segue che

$$(5,2) \quad \mu + p/c^2 = \mu_0 (1 + \varepsilon/c^2) = \mu_0 F$$

e se introduciamo la *entalpia specifica* del fluido

$$(5,3) \quad \varepsilon = E + p/\mu = E + pV$$

dove $V = 1/\mu_0$ è il *volume specifico*, avremo

$$(5,4) \quad \mu + p/c^2 = \mu_0 (1 + \varepsilon/c^2) = \mu_0 F$$

Lo scalare F viene chiamato dal Lichnerowicz «indice» del fluido, ed è legato all'indice f da noi introdotto al n° 2, dalla relazione

$$(5,5) \quad f^2 = \mu_0 F \quad \text{con} \quad F = 1 + \varepsilon/c^2$$

La *temperatura propria* T del fluido e la sua *entropia specifica propria* S , soddisfano alla relazione termodinamica

$$(5,6) \quad T dS = dE + p dV = dE + p d(1/\mu_0)$$

Ma dalla (3), differenziando i due membri, segue

$$(5,7) \quad d\varepsilon = dE + p dV + V dp$$

e sostituendo nella precedente avremo

$$(5,8) \quad T dS = d\varepsilon - V dp$$

Fatta questa premessa, nella teoria di Lichnerowicz il tensore energetico di un fluido perfetto con scambi termici e con conducibilità termica nulla, è il seguente

$$(5,9) \quad \boxed{T_{ik} = \mu_0 F u_i u_k + p \delta_{ik}}$$

da cui si deduce l'equazione dinamica

$$(5,10) \quad \mu_0 F a_k + u_i \partial_i (\mu_0 F u_i) + \partial_k p = 0$$

e contraendo con u_k si ha l'equazione di continuità

$$(5,11) \quad -c^2 F \partial_i (\mu_0 u_i) + \mu_0 u_i \left(c^2 \partial_i F - \frac{1}{\mu_0} \partial_i p \right) = 0$$

Ma dalla (5) segue che $c^2 dF = d\varepsilon$, e quindi la (8) diventa

$$(5,12) \quad T dS = c^2 dF - \frac{1}{\mu_0} dp$$

In conseguenza l'equazione (11) ci dà

$$(5,13) \quad -c^2 F \partial_i (\mu_0 u_i) + \mu_0 T dS/d\tau = 0$$

mentre quella del moto si scrive così

$$(5,14) \quad \mu_0 F a_k + \frac{u_k}{c^2} \mu_0 T \frac{dS}{d\tau} + \partial_k p = 0$$

In particolare, il moto si dice *localmente adiabatico* se $dS/d\tau = 0$, cioè se la sua entropia specifica è costante lungo le linee di corrente del fluido. In tale caso le ultime due equazioni si riducono alle

$$(5,15) \quad \partial_i (\mu_0 u_i) = 0; \quad \mu_0 F a_k + \partial_k p = 0$$

e la prima esprime la conservazione della densità materiale propria.

Secondo il Lichnerowicz un fluido relativistico termodinamico è incompressibile se la velocità delle onde idrodinamiche è uguale a quella c della luce. Si dimostra allora che si ha la seguente equazione di stato

$$(5,16) \quad \boxed{p = \mu c^2 + \varphi(S)}$$

dove φ è una funzione arbitraria della variabile S .

6. LA TEORIA DELLA CONDUCIBILITA' TERMICA

Come é noto dalla fisica classica [5], la propagazione del calore attraverso un corpo solido generico, é descritta dal vettore *densità di corrente termica*

$$(6,1) \quad \vec{q} = -\kappa \text{ grad } T$$

dove κ é il *coefficiente di conducibilità termica* (che supporremo costante) e T é la *temperatura assoluta*. Occorre poi aggiungere l'equazione di conservazione del calore

$$(6,2) \quad \text{div } \vec{q} = \mu \gamma \frac{\partial T}{\partial t}$$

con il calore specifico γ del solido, che supporremo costante.

Sostituendo la (1) nella (2) si ottiene l'equazione di FOURIERE della conduzione del calore

$$(6,3) \quad \kappa \Delta T = \mu \gamma \frac{\partial T}{\partial t}$$

mentre, prendendo il grad della (2) e ricordando la (1) si ottiene la nuova equazione

$$(6,4) \quad \kappa \Delta \vec{q} = \mu \gamma \frac{\partial \vec{q}}{\partial t}$$

Per estendere alla relatività la teoria della conduzione termica, il Beauregard [6] osserva che in un mezzo materiale, conduttore del calore, occorre distinguere la *corrente di calore* w_i e la *velocità* u_i del mezzo, che per ipotesi soddisfano alla condizione

$$(6,5) \quad u_i w_i = u_i u_i = -c^2$$

Assimilando il calore ad un fluido conservativo di densità q_0 , si può introdurre un tensore energetico calorifico, non simmetrico

$$(6,6) \quad c^2 Q_{ik} = q_0 u_i w_k$$

Se poi osserviamo che si ha identicamente

$$q_0 w_i = q_0 u_c + q_0 (w_i - u_i)$$

possiamo introdurre il *vettore corrente di calore* Q_i ed il *vettore termico* q_i così definiti

$$(6,8) \quad Q_i = q_0 w_i; \quad q_i = q_0 (w_i - u_i)$$

ed allora la (7) diventa

$$(6,9) \quad \boxed{Q_i = q_0 u_i + q_i}$$

con $u_i q_i = 0$, e ci dice che il vettore *corrente di calore* può essere decomposto in una parte parallela alla velocità del fluido (*corrente di convezione*) ed in una parte ad essa ortogonale (*corrente di conduzione*) [7].

Tenendo conto delle (8), (9) il tensore energetico di Beauregard, assume una nuova forma che ne mette in evidenza la sua struttura

$$(6,10) \quad \boxed{c^2 Q_{ik} = q_0 u_i u_k + q_i u_k}$$

Se poi facciamo l'ipotesi che $\partial_i Q_{ik} = 0$, se ne deduce l'equazione di continuità

$$u_k \partial_i Q_{ik} = \partial_i (u_k Q_{ik}) - Q_{ik} \partial_i u_k = 0$$

la quale si può scrivere così

$$(6,11) \quad \partial_i (q_0 u_i + q_i) = \partial_i Q_i = 0$$

e ci dice che il vettore corrente di calore è conservativo.

Per ottenere l'equazione che estende alla relatività quella (3) di Fourier del calore, occorre generalizzare opportunamente la (1). Il modo più semplice è quello di porre

$$(6,12) \quad \boxed{q_i = -\kappa \eta_{ik} \partial_k T = -\kappa \left(\partial_i T + \frac{u_i}{c^2} \frac{dT}{d\tau} \right)}$$

dove η_{ik} è il tensore di proiezione di Eckart. Da essa segue che $u_i q_i = 0$, perché si ha identicamente $\eta_{ik} u_i = 0$.

La ipotesi (12) che generalizza quella di Fourier, porta però ad equazioni differenziali di tipo parabolico, e cioè con propagazione del calore e della temperatura a velocità infinita. Per tale motivo sono state proposte delle leggi più generali, come quella di KRANYS [8]

$$(6,13) \quad q_i + \chi \frac{dq_i}{d\tau} = -\kappa \eta_{ik} (\partial_k T + T a_k)$$

dove χ è una opportuna costante.

Recentemente il Boillat [7] ha proposto la legge

$$(6,14) \quad Q_i + \frac{d}{d\tau} (\chi Q_i) = -\eta_{ik} (\kappa \partial_k T + \theta a_k)$$

dove χ , κ , e θ sono opportuni coefficienti, che in generale non sono costanti. In questo lavoro noi utilizzeremo la legge (12), in quanto i risultati ottenuti possono poi essere estesi facilmente al caso più generale.

Per ottenere dalla (11) la legge relativistica di Fourier, osserviamo che essa si può scrivere così

$$(6,15) \quad \frac{dq_0}{d\tau} + q_0 \partial_i u_i = \kappa \square T + \frac{\kappa}{c^2} \frac{d^2 T}{d\tau^2} + \frac{\kappa}{c^2} \frac{dT}{d\tau} \partial_i u_i$$

Poniamoci, come fa il KRANYS [8] nel caso di un fluido incoerente, in equilibrio meccanico, cioè che si comporta dal punto di vista macroscopico come un corpo solido. Indicando allora con γ il calore specifico, si avrà

$$(6,16) \quad \frac{dq_0}{d\tau} = \frac{dq_0}{dT} \cdot \frac{dT}{d\tau} = \mu \gamma \frac{dT}{d\tau}$$

e ponendo $u_i = \text{cost}$, la (15) si riduce alla

$$(6,17) \quad \boxed{\kappa \square T + \frac{\kappa}{c^2} \frac{d^2 T}{d\tau^2} = \mu \gamma \frac{dT}{d\tau}}$$

e generalizza la (5) della fisica classica.

7. LA TERMOIDRODINAMICA RELATIVISTICA

Nel caso più generale in cui si vuole costruire la idrodinamica relativistica di un fluido con scambi termici e con conducibilità non nulla, la teoria di Taub e Lichnerowicz deve essere generalizzata nel modo indicato da ECKART [9] e da Pham-Mau-Quan [10].

A tale scopo viene introdotto il tensore termico di Eckart

$$(7,1) \quad \boxed{c^2 Q_{ik} = u_i q_k + u_k q_i}$$

dove q_i è il vettore termico (6,12). Tale tensore, a differenza di quello di Beauregard (6,10), risulta simmetrico.

Se ci limitiamo per semplicità al caso di un fluido perfetto incompressibile con scambi termici, avremo il seguente tensore energetico

$$(7,2) \quad \boxed{T_{ik} = \mu' u_i u_k + p \delta_{ik} + Q_{ik}}$$

dove si è posto $\mu' = \mu + p/c^2$. Uguagliando a zero la divergenza di tale tensore, avremo l'equazione del moto

$$(7,3) \quad \mu' a_k + u_k \partial_i (\mu' u_i) + \partial_k p + \partial_i Q_{ik} = 0$$

mentre moltiplicando per u_k si ha l'equazione di continuità

$$(7,4) \quad -c^2 \partial_i (\mu' u_i) + \frac{dp}{d\tau} + u_k \partial_i Q_{ik} = 0$$

Sostituendo nella (3) si ha

$$\mu' a_k + \frac{u_k}{c^2} \frac{dp}{d\tau} + \frac{u_k u_s}{c^2} \partial_i Q_{is} + \partial_i Q_{ik} + \partial_k p = 0$$

la quale si può anche scrivere così

$$(7,5) \quad \boxed{\mu' a_k + \frac{u_k}{c^2} \frac{dp}{d\tau} + \partial_k p + \eta_{sk} \partial_i Q_{is} = 0}$$

Se poi teniamo presente che

$$u_k \partial_i Q_{ik} = \frac{u_k}{c^2} \partial_i (u_i q_k + u_k q_i) = \frac{u_k}{c^2} \frac{dq_k}{d\tau} - \partial_i q_i$$

e teniamo conto della $u_i q_i = 0$, la (4) diventa

$$(7,6) \quad \partial_i (\mu' c^2 u_i + q_i) + \frac{d\dot{p}}{d\tau} + \frac{1}{c^2} a_k q_k = 0$$

e semplificando

$$(7,7) \quad \boxed{(\mu c^2 + \dot{p}) \partial_i u_i + c^2 \frac{d\mu}{d\tau} + \frac{1}{c^2} a_i q_i + \partial_i q_i = 0}$$

Alle equazioni (5) e (7) occorre poi aggiungere l'equazione di stato, che é del tipo $\mu = \mu(p, T)$. Qui ci limitiamo a ricordare che nel caso dei fluidi incompressibili termodinamici, oltre alla equazione di stato (5,16) di LICHNEROWICZ, ne sono state proposte altre da BOILLAT e da MAHJOUB [15].

Per ottenere l'equazione che generalizza quella di FOURIER del calore, possiamo procedere come nel paragrafo precedente, e cioè poniamo $u_i = \text{cost.}$ Allora la (7) si riduce alla

$$(7,8) \quad d\mu c^2 / d\tau = - \partial_i q_i$$

Ora, seguendo ARZELIES [11] si ha la relazione termodinamica

$$(7,9) \quad c^2 d\mu = dQ + \dot{p} dV$$

Allora la (8), in virtù della (6,12) diventa

$$(7,10) \quad \kappa \partial_i \left(\partial_i T + \frac{u_i}{c^2} \frac{dT}{d\tau} \right) = \frac{dQ}{d\tau} + \dot{p} \frac{dV}{d\tau}$$

Indicando con γ il *calore specifico* a volume costante, e ricordando che $V = 1/\mu$, avremo

$$\frac{dQ}{d\tau} = \frac{dQ}{dT} \cdot \frac{dT}{d\tau} = \mu \gamma \frac{dT}{d\tau}; \quad \dot{p} \frac{dV}{d\tau} = - \frac{\dot{p}}{\mu^2} \frac{d\mu}{d\tau}$$

Dalla (10) segue allora l'equazione relativistica di FOURIER

$$(7,11) \quad \boxed{\varkappa \square T + \frac{\varkappa}{c^2} \frac{d^2 T}{d\tau^2} = \mu\gamma \frac{dT}{d\tau} - \frac{\lambda}{\mu} \frac{d\mu}{d\tau}}$$

dove si è posto $\lambda = p/\mu$. Tale equazione è simile a quella proposta dal Pham-Mau-Quan [10].

Se confrontiamo le teorie dei fluidi termici che abbiamo esposto nei precedenti paragrafi, con simbolismo unico ed opportunamente modificate, in modo da metterne in evidenza le analogie, vediamo che esse si possono considerare come tre successive «approssimazioni» di una teoria più completa e soddisfacente, che studieremo nella seconda parte della memoria, a partire dalle equazioni di Maxwell generalizzate, invarianti per il gruppo di Fantappié.

8. IL CRONOTOPO DI CASTELNUOVO E LA MAGNETOIDRODINAMICA

Nella «relatività proiettiva» [2], lo spazio-tempo di Minkowski è perfezionato da quello di De Sitter a curvatura costante, o meglio dalla sua rappresentazione geodetica di Beltrami (*cronotopo di Castelnuovo*).

Se allora introduciamo il *tensore magnetoidrodinamico* H_{AB} ($A, B = 1 \dots 5$) e la sua induzione B_{AB} , si hanno le seguenti equazioni di Maxwell generalizzate [12]

$$(8,1) \quad \boxed{\text{Rot } H_{AB} = J_{ABC}; \quad \text{Div } B_{AB} = I_A}$$

Le equazioni dinamiche sono le seguenti

$$(8,2) \quad 2f_A = B_{BC} J_{ABC} - 2H_{AB} I_B$$

e se si indica con M_{AB} il tensore di MAXWELL-MINKOWSKI generalizzato

$$(8,3) \quad \boxed{M_{AB} = H_{AS} B_{SB} + \frac{1}{4} H_{RS} B_{RS} \delta_{AB}}$$

le (2) si possono scrivere così

$$(8,4) \quad f_A = \bar{\partial}_B M_{AB} + \frac{1}{4} (B_{RS} \bar{\partial}_A H_{RS} - H_{RS} \bar{\partial}_A B_{RS})$$

dove abbiamo posto $\bar{\partial}_A = \partial/\partial \bar{x}_A$ ed \bar{x}_A sono le coordinate proiettive omogenee (in questo paragrafo rimetteremo le sbarrette sopra i vettori proiettivi).

Nel caso in cui $H_{AB} = B_{AB}$ e le sorgenti del campo sono nulle, dalle (1) segue che

$$(8,5) \quad \square^* H_{AB} = 0 \quad \text{con} \quad \square^* = \bar{\partial}_A \bar{\partial}_A$$

Per vedere quale è il significato del Dalambertiano proiettivo, occorre chiarire in quale modo si passa dalla formulazione penta-dimensionale della teoria di Maxwell generalizzata, a quella quadridimensionale.

A tale scopo osserviamo che le 5 coordinate omogenee \bar{x}_A sono legate dalla condizione di normalizzazione $\bar{x}_A \bar{x}_A = r^2$, dove r è il raggio del cronotopo di De SITTER. Si passa quindi alle coordinate non omogenee x_i ($i = 1 \dots 4$) con la sostituzione

$$(8,6) \quad \bar{x}_i = x_i/A; \quad \bar{x}_5 = r/A \quad \text{con} \quad A^2 = 1 + \alpha^2 - \gamma^2$$

Se allora è data la funzione $\varphi(\bar{x}_A)$ delle \bar{x}_A , con la sostituzione (6) si ottiene la nuova funzione $\varphi(x_i)$ delle quattro variabili spaziali e temporale.

Se teniamo presente che $\partial_i A = x_i/Ar^2$, avremo per le (6)

$$\begin{aligned} \partial_i \varphi &= \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}_s} \cdot \frac{\partial \bar{x}_s}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}_5} \cdot \frac{\partial \bar{x}_5}{\partial x_i} = \frac{1}{A^2} \left(A \delta_{is} - \frac{x_i x_s}{Ar^2} \right) \bar{\partial}_s \varphi - \frac{x_i}{A^3 r^2} \bar{\partial}_5 \varphi = \\ &= \frac{\bar{x}_5}{r} \bar{\partial}_i \varphi - \frac{\bar{x}_i \bar{x}_s}{Ar^2} \bar{\partial}_s \varphi - \frac{\bar{x}_5 \bar{x}_i}{Ar^2} \bar{\partial}_5 \varphi \end{aligned}$$

da cui, semplificando

$$(8,7) \quad \boxed{r \partial_i \varphi = \bar{x}_5 \bar{\partial}_i \varphi - \frac{1}{Ar^2} \bar{x}_i \bar{x}_B \bar{\partial}_B \varphi}$$

Tale formula ci dà il legame tra le derivate parziali ∂_i e le derivate parziali proiettive $\bar{\partial}_i$, e diventa particolarmente semplice se la funzione $\varphi(\bar{x}_A)$ risulta omogenea di grado n nelle variabili \bar{x}_A . In tale caso vale il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee

$$(8,8) \quad \bar{x}_A \bar{\partial}_A \varphi = n \varphi$$

Allora dalla (7) si deduce che

$$(8,9) \quad \boxed{\bar{\partial}_i \varphi = A \partial_i \varphi + \frac{n \varphi}{A r^2} x_i}$$

Dalla (8), ricordando che $x_s = r \bar{x}_s / \bar{x}_5$, mentre $x_s x_s = r^2 (A^2 - 1)$ avremo [2]

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_5 \varphi &= -\frac{\bar{x}_s}{x_s} \bar{\partial}_s \varphi + \frac{n \varphi}{x_s} = \frac{x_s}{r} \left(A \partial_s \varphi + \frac{n \varphi}{A r^2} x_s \right) + \frac{n A}{r} \varphi = \\ &= \frac{1}{r} \left[-A x_s \partial_s \varphi - \frac{n \varphi}{A r^2} r^2 (A^2 - 1) + n A \varphi \right] \end{aligned}$$

ed infine

$$(8,10) \quad \boxed{r \bar{\partial}_5 \varphi = -A x_s \partial_s \varphi + \frac{n}{A} \varphi}$$

E' interessante osservare che la (9) si può scrivere così

$$(8,11) \quad A^{n-1} \bar{\partial}_i \varphi = \partial_i (A^n \varphi)$$

Per calcolare le derivate seconde, osserviamo che se la funzione $\varphi(\bar{x}_A)$ é omogenea di grado n nelle \bar{x}_A , la sua derivata sarà omogenea di grado $n - 1$. Tenendo presente che $\partial_i x_i = 4$, e ponendo $x_s x_s = x^2$ si avrà

$$\begin{aligned} r^2 \bar{\partial}_i^2 \varphi &= A \partial_i \left(r^2 A \partial_i \varphi + \frac{n \varphi}{A} x_i \right) + (n - 1) \frac{x_i}{A} \left(A \partial_i \varphi + \frac{n \varphi}{A r^2} x_i \right) = \\ &= r^2 A^2 \partial_i^2 \varphi + x_i \partial_i \varphi + 4 n \varphi + n x_i \partial_i \varphi - \frac{n x^2}{A^2 r^2} \varphi + \\ &\quad + (n - 1) x_i \partial_i \varphi + \frac{n (n - 1)}{A^2 r^2} x^2 \varphi \end{aligned}$$

Si ha poi, con calcoli analoghi

$$\begin{aligned} r^2 \bar{\partial}_5^2 &= -A x_i \partial_i \left(-A x_k \partial_k \varphi + \frac{n}{A} \varphi \right) + \frac{n-1}{A} \left(-A x_k \partial_k \varphi + \frac{n}{A} \varphi \right) = \\ &= A^2 x_i x_k \partial_i \partial_k \varphi + A^2 x_i \partial_i \varphi + \frac{x^2}{r^2} x_k \partial_k \varphi - n x_i \partial_i \varphi + \\ &\quad + \frac{n x^2}{A^2 r^2} \varphi - (n-1) x_k \partial_k \varphi + \frac{n(n-1)}{A^2} \varphi \end{aligned}$$

Ne segue che il Dalambertiano proiettivo, nel caso che la funzione φ è omogenea di grado n nelle variabili \bar{x}_A , è dato da

$$(8,12) \quad \boxed{r^2 \square^* \varphi = A^2 (r^2 \partial_i^2 + x_r x_s \partial_r \partial_s + 2 x_s \partial_s) \varphi + n(n+3) \varphi = 0}$$

Per $n=0$ ci riduciamo alle formule trovate nei precedenti lavori; mentre per $n \neq 0$, tale risultato è in accordo con quello ottenuto recentemente da M. CASTAGNINO [13].

Come sappiamo, la (12) è una equazione differenziale del tipo misto di TRICOMI, la quale risulta *iperbolica* nei punti dello spazio fisico, *parabolica* sull'assoluto di Cayley-Klein ed *ellittica* fuori dello assoluto.

9. LA IDRODINAMICA PROIETTIVA DEI FLUIDI PERFETTI

Nel precedente lavoro [14] abbiamo dimostrato che a partire dalla teoria di Maxwell generalizzata, si può dedurre la idrodinamica proiettiva, quando nel riferimento proprio, il campo elettromagnetico risulta nullo, ed inoltre il vettore idrodinamico c_A è parallelo alla velocità del fluido.

Se allora poniamo

$$(9,1) \quad c_A = f u_A; \quad g_A = g u_A$$

ne segue che

$$(9,2) \quad r H_{RS} = c_R x_S - c_S x_R; \quad r B_{RS} = g_R x_S - g_S x_R$$

e quindi il tensore energetico (8,3) del campo idrodinamico sarà

$$(9,3) \quad \boxed{T_{AB} = c_A g_B - c_S g_S \left(\frac{1}{2} \delta_{AB} - \frac{x_A x_B}{r^2} \right)}$$

mentre con facili calcoli, dalla (8,4) si deduce

$$(9,4) \quad f_A = \partial_B T_{AB} - \frac{1}{2} (g_S \partial_A c_S - c_S \partial_A g_S)$$

Se vogliamo che tale equazione coincida con la

$$(9,5) \quad f_A = \partial_B [\mu' (u_A u_B - H^2 x_A x_B) + p \delta_{AB}]$$

dove $H = c/r$ é la costante di Hubble, osserviamo che

$$(9,6) \quad fg = \mu' = \mu + p/c^2$$

ci riduciamo così alla condizione

$$\begin{aligned} & \partial_B (p \delta_{AB} - \mu' H^2 x_A x_B) = \\ & = - \partial_B \left[c_S g_S \left(\frac{1}{2} \delta_{AB} - \frac{x_A x_B}{r^2} \right) \right] - \frac{1}{2} (c_S \partial_A g_S - g_S \partial_A c_S) \end{aligned}$$

la quale, tenendo conto che $c_S g_S = -\mu' c^2$, diventa

$$\partial_A p = \frac{1}{2} \partial_A (c_S g_S) - \frac{1}{2} c_S \partial_A g_S + \frac{1}{2} g_S \partial_A c_S$$

Semplificando si ottiene la condizione analoga a quella di Sygne

$$(9,7) \quad \boxed{\partial_A p = -g_S \partial_A c_S}$$

e da essa, ripetendo il ragionamento fatto al n° 2, seguono le stesse formule (2,11) per gli indici del fluido.

In particolare, se $c_A = g_A$ (cioé $f = g$), il fluido si dirà perfetto ed incompressibile, e la sua equazione di stato é ancora la (3,4). In tale caso il tensore energetico si riduce a

$$(9,8) \quad \boxed{T_{AB} = \mu' (u_A u_B - H^2 x_A x_B) + p \delta_{AB}}$$

e da esso si ricavano, come si è visto nel precedente lavoro, le due equazioni di continuità e l'equazione del moto

$$(9,9) \quad \begin{cases} c^2 \partial_A (\mu' u_A) = d\dot{p}/d\tau; & c^2 \partial_A (\mu' x_A) = d\dot{p}/d\varrho \\ \mu' a_B + \frac{u_B}{c^2} \frac{d\dot{p}}{d\tau} - \frac{x_B}{r^2} \frac{d\dot{p}}{d\varrho} + \partial_B \dot{p} = H^2 \mu' x_B \end{cases}$$

dove abbiamo posto $d/d\tau = u_A \partial_A$; mentre $d/d\varrho = x_A \partial_A$ è la derivata radiale.

10. LA TERMOIDRODINAMICA PROIETTIVA

Nel caso più generale, il vettore corrente idrodinamica non è più parallelo alla velocità del fluido, ed allora se ci limitiamo per semplicità al caso in cui $c_A = g_A$, possiamo porre

$$(10,1) \quad \boxed{c_A = f u_A + q_A / f c^2}$$

ed il vettore termico q_A soddisfa alle condizioni

$$(10,2) \quad q_A u_A = q_A x_A = 0$$

Se poi introduciamo il tensore di Eckart generalizzato

$$(10,3) \quad \eta_{AB} = \delta_{AB} + \frac{u_A u_B}{c^2} - \frac{x_A x_B}{r^2}$$

l'ipotesi di Fourier diventa

$$(10,4) \quad q_A = -\kappa \eta_{AB} \partial_B T = -\kappa \left(\partial_A T + \frac{u_A}{c^2} \frac{dT}{d\tau} - \frac{x_A}{r^2} \frac{dT}{d\varrho} \right)$$

Sostituendo la (1) nella (9,3) otteniamo il seguente tensore energetico

$$(10,5) \quad \begin{aligned} T_{AB} = & f^2 u_A u_B + (u_A q_B + u_B q_A) / c^2 + q_A q_B / f^2 c^4 + \\ & + (f^2 c^2 - q^2 / f^2 c^4) \left(\frac{1}{2} \delta_{AB} - \frac{x_A x_B}{r^2} \right) \end{aligned}$$

Poniamo poi

$$(10,6) \quad f^2 = \mu + \dot{p}/c^2 = \mu'; \quad f^2 c^2 - q^2 / f^2 c^4 = 2\dot{p}$$

eliminando f^2 otteniamo la seguente equazione di stato dei fluidi perfetti incompressibili e termodinamici

$$(10,7) \quad \boxed{p^2 = \mu^2 c^4 + q^2/c^2}$$

che é analoga a quella (5,16) di LICHTNEROWICZ [15].

Se allora poniamo, per brevità

$$(10,8) \quad c^2 Q_{AB} = u_A q_B + u_B q_A + q_A q_B / \mu' c^2; \quad \mu'' = 2p/r^2$$

il tensore energetico dei fluidi termodinamici si scrive così

$$(10,9) \quad \boxed{T_{AB} = \mu' u_A u_B - \mu'' x_A x_B + p \delta_{AB} + Q_{AB}}$$

Tale tensore, nel caso in cui la conducibilità termica é nulla ($q_A = 0$) generalizza quello della teoria di Taub e Lichnerowicz (n° 5)

$$(10,10) \quad T_{AB} = \mu_0 F u_A u_B - \mu'' x_A x_B + p \delta_{AB}$$

Se invece supponiamo $q_A \neq 0$, ma trascuriamo i termini quadratici in q_A , ci riduciamo al tensore

$$(10,11) \quad T_{AB} = \mu' u_A u_B - \mu'' x_A x_B + p \delta_{AB} + (u_A q_B + u_B q_A)/c^2$$

che generalizza quello di Eckart e Pham-Mau-Quan (n° 7).

Nel caso più generale, otteniamo una nuova teoria della termodinamica, nella quale il tensore (7,1) di Eckart viene ricavato come conseguenza delle equazioni di MAXWELL generalizzate.

Annullando la divergenza del tensore (9) si ha l'equazione dinamica

$$(10,12) \quad \begin{aligned} \mu' u_A \partial_A u_B + u_B \partial_A (\mu' u_A) + \partial_B p - \mu'' x_A \partial_A x_B - \\ - x_B \partial_A (\mu'' x_A) + \partial_A Q_{AB} = 0 \end{aligned}$$

Moltiplicando per u_B si deduce l'equazione di continuità

$$(10,13) \quad -c^2 \partial_A (\mu' u_A) + d p / d \tau + u_B \partial_A Q_{AB} = 0$$

mentre, moltiplicando per x_B si deduce l'equazione

$$(10,14) \quad -r^2 \partial_A (\mu'' x_A) + d p / d \varrho + x_B \partial_A Q_{AB} = \mu c^2 - p$$

Sostituendo tali valori nella (12) e procedendo come al n° 7, otteniamo in definitiva

$$(10,15) \quad \boxed{\mu' a_B + \frac{u_B}{c^2} \frac{d\phi}{d\tau} - \frac{x_B}{r^2} \frac{d\phi}{d\varrho} + \partial_B \phi + \eta_{BS} \partial_R Q_{RS} = \mu' H^2 x_B}$$

Per ottenere l'equazione di Fourier del calore ci poniamo come al solito nel caso in cui $u_A = \text{cost}$, ed allora dalla (13), procedendo come nel caso relativistico (n° 7) segue la seguente equazione

$$(10,16) \quad \varkappa \left(\square^* T + \frac{1}{c^2} \frac{d^2 T}{d\tau^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 T}{d\varrho^2} \right) = \left(\mu\gamma - \frac{5\varkappa}{r^2} \right) \frac{dT}{d\tau} - \frac{\lambda}{\mu} \frac{d\mu}{d\tau}$$

È noto che una sfera di massa M e raggio R , che ruota con velocità angolare ω , genera un campo magnetico $H \simeq \sqrt{g} M\omega/Rc$, dove g è la costante gravitazionale [17]. Una cosa analoga avviene nella termoidrodinamica proiettiva, dove, per $f_{AB} = 0$, la (1,7) si riduce a

$$(10,17) \quad h_A = Hf x_A \quad \text{con} \quad H = c/r$$

e quindi in ogni punto del fluido si ha un campo magnetico, proporzionale all'indice f .

Per concludere, ricordiamo che nella relatività proiettiva viene stabilita una interessante analogia tra il tensore energetico della termoidrodinamica

$$(10,18) \quad T_{AB} = c_A c_B - c_S^2 \left(\frac{1}{2} \delta_{AB} - \frac{x_A x_B}{r^2} \right)$$

e quello della magnetoidrodinamica ideale

$$(10,19) \quad T_{AB} = h_A h_B - h_S^2 \left(\frac{1}{2} \delta_{AB} + \frac{u_A u_B}{c^2} \right)$$

i quali risultano tra loro «duali», nel senso che si passa dal primo al secondo mediante il semplice scambio dei due vettori x_A ed u_B (cosa che produce, in base alle (1,2), lo scambio tra c_A ed h_B).

BIBLIOGRAFIA

- (1) Tra i lavori più recenti su tale argomento, ricordano: *Proceedings of Boulder Symposium in De Sitter and Conformal group*, University of Colorado, 1970; M. CAHEN, J. GEHENIAU, M. GUNTHER, C. SCHIOMBIOND, *Fonction de Green de l'équation de Dirac dans l'Univers de De Sitter*, Ann. Poinc. XIV, 325 (1971); W. TAIT, J. F. CORNWELL, *Coupling of De Sitter space-time and internal symmetries*, J. Math. Phys. 12, 1651 (1971); S. STROM, *Induced representations of the $(1 + 4)$ De Sitter group*, Ann. Poinc. XIII, 77 (1970); I. JAFFE, *The discrete Lorentz and singleton representations of the universal covering groups of the $(3 + 2)$ de Sitter group*, J. Math. Phys. 12, 882 (1971).
- (2) G. ARCIDIACONO, Coll. Math. del 1958-71; *La teoria della relatività*, Libreria Veschi (Viale Università, 7) Roma, II edizione ampliata 1972.
- (3) J. I. SYNGE, *Relativistic Hydrodynamics*, Proc. Lond. Math. Soc. 43, 376 (1937); A. LICHTNEROWICZ, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, Paris, 1955.
- (4) A. H. TAUB, *Isentropic hydrodynamics in plane symmetric space-time*, Phys. Rev. 103, 454 (1956); A. LICHTNEROWICZ, *Relativistic hydrodynamics and magnetohydrodynamics*, New York 1967.
- (5) H. S. CARSLAN, J. C. JAEGER, *Conduction of heat in solids*, Oxford 1959.
- (6) O. COSTA DE BEAUREGARD, *La théorie de la relativité restreinte*, Masson, Paris 1949, pag. 138. Tale teoria viene esposta con alcune modifiche.
- (7) G. BOILLAT, *Relativistic thermodynamic Fluid*, Iett. Nuovo Cim. 3, 521 (1970). C. CATTANEO, C. R. Paris 247, 431 (1958).
- (8) M. KRANYS, *Relativistic Hydrodynamics with irreversible thermodynamics*; Nuovo Cim. 42B, 51 (1966).
- (9) C. LÜCKART, *Thermodynamics of irreversible processes*, Phys. Rev. 58, 919 (1940).
- (10) PHAM MAU QUAN, *Sur une théorie des fluides thermodynamiques*, Annali di Matematica, 38, 181 (1955).
- (11) H. ARZELIES, *Thermodynamique relativiste et quantique*, Gauthier Villars 1968, pag. 125; *The present-day crisis in theoretical thermodynamics*, Scientia, sett-ott 1970.
- (12) G. ARCIDIACONO, *Le equazioni di Maxwell generalizzate*, Rend. Lincei, 18, fasc. 5 (1955); *La elettrodinamica e la idrodinamica*, Rend. Lincei, 20, fasc. 5 (1956); *Magnetoidrodinamica e cosmologia*, Coll. Math. XIX, 177, (1968).
- (13) M. CASTAGNINO, *Champs de spin entier dans l'espace-temps de De Sitter*, Ann. Poinc. 13, 77 (1970).
- (14) G. ARCIDIACONO, *Su alcuni casi limiti della magnetoidrodinamica*, Coll. Math. XXII, 141 (1971).
- (15) G. BOILLAT, *Equation of state of a relativistic thermodynamical incompressible fluid*, Iett. Nuovo Cim. 2, 275 (1969); B. MAHJOUR, *Système d'évolution d'un fluide relativiste conducteur de chaleur d'après le schème d'Eckart*, Ann. Poinc. 15, 153 (1971).
- (16) Per la termoidrodinamica relativistica, vedi pure: A. BRESSAN, *On relativistic thermodynamics*, Nuovo Cim. 48B, 201 (1967); C. MARLE, *Sur l'établissement des équations de l'hydrodynamique des fluides relativistes dissipatifs*, Ann. Poinc. X, 127 (1969); M. CARRASSI, *Heat and fictitious forces in variable rest mass relativistic dynamics*, Meccanica VI, 80 (1971); L. A. SCHMID, *Heat transfer in relativistic charged-fluid flow*, Nuovo Cim. 47B, 1 (1967).
- (17) BLACKETT, *Nature* 159, 658 (1947); M. SURDIN, *Le champ électromagnétique fluctuant de l'Univers*, An. Poinc. XV, 203 (1971).