CARACTERIZACIÓN DE LAS ÁLGEBRAS DIFERENCIABLES Y SÍNTESIS ESPECTRAL PARA MÓDULOS SOBRE TALES ÁLGEBRAS

Memoria presentada por

JESÚS MUÑOZ DÍAZ

para aspirar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas

PROLOGO

Esta tesis es la exposición de los puntos más importantes que han ido apareciendo como no conocidos en el estudio que durante estos últimos años he realizado, siempre en colaboración con J. M. Ortega, sobre las partes del Análisis vecinas a la teoría espectral.

La aclaración fundamental que supuso el punto de vista espectral adoptado por GUELFAND no permite ya aceptar resignadamente que partes centrales del Análisis, tales como las Algebras diferenciales, deban seguir siendo un curioso bosque de acotaciones. Entiendo que antes que cualquier otra cosa la situación actual del Análisis exige una sistemática aclaración de fundamentos. En este espíritu está realizado este trabajo, cualquiera que sea su alcance.

Dado que las álgebras que aparecen en Análisis son álgebras localmente convexas generales, no siempre de Banach, Ortega y yo intentamos traducir a tales álgebras los esquemas fundamentales de las álgebras de BANACH, además de averiguar que nuevos aspectos presentaban. Lo que obtuvimos fue publicado en [3]. Naturalmente, muchos años antes se había comenzado ya el estudio de las a. l. c. pero de modo esporádico y quedaban por resolver problemas básicos, sin cuya solución nada quedaba claro. El primero de estos problemas era saber en que condiciones generales era válido el lema de URYSOHN en el sentido siguiente: dada un a. l. c. A de espectro X y dos cerrados F, G de X, disjuntos ¿existe una función ϵA que valga 0 en F y 1 en G? En el lenguaje de ideales el problema es saber en qué condiciones la suma de dos ideales cerrados no puede ser densa sin coincidir con A. Encontramos el teorema dado aquí con el número 0.2.2.1. En particular, si el álgebra tiene topología de espacio de PTAK o, más especialmente, de FRECHET, se verifica el lema de Urysohn.

El segundo problema era averiguar en las condiciones más generales posibles la relación existente entre el espectro de ideales maximales cerrados (que llamaremos simplemente espectro si no advertimos lo contrario) y el espectro de ideales maximales total, y caracterizar las álgebras de espectro localmente compacto. Obtuvimos un teorema general del tipo del de GUELFAND-KOLMOGOROFF, que doy aquí en 0.2.3.2. y la caracterización de los espectros localmente compactos dada en 0.2.3.4.

Finalmente quedaban los problemas que llamaré de «lenguaje de haces» tales como la existencia de particiones de la unidad, el «teorema local» que asegurase que toda función definida en el espectro y coincidente localmente con funciones del álgebra fuese del álgebra, y la caracterización local de los ideales cerrados. En estos puntos lo que obtuvimos era caso particular de los resultados más fuertes de BROOKS [7], que no conocíamos.

Un problema completamente inédito nos fue planteado por el profesor SANCHO: se trataba de saber si la localización algebraica en el espectro de un álgebra de Fréchet, en las condiciones que hiciera falta imponer, coincidía con la localización topológica. Es decir, si toda función definida en un abierto del espectro es expresable como cociente de dos funciones del álgebra. La solución es el teorema 0.2.6.

El capítulo I de esta tesis es fundamentalmente una continuación del estudio del lenguaje de haces hecho para álgebras al caso de los módulos. El principio del capítulo es el apartado I. 1. que apenas se usa después y podría igualmente haberse puesto al principio del capítulo III.

En todo el capítulo I, el anillo A es una F^*-álgebra, es decir, de FRECHET, con involución simétrica, semisimple, regular, separable y de espectro localmente compacto, tal por ejemplo como las álgebras C^m de una variedad numerable en el infinito.

Sea X el espectro de A. Para cada abierto U de X se considera el anillo A_u, localización algebraica de A en U (o si se quiere anillo de todas las funciones definidas en U que localmente coinciden con funciones de A). Los anillos A_u definen, evidentemente, un prehaz $\mathcal{A}$ cuya fibra en cada punto $x \in X$ es el anillo de gérmenes de A en

x. Que el prehaz es haz, es decir, que sus secciones sobre U son A_u otra vez, es el teorema 0.2.6. Dado un A-módulo M se define el A_u-módulo $M_u = A_u \underset{A}{\otimes} M$. La asignación a cada abierto U del módulo M_u define sobre X un prehaz $\mathcal{M}$ de $\mathcal{A}$-módulos. El teorema fundamental del capítulo I (1.2.2.) asegura que si M es un A-módulo de FRÉCHET, el prehaz $\mathcal{M}$ es un haz. Una primera aplicación de este teorema es el enunciado (1.2.3.), uno de cuyos ejemplos es el siguiente: toda función continua en un abierto U de una variedad Ω de clase C^∞ se expresa como cociente de una función continua por otra de clase C^∞, ambas definidas en toda la variedad. Otro ejemplo: consideremos la circunferencia X como compactización de la recta; entonces, toda medida sobre la recta se expresa como cociente de una medida sobre la circunferencia por una función continua de la circunferencia (si se quiere, la función puede tomarse incluso de clase C^∞); basta observar que el espacio $M = C(X)'$ es un $C(X)$-módulo de Banach y que una medida en la recta coincide en un entorno de cada punto con una medida global sobre X y es por tanto una sección del haz $\mathcal{M}$ sobre la recta. El apartado I.2. se completa con el teorema I.2.4., que permite, por ejemplo, en el capítulo III (teor. III 1.5.) demostrar que las diferenciales del anillo A_u son la localización algebraica en U de las diferenciales de A, cualquiera que sea la F^*-álgebra A.

Observemos que el teorema fundamental del capítulo I permite la caracterización de los submódulos cerrados de un módulo de FRÉCHET en términos «locales» completamente análoga a la caracterización local de los ideales cerrados. Ya hemos dicho que si A es una F^*-álgebra, I es un ideal cerrado de A y $a \in A$ coincide en el entorno de cada punto del espectro con funciones de I, entonces $a \in I$. Si llamamos n_x al ideal de nulidades de $x \in X$ en A, la propiedad anterior puede enunciarse diciendo: la condición necesaria y suficiente para que $a \in I$ es que cada punto x el germen de a (imagen de a en A/n_x) pertenezca a $A/n_x \underset{A}{\otimes} I$. Si cambiamos A por el A-módulo de FRÉCHET M y el ideal I por un submódulo cerrado N el teorema es: la condición necesaria y suficiente para que $m \in M$ esté en N es que su imagen en cada $A/n_x \underset{A}{\otimes} M$ esté en $A/n_x \underset{A}{\otimes} N$.

El capítulo I se completa con el apartado I.3. en que se estudia el «haz de distribuciones» asociado a una F^*-álgebra A. Para cada abierto U de X se considera la F^*-álgebra A_u y el ideal I_u de A_u consistente en las funciones con soporte compacto en U (naturalmente, I_u no es $A_u \underset{A}{\otimes} I$), dotado de su topología límite inductivo natural. Para cada par de abiertos $U \supset V$ se tiene una inyección continua $I_u \leftarrow I_v$ que da por trasposición un morfismo continuo de duales $I'_u \to I'_v$, del mismo sentido que $A_u \to A_v$. Los morfismos $I'_u \to I'_v$ definidos por esta vía «topológica» definen sobre X un prehaz J que demostramos que es haz. Hasta aquí todo es casi copia de lo que se hace en la teoría de distribuciones habitual. La novedad es el teorema I.3.3.2. que asegura que $J'_u = A_u \underset{A}{\otimes} I'$ si A es localmente Banach (def. I.3.3.1.). Este teorema incluye como caso particular lo que hemos dicho antes sobre las medidas en la recta en relación con las medidas en la circunferencia.

El contraejemplo I.3.3.3. da un A-módulo M completo, no de Fréchet en el que el prehaz $\mathcal{M}$ asociado a M por localización algebraica no es haz.

El capítulo II trata un problema de síntesis espectral en un caso particular importante. Vamos a aclarar qué entendemos por «síntesis espectral». El problema clásico se plantea para ideales de un anillo regular. Hemos visto que si A es una F^*-álgebra, todo ideal cerrado I de A está completamente caracterizado por sus gérmenes $A/n_x \underset{A}{\otimes} I = I + n_x/n_x$ siendo $I = \bigcap_{x \in X} (I + n_x)$ donde como siempre n_x es el ideal de nulidades de $x \in X$ en A. Sea Γ_x el cierre en la topología de A de n_x; Γ_x es el mínimo ideal cerrado cuyos ceros son $\{x\}$ (teor. 0.2.2.3.). Se dice que en un anillo A se verifica la síntesis espectral cuando para todo ideal cerrado I de A es $I = \bigcap_{x \in X} (I + \Gamma_x)$. En el caso en que $A = C^m(V)$ el teorema de Whitney (0.2.7.2.) significa que en A se verifica la síntesis espectral. Claramente, el problema de síntesis espectral es planteable para A-módulos de modo natural. Resumo lo obtenido en este sentido en el capítulo II.

En el apartado II.2. el anillo es $A = C^m(V)$ $(m < \infty)$. El teorema que como principal novedad demostramos es:

$$\text{si } 0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

es una sucesión exacta de A-módulos de Fréchet y M es finito la sucesión

$$0 \to A/\Gamma_x \underset{\pi A}{\otimes} M' \to A/\Gamma_x \underset{\pi A}{\otimes} M \to A/\Gamma_x \underset{\pi A}{\otimes} M'' \to 0$$

es exacta (teor. II.2.4.). De aquí se deduce el corolario (II.2.6.) que asegura que el anillo A no contiene ideales propios finito-generados y cerrados. Finalmente, usando el teorema espectral de WHITNEY para módulos libres demostramos en II.2.7. que todo A-módulo de FRECHET M de tipo finito verifica la síntesis espectral en el sentido siguiente: la condición necesaria y suficiente para que un elemento $m \in M$ esté en el submódulo cerrado M' es que para cada punto x la imagen de m en $A/\Gamma_x \underset{\pi A}{\otimes} M$ esté en $A/\Gamma_x \underset{\pi A}{\otimes} M'$.

En el apartado II.3., tratamos el caso especial en que $A = C(X)$. Este caso es tratable de un modo mucho más elegante debido al hecho fundamental de que para todo cerrado F de X el ideal Γ_F es un A-módulo plano.

A partir de aquí se demuestra el teorema II.3.3.:

$$\text{si } 0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

es una sucesión exacta de A-módulos topológicos y morfismos no necesariamente continuos, la sucesión

$$0 \to A/\Gamma_F \underset{A}{\otimes} M' \to A/\Gamma_F \underset{A}{\otimes} M \to A/\Gamma_F \underset{A}{\otimes} M'' \to 0$$

es exacta. A partir de aquí se demuestra nuevamente para este caso que todo A-módulo de FRÉCHET finito verifica la síntesis espectral.

Finalmente, en II.4. tratamos el caso $A = C^\infty(V)$. En este caso los argumentos usados en II.2. no son utilizables: allí era fundamental el hecho de que los anillos $C^m(V)/\Gamma_x$ son de dimensión compleja finita, mientras que $C^\infty(V)/\Gamma_x$ no lo es. El tratamiento ahora vuelve a ser como el del caso $A = C^0(X)$. Los enunciados en ambos casos extremos son idénticos, si bien la demostración de que en el anillo $A = C^\infty(V)$ los ideales Γ_F son A-módulos planos es aquí mucho más difícil.

El teorema final II.4.8. demuestra que todo A-módulo de FRÉCHET de tipo finito verifica la síntesis espectral en un sentido análogo a los casos anteriores, salvo que en lugar de tomar los productos tensoriales $A/\Gamma_x \underset{\pi A}{\otimes} M \cong M/\overline{\Gamma_x M}$ se toma el producto tensorial algebraico $A/\Gamma_x \underset{A}{\otimes} M$. De este teorema se deduce, por ejemplo, la caracterización de los ideales cerrados en toda álgebra diferenciable, entendiendo por tal todo cociente de $C^\infty(V)$ por un ideal cerrado. El teorema (que no hemos puesto en el texto) puede enunciarse así: si A es un álgebra diferenciable, para todo punto x de su espectro X existe un ideal q_x mínimo entre todos los ideales cerrados de A de ceros $\{x\}$;

para todo ideal cerrado I de A se verifica $I = \bigcap_{x \in X} (I + q_x)$. La demostración es fácil a partir de los teoremas de II.4.

El objeto del capítulo III es, primordialmente, la caracterización en términos de propiedades del anillo de las álgebras de funciones diferenciables en el sentido de WHITNEY.

El capítulo III empieza con un apartado dedicado a la noción de diferencial para un álgebra de FRÉCHET cualquiera. En este apartado se demuestran las propiedades universales de las diferenciales análogas a las correspondientes propiedades algebraicas de las diferenciales de KÄHLER.

La segunda parte del capítulo es la caracterización de las álgebras diferenciablemente completas con o sin radical (teor. III.2.1.1. y III.2.2.), sin entrar en aplicaciones.

El último apartado es la caracterización de las álgebras de WHITNEY. El «teorema de extensión» de WHITNEY (III.3.1.) es ya en realidad una caracterización de tales álgebras, pero hecha en términos no intrínsecos; se comprenderá lo que decimos si se piensa que en el caso en que X es la bola unidad de $\mathbf{R}^n$ la caracterización de WHITNEY del álgebra $W(X)$ es exactamente la definición de función infinitamente diferenciable en X. El teorema fundamental del capítulo es el siguiente:

Una Q-álgebra de FRÉCHET A dotada de involución simétrica, topológicamente generada por n elementos autoconjugados es el álgebra WHITNEY de su espectro X (sumergido en $\mathbf{R}^n$) si y sólo si:

1) Para cada número natural m, D_A^m es un ideal finito-generado cerrado en $A \widehat{\otimes} A$ (D_A es el núcleo del morfismo canónico $A \widehat{\otimes} A \to A$) y el graduado de $A \widehat{\otimes} A$ por D_A es un anillo de polinomios en n variables con coeficientes en A.

2) $\bigcap_{\substack{x \in X \\ K \in N}} m_x^K = 0$ ($m_x =$ ideal maximal de $x \in X$).

3) A es diferenciablemente completa. O, si no se quiere usar la palabra «diferenciable» en la caracterización, puede sustituirse esta condición por propiedades de las normas de A (teor. III.2.2.).

Tengo tanto que agradecer al profesor SANCHO que todo lo que aquí puedo decir sería pequeño. A él y a ORTEGA mi gratitud y la dedicatoria de estas páginas.

CAPITULO 0. REFERENCIAS

0. 1. Referencias a la teoría de espacios vectoriales topológicos.

En general usaremos sin mención expresa las propiedades más clásicas de los espacios localmente convexos: teoría de la dualidad, propiedades de los espacios de Fréchet, límites proyectivos y límites inductivos.

Necesitamos las definiciones y propiedades generales de las topologías π y ε sobre el producto tensorial de dos e. l. c., así como las propiedades más elementales de los espacios nucleares. Por ello resumiremos lo esencial de estos puntos enviado para más detalles a [1] y [2].

0. 1. 1. Teorema. Sean E, F dos e. l. c. sobre el mismo cuerpo. Existe sobre $E \otimes F$ una topología localmente convexa, que llamaremos *topología* π, univocamente determinada por la propiedad universal siguiente:

— para todo e. l. c. G el espacio de las aplicaciones bilineales continuas de $E \times F$ en G es isomorfo al espacio de las aplicaciones lineales continuas de $E \underset{\pi}{\otimes} F$ en G y en este isomorfismo se corresponden las partes equicontinuas de dichos espacios.

Si $E_1 \to E_2$, $F_1 \to F_2$ son aplicaciones lineales continuas (resp. epimorfismos topológicos), $E_1 \underset{\pi}{\otimes} F_1 \to E_2 \underset{\pi}{\otimes} F_2$ es continua (resp. epimorfismo topológico).

Habitualmente se denota $E \hat{\otimes} F$ el completado de $E \underset{\pi}{\otimes} F$.

0. 1. 2. Proposición. Si E y F son metrizables, $E \underset{\pi}{\otimes} F$ es metrizable y cada elemento de $E \hat{\otimes} F$ puede expresarse en la forma

$$u = \sum_1^\infty \lambda_n x_n \otimes y_n \text{ con } \sum_1^\infty | \lambda_n | < \infty, \lim_{n \to \infty} x_n = 0 \text{ en } E, \lim_{n \to \infty} y_n = 0 \text{ en } F.$$

0. 1. 3. Se denota $E \underset{\varepsilon}{\otimes} F$ el espacio $E \otimes F$ dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre los productos de partes equicontinuas de $E' \times F'$. La topología ε tiene la propiedad de que si

$E_1 \to E_2$, $F_1 \to F_2$ son monomorfismos topológicos, $E_1 \otimes_\varepsilon F_1 \to$ $\to E_2 \otimes_\varepsilon F_2$ es un monomorfismo topológico, cosa que no ocurre en general con las topologías π. Las propiedades, en cierto modo complementarias de estas dos topologías dan interés a la noción de espacio nuclear.

0. 1. 4. Un e. l. c. E se dice que es *nuclear* si para todo e. l. c. F, $E \otimes_\pi F$ y $E \otimes_\varepsilon F$ son topológicamente isomorfos.

0. 1. 5. Diremos que una sucesión de e. l. c.

$$0 \to E_1 \to E \to E_2 \to 0$$

es topológicamente exacta cuando lo sea algebraicamente y los morfismos sean homomorfismos topológicos.

0. 1. 6. Proposición. Si

$$0 \to E_1 \to E \to E_2 \to 0$$

es una sucesión topológicamente exacta de e. l. c. metrizables, la sucesión de sus completados

$$0 \to \bar{E}_1 \to \bar{E} \to \bar{E}_2 \to 0$$

es topológicamente exacta.

Demostración. Es suficiente demostrar la exactitud algebraica, ya que puede aplicarse el teorema de la aplicación abierta.

Por las propiedades de las topologías cociente es inmediato que $E_2 = E/E_1$ se inyecta, conservando su topología, en $\bar{E}/\bar{E}_1$ y extendiendo por continuidad se obtiene una aplicación:

$$\bar{E}_2 \to \bar{E}/\bar{E}_1 \text{ (gracias a que } \bar{E}/\bar{E}_1 \text{ es completo).}$$

Componiendo esta aplicación con la natural $\bar{E}/\bar{E}_1 \to \bar{E}_2$ se obtiene una aplicación continua $\bar{E}_2 \to \bar{E}_2$ que restringida al subespacio denso E_2 es la identidad, luego que es la identidad. Esto prueba que $\bar{E}_2$ es algebraicamente un sumando directo de $\bar{E}/\bar{E}_1$, siendo el otro sumando $N = \ker(\bar{E}/\bar{E}_1 \to \bar{E}_2)$. Así, algebraicamente

$$\bar{E}_2 \oplus N = \bar{E}/\bar{E}_1$$

y como la aplicación del primer miembro en el segundo es continua, ($\bar{E}_2$ con la topología inicialmente dada), se aplica el teorema del gráfico cerrado y resulta la igualdad topológica, con lo que $\overline{E}_2$ es cerrado en $\overline{E}/\overline{E}_1$ y por ser denso coincide.

0. 1. 7. PROPOSICIÓN. Si

$$0 \to E_1 \to E \to E_2 \to 0$$

es una sucesión topológicamente exacta de e. l. c. metrizables y F es metrizable nuclear, la sucesión:

$$0 \to E_1 \hat{\otimes} F \to E \hat{\otimes} F \to E_2 \hat{\otimes} F \to 0$$

es topológicamente exacta.

DEMOSTRACIÓN. Por ser F nuclear, la sucesión

$$0 \to E_1 \underset{\pi}{\otimes} F \to E \underset{\pi}{\otimes} F \to E_2 \underset{\pi}{\otimes} F \to 0$$

es topológicamente exacta. Basta ahora aplicar 0. 1. 6.

0. 1. 8. TEOREMA.

— Todo subespacio de un espacio nuclear, es nuclear.
— Todo cociente separado de un espacio nuclear, es nuclear.
— Todo límite proyectivo de espacios nucleares, es nuclear.
— Todo límite inductivo numerable de espacios nucleares, es nuclear.
— Si E es nuclear, su completado es nuclear.

0. 1. 9. TEOREMA. Si Ω es una variedad diferenciable, el anillo $C^\infty(\Omega)$ con su topología habitual es un espacio nuclear. En consecuencia, todos sus cocientes y subespacios son nucleares.

0. 2. TEORÍA ESPECTRAL DE LAS ÁLGEBRAS DE FRÉCHET.

Hacemos una rápida exposición de los aspectos para nosotros más interesantes en la teoría espectral de las álgebras de FRÉCHET.

Aparte de precisar los resultados que vamos a utilizar a lo largo del trabajo, procuramos poner en evidencia el significado que dentro de la teoría general tiene el «teorema espectral de WHITNEY» expuesto en la última sección.

0. 2. 1. REPRESENTACIÓN ESPECTRAL. (Véase [3] para detalles e historia).

Sea A una **C**-álgebra localmente convexa conmutativa.

Sea *Spec A* el espectro primo de A; *Spec Max A* su espectro de ideales maximales; *Spec Real A* el de núcleos de morfismos de A en $\mathbf{C}$ y finalmente *Spec Top A* el espectro de ideales maximales cerrados de A. Todos estos espacios están dotados de modo puramente algebraico de la topología definida por ZARISKI.

El teorema de representación espectral puede enunciarse de modo poco sugestivo, pero breve, en la siguiente forma:

TEOREMA.

1) Todo ideal no denso de A está contenido en un ideal maximal cerrado.

2) *Spec Top A* $\subset$ *Spec Real A*; es decir, todo ideal maximal cerrado es un hiperplano.

3) Si A es completa *Spec Top A* es denso en *Spec Max A*; es decir, el radical de JACOBSON de A coincide con los elementos de A cuya imagen es nula en todo morfismo continuo de A en $\mathbf{C}$.

Si $X =$ *Spec Top A*, la parte 2) del teorema muestra que X es una parte de A', dual de A como e. l. c. La topología inducida por la débil de A' en X se llamará topología de GUELFAND de X. Esta topología es más fina que la de ZARISKI. Cuando ambas coinciden A se dice que es *regular*.

Así pues, se tiene una representación natural de A en $C(X)$, llamada *representación espectral*. La parte 3) del teorema da el núcleo de la representación espectral en el caso de que A es completa. El significado de esta parte del teorema es que un elemento de A es invertible en A si y sólo si su imagen en la representación espectral es invertible en $C(X)$. La parte 1) del teorema significa que la condición necesaria y suficiente para que un ideal I de A sea denso es que no tenga ceros en X.

0. 2. 2. EL LEMA DE URYSOHN PARA ÁLGEBRAS REGULARES (VER [3]).

Geométricamente, el problema planteado es saber en qué condiciones el anillo A considerado como anillo de funciones sobre X separa cerrados. Se supone que A es regular, con lo que no hay distinción entre las topologías definidas sobre X. Entonces el problema es: dados dos cerrados F, G de X, disjuntos ¿existe un elemento de A que tome valor 0 en todo punto de F y valor 1 en todo punto de G?

Mas generalmente, consideramos dos ideales I, J cuyos ceros respectivos sean F, G. El teorema de representación espectral muestra que el ideal $I + J$ es denso, ya que sus ceros son $F \cap G = \phi$.

El problema es saber si $I + J$ coincide o no con A, o con otras palabras, si los cerrados F y G que no se cortan en ningún «punto visible» pueden cortarse en la «zona del infinito» de *Spec Max A*. Se encuentra:

0. 2. 2. 1. TEOREMA. Si A es un a. l. c. completa cuyos cocientes por ideales cerrados son a. l. c. completas y si dos ideales cerrados I, J son tales que $I + J$ es denso en A, entonces $I + J = A$.

En el caso particular en que A es de FRÉCHET este teorema fue dado en [4].

Resulta inmediatamente:

0. 2. 2. 2. COROLARIO. Si F y G son cerrados disjuntos en X, en las condiciones del teorema anterior existe $a \in A$ que toma valor cero en F y uno en G. De este teorema se deduce el siguiente:

0. 2. 2. 3. TEOREMA. Sea A un a. l. c. cuyos cocientes por ideales cerrados son a. l. c. completas, y además regular y semisimple. Entonces entre todos los ideales cerrados de A cuyos ceros son un cerrado dado F de X existe uno mínimo Γ_F.

Este ideal mínimo es el cierre en la topología de A del ideal de nulidades del cerrado F.

La aparición de tales ideales abre el problema del estudio espectral fino de las álgebras de FRÉCHET en un sentido que intentaremos aclarar. En primer lugar, y como veremos en la próxima sección, si dos álgebras de FRÉCHET regulares no se distinguen por su espectro topológico, tampoco se distinguen por su espectro maximal total, lo cual hace ver lo muy lejos que está la teoría espectral inmediatamente derivada del teorema de representación de llegar al estudio de la estructura fina de tales álgebras. Parece natural esperar que tal estudio deba realizarse considerando los anillos locales A/Γ_x donde Γ_x es ideal asociado a $x \in X$ en el sentido del teorema anterior.

Como veremos este es el sentido del teorema espectral de WHITNEY.

0. 2. 3. TEOREMA GENERAL DEL TIPO GUELFAND - KOLMOGOROFF (VER [3]).

El hecho de que el espectro topológico de un a. l. c. A pueda no ser compacto es lo único que diferencia la teoría espectral para álgebras de BANACH de la teoría general. Ninguna de las dificultades resueltas en el apartado anterior aparecen cuando *Spec Top A* es compacto, pues en este caso no hay ideales densos, por lo que tampoco hay problema de comparación entre los distintos espectros de ideales maximales.

Por otra parte, si el espectro es compacto, en la representación espectral los elementos del anillo son funciones acotadas, lo cual da importantes facilidades en los problemas de cálculo operacional con funciones holoformas o diferenciables. Veremos, por ejemplo, en el capítulo III al caracterizar los anillos diferenciablemente cerrados cómo es posible tal caracterización solo vía la reducción del problema al caso de anillos de espectro compacto, reducción posible gracias al teorema fundamental de este apartado ([3], teorema 13).

Una propiedad fundamental que necesitaremos de las álgebras de espectro compacto es la siguiente:

0. 2. 3. 1. Teorema. Si A es un a. l. c. completa semisimple, regular y de espectro compacto, todo ideal primo de A está contenido en un solo ideal maximal y la aplicación que asigna a cada ideal primo el ideal maximal que le contiene es una retracción continua de *Spec* A sobre *Spec Max* A (Ver [3] pág. 141, lema 2).

Si A es un a. l. c. completa semisimple dotada de una involución simétrica (es decir, tal que $1 + a \,.\, a^*$ sea invertible para todo $a \in A$ diremos que A es una $*$-álgebra simétrica.

A toda $*$-álgebra simétrica A se le puede asignar otra B de espectro compacto sin más que tomar B como el conjunto de los elementos de A acotados en la representación espectral y dotar a B de la topología reunión de la inducida por A con la del supremo en la representación espectral.

La inyección $B \to A$ da por la funtorialidad del espectro primo una aplicación continua *Spec* $B \to$ *Spec* A. Esta aplicación se compone con la retracción *Spec* $B \to$ *Spec Top* B y con la inyección natural *Spec Max* $A \to$ *Spec* A para dar finalmente una aplicación continua para las topologías de Zariski: *Spec Max* $A \to$ *Spec Top* B.

En este sentido se demuestra la siguiente generalización del teorema de Guelfand - Kolmogoroff.

0. 2. 3. 2. Teorema. Sea A una $*$-álgebra simétrica, B la sub-álgebra de sus elementos acotados en la representación espectral. Entonces si B es regular, A es regular y en este caso *Spec Max* A es homeomorfo a *Spec Top* B (= *Spec Max* B) (Ver [3] teor. 13).

De este modo *Spec Top* B es una compactización natural de *Spec Top* A.

Si A es el anillo de todas las funciones continuas sobre un espacio topológico completamente regular, tal compactización es la universal de CĔCH (Ver [5], teor. 1, pág. 213).

0. 2. 3. 3. Volvamos desde otro punto de vista sobre las compectizaciones de *Spec Top A*. Los ceros de ideales finito-generados de un a. l. c. forman sendos retículos de cerrados base de las topologías de Zariski en *Spec Top A* y en *Spec Max A*; la condición necesaria y suficiente para que estos retículos sean formalmente el mismo es que en A no existan ideales finito - generados densos. Aplicando la teoría espectral de semianillos se ve entonces que en estas condiciones *Spec Max A* es la compactización de *Spec Top A* respecto al retículo de los ceros de ideales finito - generados de A.

La no existencia de ideales finito - generados densos está asegurada para álgebras de FRÉCHET por un teorema de ARENS ([6]) y es fácil demostrar lo mismo para cualquier *-álgebra simétrica:

El teorema (0.2.2.1.) aplicado a álgebras de FRÉCHET permite asegurar que la compactización de que estamos tratando coincide con la compactización WALLMAN. Si además A es regular, *Spec Top A* es normal por (0.2.2.2.) con lo que su compactización WALLMAN y su compactización CĔCH son idénticas.

Este punto de vista está desarrollado para álgebras de FRÉCHET en ([4]).

En consecuencia, si A es FRÉCHET regular, *Spec Max A* es la compactización de CĔCH de *Spec Top A*. Vemos, pues, que el espectro máximo total no distingue dos de tales álgebras con el mismo espectro topológico.

0. 2. 3. 4. Partiendo del teorema (0. 2. 3. 2.) se demuestra el siguiente TEOREMA. En las condiciones de (0.2.3.2.) la condición necesaria y suficiente para que *Spec Top A* sea localmente compacto es que entre los ideales densos de A haya uno mínimo.

Claramente, si hay un ideal denso mínimo sus ceros en *Spec Max A* son justamente la «zona del infinito» *Spec Max A - Spec Top A*, con lo que *Spec Top A* queda como abierto de un compacto, luego localmente compacto. Para demostrar la recíproca se prueba que las funciones de A con soporte compacto forman en B el ideal de nulidades del cerrado *Spec Top B - Spec Top A*.

0. 2. 4. PARTICIONES DE LA UNIDAD Y CARACTERIZACIÓN DE LOS IDEALES CERRADOS.

Para a. l. c. regulares de espectro compacto, la existencia de una partición de la unidad subordinada a cualquier recubrimiento abierto del espectro es una consecuencia casi directa de la no existencia de ideales densos. ([3], corolario 3, pág. 136).

Ignoramos en que condiciones generales puede asegurarse la existencia de particiones de la unidad. Para álgebras de FRÉCHET regulares está demostrada en [7], que es el trabajo con resultados más fuertes en este sentido que conocemos.

Como nuestros problemas se refieren a álgebras de espectro localmente compacto trataremos directamente este caso.

Las demostraciones son directas a partir de los resultados ya enunciados y las daremos en forma abreviada.

0. 2. 4. 1. LEMA. Si A es un a. l. c. cuyos cocientes por ideales cerrados son completos y además es regular semisimple y de espectro localmente compacto, se verifica lo siguiente: para toda seminorma (multiplicativa) p de A existe un compacto $Q \subset Spec\ Top\ A$ tal que si $a \in A$ es nula sobre Q es $p(a) = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $X = Spec\ Top\ A$, I el ideal de las funciones de A con soporte compacto en X; por ser X localmente compacto, el ideal I no tiene ceros en X, luego es denso (teorema de representación espectral). Por tanto, dada una seminorma p de A existe $\varphi \in I$ tal que $p(1-\varphi) < \frac{1}{2}$. Entonces si $a \cdot \varphi = 0$ se tiene $p(a) =$ $= p(a(1-\varphi)) \leq p(a) \cdot p(1-\varphi) \leq \frac{1}{2} p(a)$, luego $p(a) = 0$. Esto demuestra el lema.

0. 2. 4. 2. TEOREMA. Sea A un a. l. c. en las condiciones del lema anterior. Suponemos que $\{a_n\}$ es una sucesión de elementos de A tal que $\{$Soporte de $a_n\}$ es una familia de cerrados localmente finita en $Spec\ Top\ A$. Entonces la serie $\sum_1^\infty a_n$ es absolutamente sumable en A.

DEMOSTRACIÓN. Evidentemente bastará que demostremos que para cada seminorma multiplicativa p de A la serie $\sum p(a_n)$ solo tiene un número finito de términos no nulos, cosa que se deduce inmediatamente de las hipótesis y del lema anterior.

0. 2. 4. 3. COROLARIO. Sea A una *-álgebra de FRÉCHET simétrica regular y semisimple de espectro localmente compacto. Para todo recubrimiento abierto $\{U_\lambda\}$ de $Spec\ Top\ A$ existe una partición de

la unidad $\sum a_n$ subordinada al recubrimiento y formada por funciones de A no negativas.

DEMOSTRACIÓN. El espectro topológico de A es reunión numerable de compactos (A es de FRÉCHET), por lo que podemos encontrar un recubrimiento $\{V_n\}$ subordinado al dado numerable y localmente finito.

Sea $\{W_n\}$ un recubrimiento tal que $\overline{W}_n \subset V_n$; tomemos $b_n \in A$ igual a 1 en W_n y a 0 fuera de V_n aplicando 0.2.2.2.; llamemos $C_n = b_n b_n^*$, observemos que el teorema anterior asegura que $\sum C_n$ es absolutamente sumable, que $\sum C_n$ no tiene ceros en *Spec Top A*, luego es invertible (teor. 0.2.1.) y pongamos $a_n = \frac{C_n}{\sum C_n}$.

0. 2. 4. 4. COROLARIO. En las condiciones del corolario anterior, si φ es una función definida en *Spec Top A* que coincide localmente con funciones de A, es una función de A.

DEMOSTRACIÓN. Fácil usando una partición de la unidad adecuada y usando el teorema.

0. 2. 4. 5. COROLARIO. Si I es un ideal cerrado de A, toda función de A que coincida localmente con funciones de I está en I.

DEMOSTRACIÓN. Como la del anterior.

Los enunciados anteriores deben ser comentados en el lenguaje de la teoría de haces. Si asignamos a cada abierto del espectro de A el anillo de todas las funciones de ese abierto que localmente coinciden con funciones de A obtenemos un haz cuya fibra en x es el anillo de gérmenes de funciones de A en x.

El corolario 0.2.4.4. significa que las secciones globales de este haz son otra vez los elementos del anillo. El corolario 0.2.4.5. significa que toda sección del haz que en cada punto x tome un valor de la imagen de I en esta fibra, es globalmente un elemento de I.

La fibra del haz en el punto x es el cociente de A por el ideal de nulidades de x, que no es un ideal cerrado de A en general, con lo cual no disponemos de topología localmente convexa natural para decir nada de los anillos de gérmenes.

En este punto salta la primera pregunta: si Γ_x es el cierre del ideal de nulidades del punto x ¿bajo qué condiciones puede asegurarse que toda función del anillo A cuya imagen en A/Γ_x esté en $I + \Gamma_x/\Gamma_x$ será una función de I? Este problema de caracterización de los ideales cerrados en términos del fibrado de los anillos topológicos locales es incomparablemente más duro que la caracterización en lenguaje de haces y no se sabe casi nada del problema en general. El teorema de WHITNEY da esta caracterización para las álgebras diferenciables.

0. 2. 5. F^*-ALGEBRAS. Por abreviar los enunciados evitando buscar las condiciones más generales posibles, cosa que pocas veces tiene sentido aquí, damos la siguiente.

0. 2. 5. 1. DEFINICIÓN. Llamaremos F^*-álgebra a toda álgebra de FRÉCHET separable A, regular, semisimple, con involución simétrica y espectro localmente compacto.

Las demostraciones que no damos pueden encontrarse detalladas en [3].

0. 2. 5. 2. TEOREMA. Si A es una F^*-álgebra, *Spec Top* A = *Spec Real* A ([3] teor. 15; el autor de este teorema es E. MICHAEL).

0. 2. 5. 3. TEOREMA. Si A es una F^*-álgebra, toda topología que haga de A un álgebra de FRÉCHET coincide con la dada (Mismas fuentes).

0. 2. 5. 4. TEOREMA. Todo morfismo algebraico entre F^*-álgebras es continuo.

DEMOSTRACIÓN: Sea φ: $A \to B$ este morfismo y sea φ^*: *Spec Real* $B \to$ *Spec Real* A el morfismo traspuesto.

Empecemos por demostrar que $I = ker\ \varphi$ es cerrado. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de elementos de I convergente hacia $a \in A$. Para cada punto y del espectro de B, $\varphi^* y$ es una funcional continua sobre A en virtud del teorema 0.2.5.2. Se tendrá por consiguiente $\varphi(a)(y) = a(\varphi^* y) = \lim a_n (\varphi^* y) = 0$, y como B es semisimple, $\varphi(a) = 0$ luego $a \in I$.

Sea $\bar{A} = A/I$ y $\bar{\varphi}: \bar{A} \to B$ la inyección natural. $\bar{A}$ es semisimple por serlo B. Se usa ahora el argumento conocido desde Guelfand de considerar sobre $\bar{A}$ la topología reunión de la suya propia y la inducida por B y demostrar por semisimplicidad que coincide con la inicial de $\bar{A}$.

0. 2. 6. COINCIDENCIA DE LA LOCALIZACIÓN ALGEBRAICA CON LA TOPOLÓGICA. (Ver [3], teor. 18 y 19).

Sea A una F^*-álgebra. Si asignamos a cada abierto del espectro de A el anillo de las funciones de este abierto que localmente coinciden con funciones de A obtenemos un haz cuyas secciones globales son A otra vez.

Pero este procedimiento de localizar es poco algebraico, pues por ejemplo, no tiene sentido localizar de este modo en el espectro primo.

Es por tanto fundamental saber si la localización topológica que hemos definido coincide o no con la algebraica general. En este sentido se obtiene el siguiente:

TEOREMA. Sea A una F^*-álgebra, U un abierto de su espectro. Entonces toda función en U que coincida localmente con funciones de A es cociente de dos funciones de A. Es decir, la localización topológica coincide con la localización algebraica general. Además el anillo localizado A_u es a su vez una F^*-álgebra de espectro U.

Las demostraciones se encuentran en (3) p. p. 146-148 y sirven de pauta para las que haremos en el capítulo (I) en que trataremos del problema general de la puesta en lenguaje de haz de los módulos topológicos sobre una F^*-álgebra.

0. 2. 7. EL TEOREMA ESPECTRAL DE WHITNEY.

(Para todo este apartado ver [8], capítulo II).

Como ya hemos dicho, el teorema espectral de WHITNEY es una caracterización de los ideales cerrados de un anillo de funciones diferenciables (m veces o ∞) sobre una variedad en términos de los anillos topológicos locales A/Γ_x. El fibrado cuya fibra en cada punto es el anillo A/Γ_x es el «fibrado de jets» asociado al fibrado de linea trivial, en la terminología habitual en la literatura.

Una caracterización del tipo de la que da WHITNEY supone un paso de «propiedades en el punto» a «propiedades en el entorno» y por eso es tan difícil.

Para el anillo $A = C^m(\Omega)$ $(0 \leq m \leq \infty, \Omega$ variedad) se encuentra que Γ_x es el ideal de todas las funciones nulas en x ellas y sus derivadas de todos los órdenes (hasta m ó ∞).

El anillo A/Γ_x es, en el caso m finito, el cociente del anillo de polinomios en tantas variables como dimensión tenga Ω, por el ideal de los de grado $> m$. En el caso $m = \infty$ se tiene el sorprendente teorema siguiente:

0. 2. 7. 1. TEOREMA DE BOREL.

Si $A = C^\infty(\Omega)$, para cada punto $x \in \Omega$, A/Γ_x es el anillo de todas las series formales en un número de variables igual a la dimensión de Ω.

Visto esto, el teorema de WHITNEY se enuncia:

0. 2. 7. 2. TEOREMA ESPECTRAL DE WHITNEY.

Sea $A = C^m(\Omega)$ $(0 \leq m \leq \infty)$, I un ideal de A. La condición necesaria y suficiente para que una función $a \in A$ esté en el cierre de I es que para cada punto $x \in \Omega$ la imagen de a en A/Γ_x (es decir el desarrollo de TAYLOR de a en x) coincida con la de algún elemento de I.

El teorema de WHITNEY es válido también si en vez del anillo A se considera un A-módulo libre finito L. En el capítulo II nosotros demostramos el mismo teorema para un A-módulo de FRÉCHET finito cualquiera.

CAPITULO I

EL LENGUAJE DE HACES PARA MODULOS TOPOLOGICOS

I. 1. PRODUCTO TENSORIAL TOPOLÓGICO DE A-MÓDULOS TOPOLÓGICOS.

I. 1. 1. Comencemos por unas consideraciones puramente algebraicas. Sea A una **C**-álgebra conmutativa. El producto tensorial $A \underset{C}{\otimes} A$ es una **C**-álgebra de modo natural y la aplicación lineal natural $A \underset{C}{\otimes} A \to$ $\to A$ es un morfismo cuyo núcleo, llamado diagonal de A y denotado $\triangle_A$ es el ideal generado por los elementos de la forma $a \otimes 1 - 1 \otimes a$.

Si M y N son dos A-módulos, $M \underset{C}{\otimes} N$ es un $A \underset{C}{\otimes} A$-módulo con la definición natural

$$(\Sigma\, a_i \otimes b_i) \,.\, (\Sigma\, m_j \otimes n_j) = \Sigma\Sigma\, a_i\, m_j \otimes b_i\, n_j$$

Dicho ésto, se comprueba fácilmente que:

$$M \underset{A}{\otimes} N = A \underset{A \otimes A}{\otimes} (M \underset{C}{\otimes} N)$$

donde A se considera como $A \underset{C}{\otimes} A$-módulo vía la igualdad $A =$

$= A \underset{C}{\otimes} A/\triangle$. Así pues se tiene una sucesión exacta de $A \underset{C}{\otimes} A$-módulos:

$$0 \to \triangle_A \,.\, (M \underset{C}{\otimes} N) \to M \underset{C}{\otimes} N \to M \underset{A}{\otimes} N \to 0$$

con esto podemos pasar al problema de topologías.

I. 1. 2. Definición. Dada un a. l. c. A, llamaremos A-módulo topológico a todo A-módulo M dotado de una topología de e. l. c. separado tal que la aplicación bilineal natural $A \times M \to M$ sea continua.

I. 1. 3. Dados dos A-módulos topológicos M, N es fácil comprobar que $M \underset{\pi}{\otimes} N$ dotado de la estructura de $A \underset{\pi}{\otimes} A$-módulo que hemos definido antes es un módulo topológico. Por consiguiente $\overline{\triangle_A \,.\, (M \underset{\pi}{\otimes} N)}$, clausura topológica de $\triangle_A \,.\, (M \underset{C}{\otimes} N)$ en $M \underset{\pi}{\otimes} N$ es un submódulo y el cociente $M \underset{\pi}{\otimes} N/\overline{\triangle_A \,.\, (M \underset{C}{\otimes} N)}$ es un A-módulo topológico que llamaremos producto tensorial topológico de M y N y denotaremos $M \underset{\pi A}{\otimes} N$. Así pues este módulo está definido algebraica y topológicamente por la sucesión exacta

$$0 \to \overline{\triangle_A \,.\, (M \underset{\pi}{\otimes} N)} \to M \underset{\pi}{\otimes} N \to M \underset{\pi A}{\otimes} N \to 0$$

El producto tensorial topológico es, evidentemente un cociente del producto tensorial algebraico y coincide con él si y sólo si $\triangle_A \,.\, (M \underset{C}{\otimes} N)$ es cerrado en $M \underset{\pi}{\otimes} N$.

I. 1. 4. Teorema. Dada un a. l. c. A y dos A-módulos topológicos M, N existe un A-módulo topológico $M \underset{\pi A}{\otimes} N$ univocamente caracterizado por la propiedad universal siguiente:

Existe una aplicación A-bilineal continua $\tau : M \times N \to M \underset{\pi A}{\otimes} N$ tal que para todo A-módulo topológico P, dada una aplicación A-bilineal continua $\varphi : M \times N \to P$ existe un único morfismo continuo $\bar{\varphi} : M \underset{\pi A}{\otimes} N \to P$ tal que $\varphi = \bar{\varphi} \,.\, \tau$.

Demostración. Empecemos demostrando que el producto tensorial topológico tiene la propiedad universal enunciada tomando como τ la aplicación bilineal obvia.

La aplicación A-bilineal continua $\varphi : M \times N \to P$ da una aplicación **C**-lineal continua $M \underset{\pi}{\otimes} N \to P$ (teor. 0.1.1.).

Pero además, por la propiedad universal del producto tensorial algebraico, φ define un único morfismo $M \underset{A}{\otimes} N \to P$, lo cual prueba que en la aplicación $M \underset{\pi}{\otimes} N \to P$ los elementos de $\triangle_A \cdot (M \underset{C}{\otimes} N)$ van al cero, luego también los de su adherencia, por continuidad. Así por paso al cociente obtenemos $\overline{\varphi} : M \underset{\pi A}{\otimes} N \to P$ continua; que φ y $\overline{\varphi}$ se determinan una a otra univocamente es inmediato.

Que el producto tensorial queda caracterizado por la propiedad universal se demuestra como en álgebra.

I. 1. 5. Ejemplo. Si I es un ideal cerrado de A y M un A-módulo topológico,

$$A/I \underset{\pi A}{\otimes} M = M/\overline{I \, . \, M}$$

como se demuestra fácilmente usando la propiedad universal: dado un A-módulo topológico P y una aplicación A-bilineal continua $A/I \times M \to P$, restringida esta aplicación a $1_{A/I} \otimes M$ es un morfismo continuo de M en P nulo en $I \, . \, M$, evidentemente luego también en $\overline{I \, . \, M}$ y por tanto es un morfismo $M/\overline{I \, . \, M} \to P$.

Recíprocamente todo morfismo continuo de $M/\overline{I \, . \, M}$ en P da una aplicación A-bilineal continua $A/I \times M \to P$ que determina univocamente al morfismo dado.

Así pues $M/\overline{I \, . \, M}$ tiene la propiedad universal del producto tensorial topológico, luego coincide con él.

I. 1. 6. Una gran diferencia entre el producto tensorial topológico y el algebraico es que aquél no es exacto a la derecha, como prueba el siguiente ejemplo: tomemos un álgebra de Fréchet A y dos ideales cerrados $I \, . \, J$. Tensorialicemos topológicamente por I la sucesión exacta

$$0 \to J \to A \to A/J \to 0$$

obtendremos, desde luego, una sucesión de morfismos continuos

$$J/\overline{I \, . \, J} \to A/I \to \frac{A/J}{(I + J/J)} \to 0$$

Ahora bien, por argumentos elementales se ve que el cierre de $I + J/J$ en A/J es $(\overline{I + J})/J$.

La sucesión anterior es, pues al menos algebraicamente:

$$J/\overline{I \cdot J} \to A/I \to A/\overline{I + J} \to 0$$

La imagen del primer morfismo es $I + J/I$, mientras que el núcleo del segundo es $(\overline{I + J})/I$, que no coincide a menos que $I + J$ sea cerrado, cosa que en general no ocurre.

Lo más aproximado a la exactitud a la derecha que podemos afirmar en general es:

I. 1. 7. Proposición. Sea $M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de A-módulos topológicos y morfismos continuos. Suponemos además que ψ es abierta. Sea N un A-módulo topológico. Entonces en la sucesión

$$M' \underset{\pi A}{\otimes} N \xrightarrow{\varphi \otimes 1} M \underset{\pi A}{\otimes} N \xrightarrow{\psi \otimes 1} M'' \underset{\pi A}{\otimes} N \longrightarrow 0$$

$\psi \otimes 1$ es un epimorfismo topológico y la imagen de $\varphi \otimes 1$ es *densa* en el núcleo de $\psi \otimes 1$.

Demostración. En virtud del teorema (0.1.1.) al tensorializar sobre **C** se obtiene un epimorfismo topológico: $M \underset{\pi}{\otimes} N \to M'' \underset{\pi}{\otimes} N$. De aquí se deduce fácilmente que si en la sucesión exacta

$$0 \to \varphi(M') \underset{C}{\otimes} N \to \varphi(M') \underset{C}{\otimes} N + \triangle \,.\, (M \underset{C}{\otimes} N) \to \triangle \,.\, (M'' \underset{C}{\otimes} N) \to 0$$

dotamos al primer y segundo espacio de la topología inducida por $M \underset{\pi}{\otimes} N$ y al tercero de la inducida por $M'' \underset{\pi}{\otimes} N$, la penúltima flecha es un epimorfismo topológico, por lo que al tomar el cierre de estos subespacios en $M \underset{\pi}{\otimes} N$ y $M'' \underset{\pi}{\otimes} N$ se obtiene una sucesión exacta

$$0 \to \varphi(M') \underset{C}{\otimes} N \to \overline{\varphi(M') \underset{C}{\otimes} N + \triangle \,.\, (M \underset{C}{\otimes} N)} \to \overline{\triangle \,.\, (M'' \underset{C}{\otimes} N)} \to 0$$

de la que se deduce fácilmente esta otra:

$$0 \longrightarrow \overline{\varphi(M') \underset{C}{\otimes} N + \triangle \,.\, (M \underset{C}{\otimes} N)} / \overline{\triangle \,.\, (M \underset{C}{\otimes} N)} \longrightarrow$$
$$\longrightarrow M \underset{\pi A}{\otimes} N \xrightarrow{\psi \otimes 1} M'' \underset{\pi A}{\otimes} N \longrightarrow 0$$

donde $\psi \otimes 1$ es un epimorfismo topológico como se deduce fácilmente de que $M \underset{\pi}{\otimes} N \to M'' \underset{\pi}{\otimes} N$ lo sea. Para terminar la demostración, observemos que en la aplicación natural

$$M' \underset{\pi A}{\otimes} N = M' \underset{\pi A}{\otimes} N / \overline{\triangle \,.\, (M' \underset{C}{\otimes} N)} \to$$
$$\to \overline{\triangle \,.\, (M \underset{C}{\otimes} N) + \varphi\,(M') \underset{C}{\otimes} N} / \overline{\triangle \,.\, (M \underset{C}{\otimes} N)}$$

la imagen de $M' \underset{\pi A}{\otimes} N$ es densa en el segundo espacio, espacio cuya topología es, evidentemente la inducida por $M \underset{\pi A}{\otimes} N$.

I. 1. 8. El completado de $M \underset{\pi A}{\otimes} N$ se denotará $M \underset{A}{\widehat{\otimes}} N$. En el caso en que M y N sean de FRÉCHET se deduce fácilmente de las definiciones y de la proposición 0.1.6. que $M \widehat{\otimes} N$ es el cociente de $M \widehat{\otimes} N$ por el cierre de $\triangle \,.\, (M \underset{C}{\otimes} N)$ en $M \widehat{\otimes} N$.

1. 2. HAZ ASOCIADO A UN A-MÓDULO DE FRÉCHET.

INTRODUCCIÓN. En todo este apartado, A será una F^*-álgebra de espectro localmente compacto. El teorema 0.2.6. dado para tales álgebras admite un enunciado completamente general para módulos de Fréchet, que damos en el teorema 1.2.2. Es preciso observar que este teorema no vale para módulos cualesquiera si no son FRÉCHET; un contraejemplo lo encontraremos en I.3. al estudiar el haz asociado al dual de A.

I. 2. I. Sea M un A-módulo. Para cada abierto U de X denotaremos M_U el A_U-módulo $A_U \underset{A}{\otimes} M$; M_U es el conjunto de las clases de equivalencia de las fracciones $\frac{\overline{m}}{a}$ ($\overline{m} \in M$, $a \in A$ sin ceros en U) donde $\frac{\overline{m}}{a} \sim \frac{\overline{m}'}{a'}$, si y solo si existe $b \in A$ sin ceros en U tal que $b \,.\, (a\,\overline{m}' - - a'\,\overline{m}) = 0$.

Para cada par de abiertos $U \supset V$ el morfismo natural $A_U \to A_V$ da un morfismo $\varrho_V^U : M_U \to M_V$. Los morfismos $\varrho_V^{U'}$ satisfacen las condiciones de transitividad necesarias para que podamos hablar del prehaz $\mathcal{M}$ de los módulos locales de M; $\mathcal{M}$ es un prehaz sobre el haz $\mathcal{A}$ de los anillos locales de A.

El teorema fundamental es el siguiente:

1. 2. 2. TEOREMA. Si A es una F^*-álgebra de espectro topológico localmente compacto X y M es un A-módulo de FRÉCHET, el prehaz definido asignado a cada abierto U de X el A_U-módulo $A_U \underset{A}{\otimes} M$ es un haz sobre X.

DEMOSTRACIÓN. La primera condición de haz es fácil de demostrar: Sea U un abierto de X, U_i una familia de abiertos de reunión U, $\left(\frac{m}{b}\right)_U = \bar{m}_U \in M_U$. Supongamos que $\varrho^U_{U_i}\, \bar{m}_U = \bar{m}_{U_i} = 0$ para todo i. Hemos de demostrar que $\bar{m}_U = 0$.

Puesto que A_U es una F^*-álgebra de espectro U, localmente compacto (teor. 0.2.6.), podemos extraer un subrecubrimiento numerable de U.

Supongamos entonces que $\{U_i\}$ es una familia numerable. La hipótesis significa que para cada i existe $a_i \in A$ sin ceros en U_i de modo que $a_i \,.\, \bar{m} = 0$. Sea $a = \sum_1^\infty \frac{a_i\, a_i^*}{2^i\,(1 + p_i\,(a_i\, a_i^*))}$ donde $\{p_i\}$ es una familia fundamental creciente de seminormas de A; $a \in A$ y a no tiene ceros en U. Por la continuidad respecto de A de la multiplicación $A \times M \to M$ se deduce que $a \,.\, \bar{m} = 0$ luego $\left(\frac{m}{b}\right)_U = 0$.

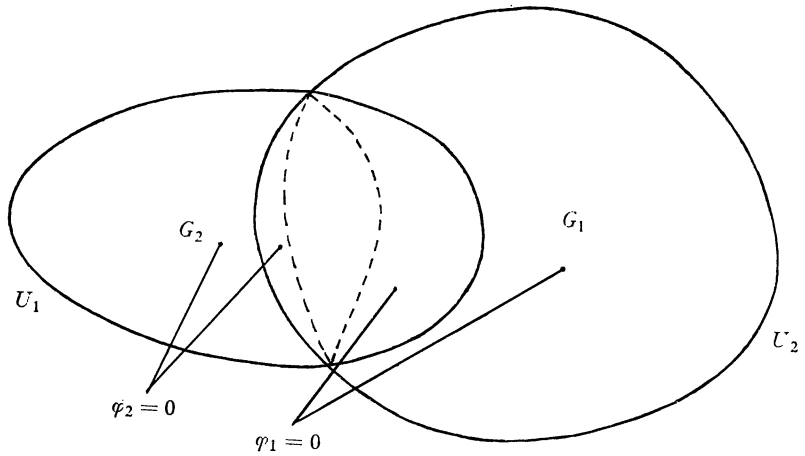
La segunda condición de haz, de «acoplamiento de secciones» es menos fácil de probar. Necesitaremos el siguiente.

LEMA. Sea $U = U_1 \cup U_2$; sean $\bar{m}_{U_1}$, $\bar{m}_{U_2}$ elementos de M_{U_1}, M_{U_2} respectivamente, tales que sus restricciones a $U_1 \cap U_2$ coincidan. Existe entonces un elemento de M_U cuyas restricciones a U_1, U_2 coinciden con $\bar{m}_{U_1}$, $\bar{m}_{U_2}$.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA. Sea $\bar{m}_{U_i} = \left(\frac{m_i}{a_i}\right)_{U_i}$ donde $a_i \in A$ no tiene ceros en U_i; podemos suponer además que a_i es no negativa; la coincidencia en $U_1 \cap U_2$ significa que existe b sin ceros en $U_1 \cap U_2$ tal que $b \,.\, (a_1\, \bar{m}_2 - a_2\, \bar{m}_1) = 0$.

Podemos suponer además que b es no negativa multiplicando por b^*. Sean $F_1 = \complement\, U_1$, $F_2 = \complement\, U_2$ en U; F_1 y F_2 son cerrados disjuntos en el espacio normal U; por tanto existen cerrados de U, G_1, G_2 tales que $F_i \subset \mathring{G}_i$ y que $G_1 \cap G_2 = \phi$.

Como A_U es una F^*-álgebra, luego verifica (0.2.2.2.), podemos encontrar funciones de A_U, φ_1, φ_2 tales que φ_i sea cero en G_i y que $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$.



La función $\frac{\varphi_1}{a_1}$ de A_{U_1} prolongada por cero en F_1 coincide localmente con funciones de A_U, luego pertenece a A_U (0.2.4.4.). Análogamente, $\frac{\varphi_2}{a_2}$ prolongada por cero en F_2 pertenece a A_U. Por consiguiente podemos definir $\overline{m}_U \in M_U$ poniendo:

$$\overline{m}_U = \frac{\varphi_1}{a_1}\,\overline{m}_1 + \frac{\varphi_2}{a_2}\,\overline{m}_2 \in M_U$$

Demostremos que $\overline{m}_U$ coincide en U_i con $\overline{m}_{U_i}$. Tomemos por ejemplo $\overline{m}_{U_1}$. Tenemos

$$\overline{m}_U - \overline{m}_{U_1} = \frac{\varphi_1}{a_1}\,\overline{m}_1 + \frac{\varphi_2}{a_2}\,\overline{m}_2 - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{a_1}\,\overline{m}_1 = \frac{\varphi_2}{a_2}\,\overline{m}_2 - \frac{\varphi_2}{a_1}\,\overline{m}_1$$

donde $\frac{\varphi_2}{a_2}$ se toma prolongada por cero como dijimos antes y restringida a U_1. Teniendo en cuenta que el soporte de φ_2 está contenido en U_2, y por tanto que en los puntos de este soporte a_2 es positiva y teniendo en cuenta que en el espectro de una F^*-álgebra todo cerrado coincide con el conjunto de los ceros de una función del álgebra no negativa (téngase en cuenta que el ideal de nulidades del cerrado debe ser numerablemente generado por la separabilidad del álgebra y fórmese una serie conveniente con los generadores), podemos sumarle a a_2 una función no negativa b' de A_U cuyos ceros sean el soporte de φ_2 obteniendo de este modo una función a'_2 de A_U sin ceros en U y que coincida con a_2 en el soporte de φ_2.

Entonces tendremos la siguiente igualdad en M_{U_1}:

$$\overline{m}_U - \overline{m}_{U_1} = \frac{\varphi_2}{a'_2}\,\overline{m}_2 - \frac{\varphi_2}{a_1}\,\overline{m}_1 = \frac{\varphi_2\, a_1\, \overline{m}_2 - \varphi_2\, a'_2\, \overline{m}_1}{a_1\, a'_2}$$

Sea $C = b + b'$; C no tiene ceros en U_1 porque los puntos de U_1 en que b' es cero son del soporte de φ_2 luego de $U_1 \cap U_2$ donde b toma valores positivos.

Entonces

$$\begin{aligned}\varphi_2 \,.\, C\,(a_1\,\overline{m}_2 - a'_2\,\overline{m}_1) &= \varphi_2 \,.\, b \,.\, (a_1\,\overline{m}_2 - a'_2\,\overline{m}_1) = \\ &= \varphi_2\, b\,(a_1\,\overline{m}_2 - a_2\,\overline{m}_1) = 0\end{aligned}$$

Y por tanto $\overline{m}_U - \overline{m}_{U_1} = 0$ en M_{U_1}. Esto acaba la demostración del lema.

Terminemos la demostración del teorema.

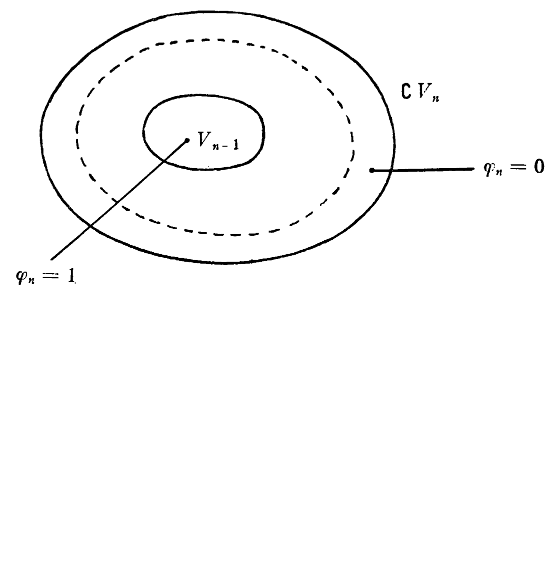
Sea $\{U_\lambda\}$ una familia de abiertos de reunión U. Supongamos que en cada U_λ se da $\overline{m}_{U_\lambda} \in M_{U_\lambda}$ de modo que en $U_\lambda \cap U_\mu$ coincidan m_{U_λ} y m_{U_μ}. Hemos de probar que existe $\overline{m}_U$ cuyas restricciones a los U_λ son los $\overline{m}_{U_\lambda}$ dados.

Podemos extraer un subrecubrimiento y restringirnos a considerar el caso en que la familia de abiertos es numerable, $\{U_n\}$.

El lema anterior nos permite sustituir cada U_n por $U_1 \cup \ldots \cup U_n$ de modo que podemos considerar que $U_1 \subset U_2 \subset \ldots$

Como U es localmente compacto y σ-compacto, podemos tomar una sucesión de abiertos relativamente compactos, $\{V_n\}$ tal que el cierre de cada uno esté contenido en el siguiente. A continuación podemos definir $\overline{m}_{V_n}$ como la restricción a V_n de cualquiera de los $\overline{m}_{U_K}$ con $U_K \supset V_n$.

En definitiva, podemos suponer dados abiertos $V_1 \subset V_2 \ldots$, tales que el cierre de cada uno esté en el siguiente, y secciones $\overline{m}_{V_1}, \overline{m}_{V_2}, \ldots$ tales que la restricción de $\overline{m}_{V_n}$ a V_{n-1} sea $\overline{m}_{V_{n-1}}$.



A continuación, por (0.2.2.2.) y por ser el anillo simétrico, podemos encontrar funciones φ_n de A no negativas, $\varphi_n = 1$ sobre V_{n-1} y $\varphi_n = 0$ en un entorno de $\complement V_n$.

Sea $\overline{m}_{V_n} = \dfrac{\overline{m}_n}{a_n}$ con a_n sin ceros en V_n; podemos además suponer que a_n es cero fuera de V_n.

$\dfrac{\varphi_n}{a_n}$ pertenece localmente a A, luego es de A, luego $\overline{m}'_n = \dfrac{\varphi_n}{a_n}\,\overline{m}_n \in M$ y la restricción de $\overline{m}'_n$ a V_{n-1} coincide con $\overline{m}_{V_{n-1}}$: en efecto,

$$\frac{\varphi_n}{a_n}\,\overline{m}_n - \frac{\overline{m}_{n-1}}{a_{n-1}} = \frac{\varphi_n\, a_{n-1}\,\overline{m}_n - a_n\,\overline{m}_{n-1}}{a_n\, a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}\,\overline{m}_n - a_n\,\overline{m}_{n-1}}{a_n\, a_{n-1}}$$

que es cero en $M_{V_{n-1}}$.

Podemos, pues, sustituir las $\overline{m}_n$ por las $\overline{m}'_n$ y suponer que las $\overline{m}_{V_n}$ son restricciones a cada V_n de elementos de M, que llamaremos $\overline{m}_n$ (ahora $\overline{m}_{n-1}$ es lo que hemos llamado antes $\overline{m}'_n$).

Sea $p_1 \leq p_2 \leq \ldots$ una familia fundamental de seminormas para A; $q_1 \leq q_2 \leq \ldots$ una familia fundamental de seminormas para M. Definamos

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n}{2^n\,(1 + p_n(\varphi_n))\,(1 + q_n(\varphi_n\,\overline{m}_n))},$$

$$\overline{m} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n\,\overline{m}_n}{2^n\,(1 + p_n(\varphi_n))\,(1 + q_n(\varphi_n\,\overline{m}_n))}$$

Veamos que $\dfrac{\overline{m}}{\varphi}$ es la sección buscada.

Tenemos $\overline{m} - \varphi \,.\, \overline{m}_K = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n\,\overline{m}_n - \varphi_n\,\overline{m}_K}{2^n .\,(\quad).\,(\quad)}$

$$\varphi_K\,(\overline{m} - \varphi\,\overline{m}_K) = \sum_{n<K} \frac{\varphi_n\,\overline{m}_n - \varphi_n\,m_K}{2^n .\,(\quad).\,(\quad)} + \sum_{n>K} \frac{\varphi_K\,\overline{m}_n - \varphi_K\,\overline{m}_K}{2^n\,(\quad).\,(\quad)}$$

puesto que para $i < j$ es $\varphi_i \,.\, \varphi_j = \varphi_i$. Ahora bien, para $n < K$ es $\varphi_n\,(\overline{m}_n - \overline{m}_K) = 0$ pues existe $b \geqslant 0$ sin ceros en V_n tal que $b \,.\, (\overline{m}_n - \overline{m}_K) = 0$ y como puede encontrarse b' invertible en A y coincidente con b en el soporte de φ_n, será $\varphi_n\, b = \varphi_n\, b'$; luego $b'\,\varphi_n\,(\overline{m}_n - \overline{m}_K) = 0$, luego $\varphi_n \,.\, (\overline{m}_n - m_K) = 0$ en M.

El mismo argumento prueba que $\varphi_K\,(\overline{m}_n - \overline{m}_K) = 0$ para $n > K$. De aquí que $\overline{m} - \varphi\,\overline{m}_K = 0$ en V_{K-1}, luego $\dfrac{\overline{m}}{\varphi}$ coincide en V_{K-1}

con $\bar{m}_K$ y por tanto con $\bar{m}_{K-1}$. Entonces $\dfrac{\bar{m}}{\varphi}$ es la sección de M_U que buscábamos.

1. 2. 3. COROLARIO. (TEOREMA DE LOCALIZACIÓN GENERALIZADO)

Sea $\mathfrak{A}$ una F^*-álgebra conteniendo a A como subálgebra (de modo puramente algebraico).

Sea Y el espectro de $\mathfrak{A}$, $\pi : Y \to X$ el morfismo asociado a la inyección $A \to \mathfrak{A}$. Sea U un abierto de X, $V = \pi^{-1}(U)$ su antiimagen en Y. Se tiene $\mathfrak{A}_V = A_U \underset{A}{\otimes} \mathfrak{A}$.

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente ver que toda función de $\mathfrak{A}_V$ coincide en un entorno $\pi^{-1} W$ de cada fibra $\pi^{-1} \times (x \in W \subset U)$ con una función de $A_U \underset{A}{\otimes} \mathfrak{A}$: en efecto, basta tomar W fuertemente contenido en U, una función $a \in A$ que valga 1 en W y 0 en un entorno de $\complement U$ y multiplicar por ella la función de $\mathfrak{A}_V$ correspondiente.

En particular podemos considerar el caso en que A y $\mathfrak{A}$ tengan el mismo espectro. Sea entonces $\phi \in \mathfrak{A}$, U el abierto en que ϕ es distinta de 0; $\dfrac{1}{\phi} \in \mathfrak{A}_U$, luego existen $\psi \in \mathfrak{A}$, $a \in A$ tales que $\dfrac{1}{\phi} = \dfrac{\psi}{a}$, luego $\phi \,.\, \psi = a$ en U y como podemos tomar a nula en todo punto fuera de U, esta igualdad valdrá en todo punto.

Por ejemplo, si X es una variedad C^∞, para toda función continua ϕ sobre X existe otra ψ con los mismos ceros que ϕ y tal que $\phi \,.\, \psi$ sea infinitamente diferenciable.

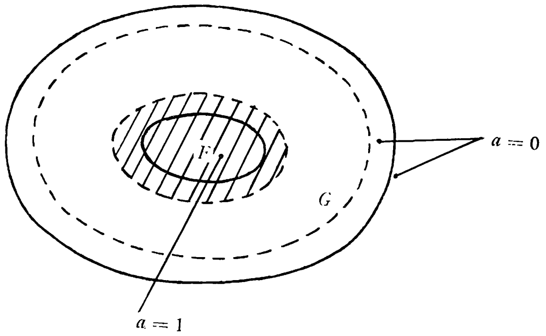
1. 2. 4. TEOREMA. Para todo A-módulo de FRÉCHET M y todo abierto U del espectro de A, el A_U-módulo $M_U = A_U \otimes M$ admite una topología de A_U-módulo de FRÉCHET tal que el functor $M \to M_U$ de la categoría de los A-módulos de FRÉCHET a la categoría de los A_U-módulos de FRÉCHET es exacto en sentido algebraico y topológico (que el functor es exacto en sentido algebraico es una propiedad puramente algebraica de la localización que significa que A_U es un A-módulo plano, cosa fácil de probar y que ya damos por supuesta).

DEMOSTRACIÓN. Recordemos antes de nada cual es la topología (o, si se quiere, la definición) de A_U. Se demuestra fácilmente a partir de las propiedades de A que U es reunión de una familia numerable de cerrados $Q_1 \subset Q_2 \subset \ldots$ cada uno contenido en el interior del siguiente. Llamemos I_n al ideal de las funciones de A que son nulas en Q_n y comprobaremos fácilmente que $\varprojlim A/I_n$ es el anillo de todas las funciones en U que coinciden localmente con funciones de A en U, es decir, es A_U (ver (3), teor, 19), con lo que podemos tomar para A_U esta topología límite proyectivo, topología que es independiente de la familia de cerrados que tomemos como demuestra (0.2.5.3.).

Dicho esto demostraremos el siguiente:

LEMA. Sean F, G dos cerrados de X tales que $F \subset \mathring{G}$; sean $I = Ker\ F$, $J = Ker\ G$ sus ideales respectivos. Se verifica que $\overline{J \,.\, M} \subset I \,.\, M$.

Demostración del lema



Tomemos un entorno cerrado de F conteniendo en $\mathring{G}$ y un entorno cerrado de $\complement\, \mathring{G}$ como se esquematiza en el gráfico.

Sean a, b dos funciones de A tales que $a + b = 1$ y que a sea cero en el entorno de $\complement\, \mathring{G}$ y b sea cero en el entorno de F que hemos considerado. Sea $\overline{m} \in \overline{J \,.\, M}$; dado $\varepsilon > 0$ y una seminorma q en M existirá $\overline{m}' \in J \,.\, M$ tal que $q\,(\overline{m} - \overline{m}') < \varepsilon$ como $a \,.\, \overline{m}' = 0$ tendremos

$$q\,(a \,.\, \overline{m}) = q\,(a\,(\overline{m} - \overline{m}')) \leq p\,(a) \,.\, q\,(\overline{m} - \overline{m}') < p\,(a) \,.\, \varepsilon$$

para una cierta seminorma p de A dependiente solo de q. Como ε es arbitrario será $q\,(a \,.\, \overline{m}) = 0$, luego $\overline{m} = (a + b) \,.\, \overline{m} = b \,.\, \overline{m}$ y puesto que b es cero en F, $\overline{m} \in I \,.\, M$, como queríamos demostrar.

Tomemos una cadena de cerrados Q_n como hemos dicho antes y sus ideales correspondientes I_n.

Sea $M_n = M/\overline{I_n \,.\, M}$; para $n \geqslant K$ se tiene un morfismo canónico $M_n \to M_K$ lo que permite definir el A-módulo $\widehat{M}_U, = \varprojlim M_n$, que es FRÉCHET. Vamos a ver que algebraicamente se verifican las igualdades

$$M_U = \varprojlim M/I_n\, M = \varprojlim M/\overline{I_n\, M} = \widehat{M}_U$$

El morfismo

$$M_U \to \varprojlim M/I_n\, M = \varprojlim\, (A/I_n \otimes_A M)$$

es el definido de modo natural por los morfismos $A_U \to A/I_n$. Este morfismo es inyectivo, pues si $\frac{\overline{m}}{a} \in M_U$ tiene imagen nula en el límite proyectivo es que para cada n es $\overline{m} \in I_n . M$, es decir existen $b_i \in I_n$, $\overline{m}_i \in M$ tales que $\overline{m} = \sum b_i . \overline{m}_i$, de donde se deduce tomando $\varphi_n \in A$ igual a 1 en Q_{n-1} y a 0 fuera de Q_n que $\varphi_n \overline{m} = 0$. Podemos suponer además que φ_n es no negativa usando la involución. Entonces la función $\varphi = \sum_1^\infty \frac{\varphi_n}{2^n (1 + p_n(\varphi_n))}$ anula $\overline{m}$ y no tiene ceros en U, luego $\frac{\overline{m}}{a} = 0$ en M_U.

Que el morfismo es exhaustivo se deduce de la segunda condición de haz, verificada por M_U en virtud del teorema anterior.

Falta ver que $\varprojlim M/I_n M = \varprojlim M/\overline{I_n . M}$ y esto se deduce del lema anterior que demuestra las inclusiones $I_n M \subset \overline{I_n M} \subset I_{n-1} M$ y por tanto nos permite definir los morfismos del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & M/I_{n+1} M \arrow[r] \arrow[d] & M/I_n M \arrow[r] \arrow[d] & M/I_{n-1} M \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & M/\overline{I_{n+1} \cdot M} \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & M/\overline{I_n M} \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & M/\overline{I_{n-1} \cdot M} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

que dan morfismos inversos uno del otro entre los dos límites proyectivos, lo que demuestra el isomorfismo.

Dotado M_U de la topología límite proyectivo de los M_n es un A-módulo de FRÉCHET y es fácil ver que, por la definición de la topología de A_U es también un A_U-módulo de FRÉCHET.

La exactitud algebraica del functor $M \to M_U$ está asegurada por la platitud de A_U como A-módulo. Por otra parte, si $M \to N$ es un morfismo continuo de A-módulos de FRÉCHET, la continuidad de los morfismos $M/\overline{I_n M} \to N/\overline{I_n . N}$ asegura la continuidad de $M_U \to N_U$. Entonces, si $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ es una sucesión exacta de A-módulos de FRÉCHET, la sucesión

$$0 \to M'_U \to M_U \to M''_U \to 0$$

es algebraicamente exacta y de morfismos continuos. Se aplica el teorema del gráfico cerrado y se ve trivialmente que es topológicamente exacta.

1. 2. 5. Corolario. Para todo A-módulo de Fréchet M, $A_U \underset{\pi A}{\otimes} M$ coincide algebraicamente con M_U y el morfismo $A_U \underset{\pi A}{\otimes} M \to M_U$ es continuo.

Demostración. Por ser M_U un A_U-módulo de Fréchet, el morfismo **C**-lineal $A_U \underset{\pi}{\otimes} M \to M_U$ es continuo, luego de núcleo cerrado. De aquí que $A_U \underset{\pi A}{\otimes} M = A_U \underset{A}{\otimes} M$ algebraicamente. La continuidad de $A_U \underset{\pi A}{\otimes} M \to M_U$ está garantizada por la propiedad universal I.1.4.

Salvo casos muy sencillos como por ejemplo cuando M_U es finito, no sabemos en que condiciones coinciden las dos topologías sobre M_U.

1. 3. Haz asociado al dual de A . distribuciones.

1. 3. 1. Introducción y definiciones.

Sea A una F^*-álgebra de espectro localmente compacto y sea I el ideal de las funciones de A con soporte compacto en *Spec Top* $A = X$.

El ideal I se dota de topología límite inductivo de sus subespacios I_K donde I_K es el ideal de las funciones de A con soporte contenido en el compacto K. Como podemos tomar una cadena exhaustiva de compactos $Q_1 \subset Q_2 \subset \ldots$ en X, I es un espacio $\mathcal{L}\mathcal{F}$ estricto y su topología no depende de la cadena de compactos elegida.

El dual de I, I' se llamará espacio de distribuciones asociado a A; debido a la propiedad de las partes acotadas en un límite inductivo estricto de e. l. c. resulta que I' con su topología fuerte coincide con $\varprojlim I'_K$ dotados los I'_K de sus topologías fuertes.

I' está dotado de modo natural de una estructura de A-módulo, pero en general no es un A-módulo topológico. Lo único que podemos decir en general es que la aplicación bilineal $A \times I' \to I'$ es separadamente continua, pero por ejemplo en el caso en que $A = C^\infty(\mathbf{R})$, I' son las distribuciones de Schwartz sobre la recta y la multiplicación $A \times I' \to I'$ no es continua simultaneamente en las dos variables. Sin embargo, cuando los I_K son espacios de Banach (caso por ejemplo, de las funciones m veces diferenciables, con $m < \infty$), I'_K es un espacio de Banach y I' es un Fréchet, en cuyo caso por ser separadamente continua la multiplicación ya es automáticamente continua.

Si U es un abierto de X y A_U es la localización de A en U, tenemos un morfismo natural $A \to A_U$ y una inyección continua $I_U \to I$ (donde I_U es el ideal de las funciones a soporte compacto de A_U, no la localización algebraica de I en U), que pasando al dual nos da un morfismo $I' \to I'_U$ del mismo sentido que el morfismo $A \to A_U$. Esto que se hace con A y A_U puede hacerse con A_V y A_U siempre que $V \supset U$ y nos permite definir de modo evidente un prehaz, que llamaremos prehaz de distribuciones asociado a A. La localización utilizada en la definición de este prehaz es «topológica». Veremos en que casos coincide con la localización algebraica y un caso en que no coincide.

En general demostraremos que el prehaz de distribuciones es un haz. Esta es una razón para tomar las distribuciones en lugar del dual de A.

1. 3. 2. HAZ DE DISTRIBUCIONES.

1. 3. 2. 1. OBSERVACIÓN. Dado un compacto Q de X y dos abiertos U, V, que contienen a Q, la topología de I_Q inducida por A, la inducida por I_U y la inducida por I_V coinciden (propiedad de los $\mathcal{L}\mathcal{F}$ estrictos). Una distribución en U será un elemento de I'_U, es decir una funcional lineal sobre I_U cuyas restricciones a todo I_Q, $Q \subset U$ son continuas.

I. 3. 2. 2. TEOREMA. El prehaz $\mathcal{J}$ de distribuciones es un haz.

DEMOSTRACIÓN. Para ver que es haz hay que demostrar que dado un recubrimiento abierto $\{U_\alpha\}$ de U y dados $\omega_\alpha \in I'_{U_\alpha}$ tales que en los morfismos $I'_{U_\alpha} \to I'_{U_\alpha \cap U_\beta}$, $I'_{U_\beta} \to I'_{U_\alpha \cap U_\beta}$ ω_α y ω_β tengan la misma imagen, entonces existe una única $\omega \in I'_U$ que restringida a U_α coincide con ω_α.

Como A_U y A tienen las mismas propiedades supondremos que $U = X$. Tomemos un recubrimiento numerable $\{V_n\}$ localmente finito y más fino que $\{U_\alpha\}$. Por morfismos de restricción tendremos una distribución ω_n en cada V_n. Tomemos una partición de la unidad $\sum a_n$ subordinada al recubrimiento $\{V_n\}$. Para cada compacto Q solo hay un número finito de funciones a_n no nulas en Q. Definamos ω en I_Q poniendo $\omega(\varphi) = \sum_n \omega_n(\varphi \,.\, a_n)$. El morfismo $I_Q \to I_{V_n}$

$$\varphi \to \varphi \,.\, a_n$$

es continuo, luego ω es una forma lineal continua sobre I_Q para cada Q luego $\omega \in I'$. La demostración de que ω coincide en cada V_n con ω_n y de que es única es fácil.

I. 3. 3. COMPARACIÓN CON LA LOCALIZACIÓN ALGEBRAICA.

El problema es saber en que condiciones el haz $\mathcal{J}$ de las distribuciones coincide con el haz asociado al A-módulo I' por el procedimiento algebraico de asignar a cada abierto U el A_U-módulo $A_U \underset{A}{\otimes} I'$.

I. 3. 3. 1. DEFINICIÓN. Diremos que A es localmente Banach si para cada compacto Q de X el anillo $A/ker\ Q$ es de BANACH. En las condiciones en que estamos, esto equivale a decir que A es límite proyectivo estricto de álgebras de BANACH y también que los ideales I_Q con la topología inducida por A son espacios de BANACH.

I. 3. 3. 2. TEOREMA. Si A es localmente BANACH, entonces $I'_U = A_U \underset{A}{\otimes} I'$.

DEMOSTRACIÓN. Como hemos dicho en la introducción, si tomamos para cada abierto U una sucesión exhaustiva de compactos $Q_1 \subset Q_2 \subset \dots \subset U$ y llamamos $I_n = I_{Q_n}$, se tiene $I_U = \varinjlim I_n$, $I'_U = \varprojlim I'_n$, igualdad algebraica y topológica tomando topologías fuertes; como los I_n son BANACH, también son los I'_n, por lo que I'_U es FRÉCHET para todo abierto U, por lo que coincide con el A_U-módulo de las secciones globales del haz de sus localizaciones algebraicas (teor. 1.2.2.). Esto mismo ocurre con $A_U \underset{A}{\otimes} I'$ (teor. 1.2.4.) y como los haces de que tratamos son haces «mou» sobre U, para ver que tienen las mismas secciones globales es suficiente ver que tienen la misma fibra en cada punto, cosa muy fácil.

Si se quiere evitar hacer referencia a teoremas generales anteriores también puede hacerse una demostración directa; demostraremos que las distribuciones sobre U son cociente de distribuciones sobre X por funciones sin ceros en U: tomemos una sucesión de compactos $Q_1 \subset Q_2 \subset \dots$ de reunión U, cada uno contenido en el interior del siguiente; tomemos sendas funciones de A no negativas, a_n igual a 1 en Q_n y a 0 fuera de Q_{n+1}. Sea entonces $\omega_U \in I'_U$ y definamos $a_n \cdot \omega_U$ como elemento de I' de modo natural. En estas condiciones la series

$$\omega = \sum_1^\infty \frac{a_n\, \omega_U}{2^n\,(1 + p_n(a_n))\,(1 + q_n(a_n\, \omega_U))}\ ;$$

$$a = \sum_1^\infty \frac{a_n}{2^n\,(1 + p_n(a_n))\,(1 + q_n(a_n\, \omega_U))}\ ;$$

(p_n seminormas en A, q_n seminormas en I' como siempre) son absolutamente sumables, a es invertible en A_U y se tiene $\omega_U = \frac{\omega}{a}$ sobre I_U.

1. 3. 3. 3. CONTRAEJEMPLO. Cuando A no es localmente BANACH el teorema no es en general cierto. Por ejemplo, sea A el anillo de las funciones de clase C^∞ sobre la circunferencia, I' consiste en este caso en las distribuciones de SCHWARTZ sobre la circunferencia, que son de orden finito por ser la circunferencia compacta. Sin embargo considerada la recta como abierto de la circunferencia, hay distribuciones de orden no finito, que no pueden aparecer por localización algebraica de distribuciones de orden finito (observese que al localizar el orden de una distribución no aumenta).

1. 3. 4. Finalicemos este apartado de las distribuciones asociadas a A enunciando algunas propiedades generales que son completamente análogas a las verificadas por las «verdaderas distribuciones» de SCHWARTZ; las demostraciones son casi copia y las damos en forma de telegrama.

1. 3. 4. 1. Es obvio que dada $\omega \in I'$, para cada compacto Q de X existe una seminorma p_Q de A y una constante C_Q tales que $|\omega(\varphi)| \leq C_Q \cdot p_Q(\varphi)$ para toda $\varphi \in I_Q$.

1. 3. 4. 2. DEFINICIÓN. Soporte de una distribución $\omega \in I'$ es su soporte como sección del haz $\mathcal{J}$.

Así, un punto de X está fuera del soporte de ω si existe un entorno de ese punto en el que la restricción de ω es cero.

1. 3. 4. 3. TEOREMA. Si $\{U_\lambda\}$ es un recubrimiento abierto del soporte F de una distribución ω, ω puede descomponerse en suma localmente finita y convergente $\omega = \sum \omega_\alpha$ donde ω_α tiene su soporte en $U_\alpha \cap F$.

DEMOSTRACIÓN. Por una partición de la unidad.

1. 3. 4. 4. TEOREMA. A', espacio dual de A coincide con el espacio de las distribuciones $\in I'$ que tienen soporte compacto.

DEMOSTRACIÓN. Como la inyección $I \to A$ es continua (dotado I de su topología limite inductivo), da por trasposición un morfismo $I' \leftarrow A'$, que es inyectivo por ser I denso en A.

Por otra parte, tomemos la sucesión de compactos Q_n como siempre y pongamos $A = \varprojlim A / ker\, Q_n$ como siempre. Por tanto, algebraicamente será $A' = \varinjlim (A / ker\, Q_n)' = \varinjlim (ker\, Q_n)^0$, donde $(ker\, Q_n)^0$ es el ortogonal a $ker\, Q_n$ en A'. Entonces, dada $\omega \in A'$ existe un compacto Q_n tal que si φ es nula en Q_n es $\omega(\varphi) = 0$. Pero esto quiere decir que ω tiene su soporte $\subset Q_n$.

Recíprocamente, sea $\omega \in I'$ de soporte compacto Q; tomemos $a \in I$ que valga 1 en un entorno de Q y observaremos que $\omega = a \,.\, \omega$, con lo que para cada $\varphi \in A$ podemos definir $\omega(\varphi) = \omega(a \,.\, \varphi)$ donde $a \,.\, \varphi$ ya es de I.

CAPITULO II

SINTESIS ESPECTRAL PARA MODULOS DE FRECHET DE TIPO FINITO SOBRE $C^m(X)$ $(0 \leq m \leq \infty)$.

II. 1. NATURALEZA DEL PROBLEMA.

Sea A una F^*-álgebra de espectro localmente compacto X y para cada $x \in X$ sea A_x el anillo de gérmenes de funciones de A en x. A_x coincide con el cociente de A por el ideal de nulidades n_x del punto x.

Para cada ideal cerrado I de A se verifica que toda función $a \in A$ cuyo germen en cada punto x coincide con el de una función de I, es una función de I.

En consecuencia se verifica, para todo ideal cerrado I, que $I = \bigcap_{x \in X} (I + n_x)$, con lo que todo ideal cerrado es intersección de ideales primarios (en el sentido de GUELFAND ideal primario es el que está contenido a lo más en un solo ideal maximal). El problema de la síntesis espectral para un anillo A puede enunciarse así:

¿Se verifica que para todo ideal cerrado I de A es $I = \bigcap_{x \subset X} (I + \Gamma_x)$?

donde Γ_x es el cierre del ideal de nulidades de x. No existen condiciones generales sobre A para que valga la síntesis espectral y desde luego no vale siempre (ver apéndice [5]). El teorema de WHITNEY (0.2.7.) es el teorema de síntesis espectral para los anillos $C^m(X)$ (con el suplemento de que $I + \Gamma_x$ es cerrado para cada x y sea el ideal I cerrado o no).

Periodísticamente hablando, el problema de la síntesis espectral es el de caracterizar los ideales cerrados en términos del fibrado de fibras A/Γ_x, mientras que la caracterización por gérmenes está hecho en lenguaje del haz de fibras $\mathcal{A}_x$.

Naturalmente, el problema puede plantearse para A-módulos. En el capítulo I hemos visto que el prehaz de las localizaciones de un A-módulo de Fréchet M es un haz. De ahí se deduce inmediatamente que si N es un submódulo cerrado de M, todo elemento de M cuyo germen en cada punto $x \in X$ provenga de N está en N.

La fibra en x del haz asociado a M es $\mathcal{M}_x = M/n_x M = \mathcal{A}_x \underset{A}{\otimes} M$.

Lo mismo que para el anillo podemos considerar los A/Γ_x-módulos topológicos $M/\overline{\Gamma_x M} = A/\Gamma_x \underset{\pi A}{\otimes} M$ y preguntarnos si un submódulo cerrado N de M está caracterizado por sus imágenes en las fibras $M/\overline{\Gamma_x M}$ en el sentido de que $N = \bigcap_{x \in X} (N + \overline{\Gamma_x M})$. Esto es lo que llamamos problema de síntesis espectral para A-módulos.

Cuando M es un módulo libre sobre $C^m(X)$, sus submódulos cerrados verifican la síntesis espectral como demostró WHITNEY ([8] cap. II).

Nosotros utilizamos aquí este teorema para dar el teorema general de síntesis espectral para módulos de FRÉCHET de tipo finito sobre $C^m(X)$.

II. 2. CASO $m < \infty$.

Las notaciones y resultados que usemos sin referencia están en [8]. X Será una variedad de clase $m < \infty$ y dimensión n; $A = C^m(X)$. Para cada punto x, Γ_x es el ideal de las funciones de A que tienen nulas sus derivadas hasta el orden m en x; Γ_x coincide con el cierre en A del ideal de nulidades de x.

II. 2. 1. LEMA. Sea L un A-módulo libre finito, N un submódulo cerrado de L. Para todo $x \in X$ se verifica

$$\overline{\Gamma_x N} = \Gamma_x L \cap N$$

Demostración. El lema puede deducirse inmediatamente del teorema de Whitney sobre los submódulos cerrados de un módulo libre. Pero hay una demostración directa muy simple:

Trivialmente, $\overline{\Gamma_x N} \subset \Gamma_x L \cap N$. Sea $\phi = (\varphi_1 \dots \varphi_l) \in \Gamma_x L \cap N$. Las funciones φ_i tienen nulas todas sus derivadas hasta el orden m en el punto x. Por tanto, fijado $\varepsilon < 0$ existe un entorno $U(x)$, que podemos suponer identificado a un disco de radio d en $\mathbf{R}^n$, en el que $| D^k \varphi_i (y) | < \varepsilon \,.\, d^{m-|k|}$ para todo $y \in U(x)$ y todo n-entero $k = (k_1 \dots k_n)$ con $| k | \leq m$.

Podemos encontrar una función $\varphi \in C^\infty(X)$ que sea igual a 1 en un entorno de x, nula fuera de $U(x)$ y cuyas derivadas satisfagan

$$| D^k \varphi (y) | \leq \frac{C}{d^{|k|}} \text{ para } | k | \leq m$$

(C, constante que depende solo de m).

Sea $\bar{\phi} = \varphi \,.\, \phi$.

Para $y \in U(x)$ se tiene

$$| D^k (\varphi \,.\, \varphi_i)(y) | \leq \sum_{h \leq k} \frac{C}{d^{|h|}} \,.\, \varepsilon \,.\, d^{m-|k|+|h|} \leq C' \,.\, \varepsilon$$

donde C' depende solo de m

De lo anterior se deduce inmediatamente que $(1 - \varphi) \,.\, \phi$ puede tomarse tan próximo como se quiera a ϕ en la topología de L, y como $1 - \varphi \in \Gamma_x$, hemos terminado.

II. 2. 2. Lema. Sea $0 \to N \to L \to M \to 0$ una sucesión exacta de A-módulos de Fréchet y morfismos continuos, donde L es libre finito. Entonces para cada $x \in X$ las sucesiones

$$0 \to \overline{\Gamma_x N} \to \Gamma_x L \to \overline{\Gamma_x M} \to 0$$

$$0 \to N/\overline{\Gamma_x N} \to L/\Gamma_x L \to M/\overline{\Gamma_x M} \to 0$$

son exactas.

Demostración. Se tiene $\ker (\Gamma_x L \to \Gamma_x M) = \Gamma_x L \cap N = \overline{\Gamma_x N}$, de donde se deduce la exactitud de la sucesión

$$0 \to \overline{\Gamma_x N} \to \Gamma_x L \to \Gamma_x M \to 0$$

Veamos que $\Gamma_x M = \overline{\Gamma_x M}$. Para ello observemos que $\Gamma_x M$ puede dotarse de la topología cociente $\Gamma_x L/\overline{\Gamma_x N}$, que es de Fréchet y más fina que la inducida por M.

La sucesión

$$0 \to N/\overline{\Gamma_x N} \to L/\Gamma_x L \to M/\Gamma_x M \to 0$$

es exacta por ser $\overline{\Gamma_x N} = \Gamma_x L \cap N$ y como $L/\Gamma_x L$ es un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbf{C}$, también lo será $M/\Gamma_x M$ luego $\Gamma_x M$ es de codimensión finita en M. Podemos aplicar entonces el siguiente lema sobre espacios de FRÉCHET: si F es un subespacio de codimensión finita del espacio de FRÉCHET E y si F admite una topología de FRÉCHET más fina que la inducida por E, entonces F es cerrado en E (basta, en efecto, tomar un subespacio G de dimensión finita tal que $F \oplus G = E$ algebraicamente, observar que la aplicación $F \oplus G \to E$ es continua dotado F de la topología de FRÉCHET dada en él, y aplicar el teorema del gráfico cerrado). Así pues $\Gamma_x M = \overline{\Gamma_x M}$ y hemos terminado.

II. 2. 3. LEMA. Sea $0 \to N \to L' \to M' \to 0$ una sucesión exacta de A-módulos de FRÉCHET y morfismos continuos, donde L' es un submódulo cerrado de un módulo libre finito L. Entonces las sucesiones

$$0 \to \overline{\Gamma_x N} \to \overline{\Gamma_x L'} \to \overline{\Gamma_x M'} \to 0$$

$$0 \to N/\overline{\Gamma_x N} \to L'/\overline{\Gamma_x L'} \to M'/\overline{\Gamma_x M'} \to 0$$

son exactas.

DEMOSTRACIÓN. Tenemos $\overline{\Gamma_x N} = \Gamma_x L \cap N = \Gamma_x L \cap L' \cap N = \overline{\Gamma_x L'} \cap N$ según el lema (II.2.1.). Por tanto si llamamos $\widehat{\Gamma_x M'} = I_m \overline{\Gamma_x L'}$ tendremos una sucesión exacta

$$0 \to \overline{\Gamma_x N} \to \overline{\Gamma_x L'} \to \widehat{\Gamma_x M'} \to 0$$

y teniendo en cuenta que $L'/\overline{\Gamma_x L'} \subset L/\Gamma_x L$ es un espacio vectorial finito podemos argumentar del mismo modo que en lema anterior para ver que $\overline{\Gamma_x M'} = \widehat{\Gamma_x M'}$ y con ello lo demás es trivial.

II. 2. 4. TEOREMA. Para todo A-módulo de FRÉCHET de tipo finito M y todo $x \in X$, $\Gamma_x M$ es cerrado en M. Además, si

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

es una sucesión exacta de A-módulos de FRÉCHET y morfismos continuos y M es de tipo finito, las sucesiones

$$0 \to \overline{\Gamma_x M'} \to \Gamma_x M \to \Gamma_x M'' \to 0$$

$$0 \to M'/\overline{\Gamma_x M'} \to M/\Gamma_x M \to M''/\Gamma_x M'' \to 0$$

son exactas.

DEMOSTRACIÓN. Sea $0 \to N \to L \to M \to 0$ con L libre finito, N cerrado en L. Sea L' la antiimagen de M' en L. Es evidente que el núcleo del morfismo compuesto $L \to M''$ es L' y por tanto tenemos una sucesión exacta $0 \to L' \to L \to M'' \to 0$. Aplicando los lemas anteriores obtendremos las sucesiones exactas

$$0 \to \overline{\Gamma_x N} \to \Gamma_x L \to \Gamma_x M \to 0 \qquad \text{(II.2.2.)}$$

$$0 \to \overline{\Gamma_x L'} \to \Gamma_x L \to \Gamma_x M'' \to 0 \qquad \text{(II.2.2.)}$$

$$0 \to \overline{\Gamma_x N} \to \overline{\Gamma_x L'} \to \overline{\Gamma_x M'} \to 0 \qquad \text{(II.2.3.)}$$

de donde se deduce la exactitud de

$$0 \to \overline{\Gamma_x M'} \to \Gamma_x M \to \Gamma_x M'' \to 0$$

por procedimientos algebraicos elementales. Por ejemplo.

$$ker\,(\Gamma_x M \to \Gamma_x M'') = \Gamma_x M \cap M' = \Gamma_x L + N/N \cap L'/N =$$

$$= (\Gamma_x L + N) \cap L'/N = (\Gamma_x L \cap L') + N/N = \overline{\Gamma_x L'} + N/N =$$

$$= \overline{\Gamma_x L'}/\overline{\Gamma_x L'} \cap N = \overline{\Gamma_x L'}/\overline{\Gamma_x N} = \overline{\Gamma_x M'}$$

A partir de aquí es trivial la exactitud de la segunda sucesión del enunciado.

II. 2. 5. Para cada A-módulo de FRÉCHET M definiremos

$$M_x = A/\Gamma_x \underset{\pi A}{\otimes} M = M/\overline{\Gamma_x M}.$$

Cuando M es finito hemos visto que $M_x = A/\Gamma_x \underset{A}{\otimes} M$.

A M_x le llamaremos módulo de los desarrollos de TAYLOR de M en x.

II. 2. 6. COROLARIO. (Teor. 3. 1. de Roth en [9] pág. 217). Si X es una variedad conexa, el anillo $C^m(X)$ $(0 \leq m < \infty)$ no tiene ideales propios finito - generados cerrados.

DEMOSTRACIÓN. Sea I un ideal finito generado cerrado de A; demostremos que $I = 0$ ó $I = A$.

Sea $0 \to N \to L \to I \to 0$ exacta con L libre de base tantos elementos como generadores tenga I. Tendremos sucesiones exactas:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & N_x & \longrightarrow & L_x & \longrightarrow & I_x & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & & A_x & & \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & & (A/I)_x & & \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & & 0 & &
\end{array}
$$

Como $N_x = N/\overline{\Gamma_x N} = N + \Gamma_x L / \Gamma_x L$ es de dimensión compleja localmente no-decreciente (por ser N un espacio de funciones vectoriales y ser N_x el espacio de los desarrollos de TAYLOR ordinarios de N en x), resulta que dim I_x es localmente no-creciente, por la exactitud de la fila.

Pero por ser I un ideal, dim I_x es localmente no-decreciente. Luego dim I_x es localmente constante, luego constante por ser X conexa.

Si existe un punto x y una función $f \in I$ con $f(x) \neq 0$, en ese punto es dim $I_x =$ dim A_x y por lo que hemos dicho antes, para todo punto $y \in X$ deberá ser dim $I_y =$ dim A_y, luego el ideal I no tiene ceros en X y por tanto es denso en A, luego coincide con A.

II. 2. 7. TEOREMA DE SÍNTESIS ESPECTRAL PARA A-MÓDULOS FINITOS.

Sea M un A-módulo de FRÉCHET de tipo finito, M' un submódulo cerrado de M, $\overline{m} \in M$. La condición necesaria y suficiente para que $\overline{m} \in M'$ es que en todo punto $x \in X$ la clase $\overline{m}_x \in M_x$ esté en M'_x.

DEMOSTRACIÓN. Ya hemos visto que M'_x es un submódulo de M_x con lo que la necesidad es trivial.

Recíprocamente, tomemos una antiimagen ϕ de $\overline{m}$, usemos las notaciones de la demostración del teorema (II.2.4.) y tendremos sucesiones exactas

$$0 \to N_x \to L_x \to M_x \to 0$$

$$0 \to N_x \to L'_x \to M'_x \to 0$$

de las que se deduce que $\phi_x \in L'_x$ para todo punto x y por el teorema de WHITNEY, $\phi \in L'$, luego $\overline{m} \in M'$.

II. 2. 8. OBSERVACIÓN. Todos los enunciados anteriores dependen exclusivamente de dos puntos: que para cada x, A/Γ_x sea de dimensión compleja finita constante y que valga la síntesis espectral para A-módulos libres.

Así, puede asegurarse que una F^*-álgebra que tenga estas propiedades y sea de espectro conexo no tiene ideales propios finito - generados cerrados.

II. 3. MÓDULOS SOBRE $C(X)$

En este apartado A es el anillo de todas las funciones continuas sobre la variedad X. Más generalmente, X puede ser un espacio localmente compacto metrizable cualquiera.

Para cada cerrado F, Γ_F es el ideal de todas las funciones continuas nulas en F.

II. 3. 1. TEOREMA. Γ_F es un A-módulo plano.

DEMOSTRACIÓN

LEMA 1. Para cada cerrado F de X existe una función $\varphi \in \Gamma_F$ no negativa y nula solo en F.

En efecto, φ puede tomarse por ejemplo la distancia a F. En realidad el lema vale para toda F^*-álgebra de espectro X.

LEMA 2. Sean $\varphi_1 \dots \varphi_n \in \Gamma_F$. Existen funciones $\varphi \in \Gamma_F$, positiva fuera de F y $\overline{\varphi}_1 \dots \overline{\varphi}_n \in \Gamma_F$ tales que $\varphi_i = \varphi \, . \, \overline{\varphi}_i$ $(i = 1, \dots n)$.

Tomemos $\psi \in \Gamma_F$ positiva fuera de F. Definamos

$$\varphi = (\varphi_1 \varphi_1^* + \dots + \varphi_n \varphi_n^* + \psi^2)^{\frac{1}{4}}, \quad \overline{\varphi}_i = \frac{\varphi_i}{\varphi} \quad (\overline{\varphi}_i(x) = 0 \text{ si } x \in F).$$

Es trivial que φ y las $\overline{\varphi}_i$ son de Γ_F.

Para demostrar el teorema hay que probar que para cualquier ideal I de A la aplicación canónica $I \underset{A}{\otimes} \Gamma_F \to \Gamma_F$ es inyectiva. Supongamos que $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i \, . \, f_i = 0$ con $\varphi_i \in \Gamma_F \, . \, f_i \in I$. Pongamos $\varphi_i = \varphi \, . \, \overline{\varphi}_i$ como en el lema 2 y tendremos $\varphi \, . \left(\sum_{i=1}^{n} \overline{\varphi}_i \, . \, f_i \right) = 0$. Como $\sqrt{\varphi} \in \Gamma_F$

tendremos

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes f_i = \varphi \otimes \sum_{i=1}^{n} \overline{\varphi}_i \cdot f_i = \sqrt{\varphi} \otimes \sqrt{\varphi} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \overline{\varphi}_i \cdot f_i \right) = 0$$

porque evidentemente, si φ anula a $\sum_{i=1}^{n} \overline{\varphi}_i \cdot f_i$ también lo anula $\sqrt{\varphi}$.

II. 3. 2. TEOREMA. Para todo A-módulo topológico M se verifica

$$\Gamma_F \underset{A}{\otimes} M = \Gamma_F \cdot M$$

DEMOSTRACIÓN. Hay que probar que el morfismo canónico $\Gamma_F \underset{A}{\otimes} M \to \Gamma_F \cdot M$ es inyectivo. Ahora bien, si $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes m_i \to \to \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \cdot m_i = 0$, repetimos un argumento como el del teorema anterior y encontramos que $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes m_i = \varphi \otimes m$ con $\varphi \in \Gamma_F$ positiva fuera de F.

Por tanto $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes m_i = \varphi \otimes m = \sqrt{\varphi} \otimes \sqrt{\varphi} \cdot m$, donde $\varphi \cdot m = 0$ y basta demostrar que si φ anula a m, también $\sqrt{\varphi}$ anula a m; pero como M es un A-módulo topológico, el anulador de un elemento m de M es un ideal I cerrado en A; por hipótesis $\varphi \in I$; pero como φ es cero solo en F el ideal $\overline{A \cdot \varphi}$ debe contener a Γ_F, luego coincide con Γ_F y por tanto $I \supset \Gamma_F$ luego $\sqrt{\varphi} \in I$, con lo que el teorema queda demostrado.

II. 3. 3. TEOREMA. Si $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ es una sucesión exacta de A-módulos topológicos y morfismos no necesariamente continuos, la sucesión

$$0 \to A/\Gamma_F \underset{A}{\otimes} M' \to A/\Gamma_F \underset{A}{\otimes} M \to A/\Gamma_F \underset{A}{\otimes} M'' \to 0$$

es exacta.

DEMOSTRACIÓN. En virtud de los dos teoremas anteriores, la sucesión

$$0 \to \Gamma_F M' \to \Gamma_F M \to \Gamma_F M'' \to 0$$

es exacta. A partir de aquí la demostración es trivial.

II. 3. 4. COROLARIO. Si M' es un submódulo cerrado de M, $\Gamma_F M'$ es cerrado en $\Gamma_F \cdot M$. En particular, si $\Gamma_F M$ es cerrado en M, $\Gamma_F M'$

es cerrado en M'. Si M es de tipo finito o submódulo cerrado de un módulo de tipo finito, $\Gamma_x M$ es cerrado para todo $x \in X$.

Demostración. Todo es trivial salvo el último punto, que se demuestra teniendo en cuenta que $\Gamma_x M$ es de codimensión finita en M por un argumento análogo al de (II.2.2.)

II. 3. 5. Teorema. Sea M un A-módulo de Fréchet de tipo finito, M' un submódulo cerrado de M, la condición necesaria y suficiente para que un $m \in M$ esté en M' es que para todo punto $x \in X$ la imagen de m en $M_x = M/\Gamma_x M$ esté en $M'_x = M'/\Gamma_x M'$.

Demostración. En un caso particular de II.2.7. Pero la demostración puede hacerse sin emplear el teorema de Whitney en su forma general probando directamente que la síntesis espectral vale en este caso para módulos libres, cosa fácil.

II. 4. Módulos sobre $A = C^\infty(X)$

II. 4. 1. Observaciones preliminares

El problema de la síntesis espectral para módulos sobre el anillo $A = C^\infty(X)$ no es tratable por los mismos métodos que hemos utilizado en el caso de los anillos $C^m(X)$ debido a que no son aplicables los argumentos basados en el hecho de que los anillos locales A/Γ_x son de dimensión compleja finita. Como dijimos en II.2.8. esta finitud no es sólo algo que facilita ciertas demostraciones, sino una propiedad tan esencial del anillo que impide la existencia de ideales finito generados cerrados.

La pauta para el tratamiento del problema en este caso la da el caso en que el anillo es el de todas las funciones continuas sobre X, de tal modo que la cadena de enunciados es prácticamente la misma. Las demostraciones son las mismas desde el punto en que se haya demostrado que para el anillo $C^\infty(X)$ los ideales Γ_F son módulos planos sobre el anillo y este punto fundamental es de demostración nada fácil. Nosotros habíamos hecho una demostración falsa de esta propiedad siguiendo el mismo método que para las funciones continuas; antes de caer en la cuenta de la falsedad de esta demostración encontramos en [10] un lema del que la citada platitud es consecuencia inmediata, y en él nos apoyaremos.

II. 4. 2. Contraejemplo a una «evidencia».

La demostración falsa a que hemos aludido se basaba en la «evidencia» de que una función de clase C^∞ positiva en todos los puntos salvo en los del cerrado F, en los que se anulaba ella con todas sus derivadas de todos los órdenes, debía tener raiz cuadrada infinitamente diferenciable. Después de intentar la demostración de variados modos, cuando empezó la duda el contraejemplo no fue difícil de construir: la idea es construir una sucesión de series formales que no esté acotada, pero cuyos cuadrados tiendan a cero y luego construir una función cuyos desarrollos de Taylor en una sucesión convergente de puntos sean esos cuadrados. En el punto-límite de la sucesión de puntos dicha función será nula con todas sus derivadas, pero su raiz cuadrada no será diferenciable. Estamos en $C^\infty(\mathbf{R})$; vamos a construir una función positiva en todos los puntos salvo el origen en que se anula ella y todas sus derivadas cuya raiz cuadrada tenga derivada segunda no acotada en el entorno del origen. Fijemos una función $\phi \in C^\infty(\mathbf{R})$ igual a 1 en un entorno del origen, estrictamente positiva en el segmento $(-1, +1)$ y nula fuera de este segmento. Para cada número natural $n \geqslant 3$ definamos

$$\varphi_n(x) = \phi\left(n(n-1)\left(x - \frac{1}{n}\right)\right) . e^{-n}\left(e^{-n} + n\left(x - \frac{1}{n}\right)^2\right)$$

La función φ_n es estrictamente positiva en el segmento $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}\right)$, nula fuera del segmento $\left(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n-1}\right)$ y en un entorno del punto $\frac{1}{n}$ coincide con la función $e^{-n}\left(e^{-n} + n\left(x - \frac{1}{n}\right)^2\right)$. Al recorrer n la familia los números naturales $\geqslant 3$ obtenemos una sucesión de funciones $\{\varphi_n\}$ que tiene la propiedad de que para todo número real x con $0 < x < \frac{1}{3}$ existe al menos una función φ_n tal que $\varphi_n(x) > 0$ y a lo más para tres valores de n se verifica esta relación, a saber, si $\frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n}$, para φ_{n+1}, φ_n y φ_{n-1}. Por tanto la serie $\varphi = \sum_{n=3}^{\infty} \varphi_n$ representa una función de clase C^∞ definida en el eje real positivo y estrictamente positiva para todos los $x < \frac{1}{3}$. Es fácil demostrar que para cada orden de derivación k existe una constante C_k que depende solo de las k primeras derivadas de ϕ en $(-1, +1)$ tal que para todo x entre $\frac{1}{n+1}$ y $\frac{1}{n}$ se verifica $|\varphi^{(k)}(x)| \leq$ $\leq C_k (n+1)^{2k+1} . e^{-(n-1)}$ lo cual permite ampliar el dominio de definición de φ a toda la recta poniendo $\varphi(x) = \varphi(-x)$, $\varphi(0) = \varphi'(0) = \dots = 0$. Sumando una función conveniente podemos también hacer que φ sea positiva en todos los puntos fuera del origen sin alterar su valor en un entorno de este punto.

No hay inconveniente en suponer que para todas las x positivas suficientemente pequeñas es $\phi(-1+x) = e^{-\frac{2}{x}}$, con lo cual, hechos los cálculos se encuentra que para todo n a partir de uno dado se cumple:

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-2n}\left(1 + e^2 \,.\, e^{-n} + \frac{e}{n^2(n-1)}\right)$$

$$\varphi'\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-2n}\left(-\frac{2e}{n} + \frac{e^2 e^{-n}(n-1)(n-2)n^2}{2} + \frac{e(n-2)}{2}\right)$$

$$\varphi''\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-n}\Big[2n - 2en(n-1)(n-2)e^{-n} +$$

$$+ e^2 \,.\, e^{-2n}(n-1)^2(n-2)^2\left(\frac{n^4}{4} - \frac{n^3}{2}\right) +$$

$$+ \frac{e(n-2)^2(n-1)}{n^2}\left(\frac{n^4}{4} - \frac{n^3}{2}\right)e^{-n} + 2e(n-1)\,.\,e^{-n}\Big]$$

En la identidad

$$\left(\sqrt{\varphi}\right)''\left(\frac{1}{n}\right) = -\frac{\varphi'^2\left(\frac{1}{n}\right)}{4\sqrt{\varphi\left(\frac{1}{n}\right)^3}} + \frac{\varphi''\left(\frac{1}{n}\right)}{2\sqrt{\varphi\left(\frac{1}{n}\right)}}$$

y teniendo en cuenta las expresiones anteriores se ve que el primer sumando tiende a cero como $e^{-n} . n^2$ mientras que el segundo tiende a ∞ como n. Con ésto terminamos.

II. 4. 3. LEMA. (Ver [10] pág. 183). Sea $\{\varphi_i\}$ una sucesión de funciones de Γ_F. Entonces existen $\varphi \in \Gamma_F$ estrictamente positiva fuera de F y funciones $\bar{\varphi}_i \in \Gamma_F$ tales que $\varphi_i = \varphi \,.\, \bar{\varphi}_i$.

II. 4. 4. TEOREMA. Para cada cerrado $F \subset X$, Γ_F es un A-módulo plano.

DEMOSTRACIÓN. Teniendo en cuenta el lema anterior se adapta obviamente la demostración de II.3.1.

II. 4. 5. TEOREMA.

Para todo A-módulo topológico M se verifica

$$\Gamma_F \underset{A}{\otimes} M = \Gamma_F \, . \, M$$

DEMOSTRACIÓN. Adaptación de II.3.2.

II. 4. 6. TEOREMA. Si $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ es una sucesión exacta de A-módulos topológicos y morfismos no necesariamente continuos, la sucesión

$$0 \to A/\Gamma_F \underset{A}{\otimes} M' \to A/\Gamma_F \underset{A}{\otimes} M \to A/\Gamma_F \underset{A}{\otimes} M'' \to 0$$

es exacta.

DEMOSTRACIÓN. Se copia la de II.3.3.

II. 4. 7. COROLARIO. (Ver [9]). Para que el ideal finito generado $I = (f_1 \dots f_n)$ sea cerrado en $C^\infty(X)$ es necesario que $f_1 \dots f_n$ no tengan ningún cero común de orden infinito.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que I es cerrado. Tendríamos sucesiones exactas de A-módulos topológicos

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & L & \longrightarrow & I & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & \downarrow & & \\ & & & & & & A & & \\ & & & & & & \downarrow & & \\ & & & & & & (A/I) & & \\ & & & & & & \downarrow & & \\ & & & & & & 0 & & \end{array}$$

con L libre finito.

Supongamos que I tiene algún cero de orden infinito. Tomemos un punto x en el borde del conjunto C de los ceros de orden infinito de I y apliquemos el teorema anterior. Tendremos sucesiones exactas

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & N_x \arrow[r] & L_x \arrow[r] & I_x \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & & & A_x \arrow[d] & \\ & & & (A/I)_x \arrow[d] & \\ & & & 0 & \end{tikzcd}$$

por lo que $N_x = L_x$. Se deduce que existen elementos $\psi_i \in \Gamma_x L$ y elementos $\phi_i \in N$ tales que $\phi_i = (0 \dots \overset{i}{1} \dots 0) + \psi_i$ y tomando coordenadas $\phi_i^h = \delta_i^h + \psi_i^h$ con lo que *det* $(\phi_i^h(x)) = 1$ luego *det* $(\phi_i^h(y)) = 0$ para todo y de un entorno $U(x)$ conveniente. De aquí se deduce fácilmente que $A_{U(x)} \underset{A}{\otimes} L = A_{U(x)} \underset{A}{\otimes} N$ luego que $L_y = N_y$ para todo $y \in U(x)$ con lo que $I_y = 0$, en contradición con ser x del borde del conjunto de ceros de orden infinito de I.

II. 4. 8. Teorema de síntesis espectral para A-módulos de tipo-finito.

Sea M un A-módulo de Fróchet de tipo finito, M' un submódulo cerrado de M. La condición necesaria y suficiente para que $m \in M$ esté en M' es que para cada punto $x \in X$ la clase de m en $A/\Gamma_x \underset{A}{\otimes} M$ esté en $A/\Gamma_x \underset{A}{\otimes} M'$.

Demostración. Via el teorema II.4.6. se reduce el problema al caso en que M es libre del mismo modo que en II.2.7. y se aplica para este caso el teorema de Whitney.

CAPITULO III

CARACTERIZACION DE LAS ALGEBRAS DIFERENCIABLES

Introducción. En este capítulo damos las condiciones necesarias y suficientes para que un álgebra de Fróchet sea un álgebra de funciones diferenciables en sentido de Whitney. Tales álgebras Whitney son los cocientes de álgebras $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ por ideales que son cierres topológicos de ideales de nulidades de cerrados de $\mathbf{R}^n$. En particular el teorema que damos sirve para caracterizar las álgebras de funciones diferenciables sobre una variedad, que son límites proyectivos de álgebras de WHITNEY sin radical.

Más generales que las álgebras de WHITNEY son los cocientes de $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ por ideales cerrados cualesquiera. Tales álgebras, que llamaremos álgebras diferenciables, se obtienen de las álgebras de WHITNEY por paso al cociente con ideales contenidos en el radical y conservan todas las propiedades de las álgebras de WHITNEY salvo una: que el graduado o la diagonal para un álgebra de WHITNEY es un módulo libre sobre tal álgebra, mientras que para un álgebra diferenciable no es así en general.

Creemos que la caracterización que damos para las álgebras de WHITNEY quitando la condición mencionada caracteriza las álgebras diferenciables en el sentido general que hemos dicho, pero hasta ahora no hemos sabido demostrarlo.

En un primer apartado tratamos de las generalidades sobre diferenciales y derivaciones continuas de un álgebra de FRÉCHET.

En el segundo apartado caracterizamos las álgebras diferenciablemente completas.

En el tercer apartado caracterizamos las álgebras de WHITNEY.

III. 1. DIFERENCIALES Y DERIVACIONES CONTINUAS EN UN ÁLGEBRA DE FRÉCHET

III. 1. 1. DEFINICIONES Y GENERALIDADES. En todo lo que sigue A ser una $\mathbf{C}$-álgebra de FRÉCHET conmutativa. El producto tensorial $A \underset{C}{\otimes} A$ se supondrá siempre dotado de la topología π (0.1.1.), con lo cual el morfismo canónico $A \otimes A \to A$ es un epimorfismo topológico, cuyo núcleo $\triangle_A$ llamaremos diagonal algebraica de A.

Asimismo se tiene un morfismo $A \widehat{\otimes} A \to A$ cuyo núcleo D_A llamaremos diagonal de A (en álgebra pura se llama diagonal a lo que nosotros hemos llamado diagonal algebraica). Si no hay confusión posible pondremos D en lugar de D_A.

Consideremos repetidas veces los morfismos naturales

$$\begin{array}{llll} i_1 : A \to A \widehat{\otimes} A & & i_2 : A \to A \otimes A \\ \quad a \to a \otimes 1 & & \quad a \to 1 \otimes a \end{array}$$

que son continuos.

Cuando tratemos A como $A \hat{\otimes} A$-módulo se entenderá siempre que $A = A \hat{\otimes} A/D$.

El espacio de las diferenciales de A es, por definición $\Omega_A = D/\overline{D^2}$ Ω_A es un A-módulo de FRÉCHET. Si ponemos $d^*a = a \otimes 1 - 1 \otimes a$, la clase de d^*a en Ω_A se escribirá da y se llamará diferencial de a.

Es inmediato ver que la aplicación $a \rightarrow da$ es continua y que es una derivación de A con valores en el A-módulo Ω_A.

Para cada A-módulo topológico M denotaremos $Der(A, M)$ el A-módulo de todas las derivaciones continuas de A con valores en M.

Para cada par de A-módulos topológicos $M . N$ denotaremos $Hom_A(M, N)$ el A-módulo de todos los morfismos continuos de M en N.

Finalmente, dado un A-módulo topológico M definiremos una A-álgebra topológica $A * M$ llamada extensión trivial de A por M poniendo $A * M = A \oplus M$ como estructura aditiva y como multiplicación $(a, m) . (a', m') = (a\,a', a\,m' + a'\,m)$, es decir la natural poniendo $M^2 = 0$.

III. 1. 2. PROPOSICIÓN. Para toda álgebra de FRÓCHET A, la diagonal D de A es el cierre de la diagonal algebraica $\triangle$ de A en $A \hat{\otimes} A$.

DEMOSTRACIÓN. No hay más que considerar las sucesiones exactas

$$0 \rightarrow \triangle \rightarrow A \otimes A \rightarrow A \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow D \rightarrow A \hat{\otimes} A \rightarrow A \rightarrow 0$$

y aplicar la proposición 0.1.6.

III. 1. 3. TEOREMA. Para todo A-módulo topológico completo M se tiene un isomorfismo canónico $Der(A, M) = Hom_A(\Omega_A, M)$.

DEMOSTRACIÓN. Cada morfismo continuo $\varphi : \Omega \rightarrow M$ define una derivación $\delta : A \rightarrow M$ sin más que poner $\delta = \varphi_0\, d$.

A la inversa, sea $\delta \in Der(A, M)$. Definamos un morfismo de A-álgebras $\phi : A \hat{\otimes} A \rightarrow A * M$ poniendo $\phi(a \otimes b) = (a . b, a . \delta b)$ y extendiendo a $A \hat{\otimes} A$ por linealidad y continuidad (observemos que siendo continua la aplicación bilineal $A \times A \rightarrow M : (a, b) \rightarrow a . \delta b$ define una aplicación lineal continua $A \hat{\otimes} A \rightarrow M$ por la propiedad universal de la topología π).

Como $\phi(D) \subset M$ y $M^2 = 0$ tenemos $\phi(D^2) = 0$ y por continuidad, $\phi(\overline{D^2}) = 0$, con lo cual ϕ induce un morfismo continuo

$$\varphi : \Omega = D/\overline{D^2} \to M$$

que aplica $d\,a$ en $\phi(d^*a) = \phi(a \otimes 1 - 1 \otimes a) = (0, \delta\,a)$.

Así pues $\delta = \varphi_0\, d$. Además, dada δ, φ es único, puesto que la imagen de A por d engendra una parte densa en Ω en virtud de la proposición anterior.

III. 1. 4. La sucesión $I/\overline{I^2} \xrightarrow[\pi A]{} B \otimes \Omega_A \to \Omega_B \to 0$.

Sea A un álgebra de FRÉCHET, I un ideal cerrado de A, $B = A/I$. Se trata de ver que relación hay entre Ω_A y Ω_B.

Si llamamos $J = A \otimes I + I \otimes A$ es fácil ver que el diagrama conmutativo

$$(1) \qquad \begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & \triangle_A \cap J \arrow[r] \arrow[d] & J \arrow[r] \arrow[d] & I \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \triangle_A \arrow[r] \arrow[d] & A \otimes A \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \triangle_B \arrow[r] \arrow[d] & B \otimes B \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] & \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

es de filas y columnas exactas. Si llamamos $\mathfrak{J}$ al cierre de J en $A \hat{\otimes} A$ obtenemos otro diagrama

$$(2) \qquad \begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & D_A \cap \mathfrak{J} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{J} \arrow[r] \arrow[d] & I \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & D_A \arrow[r] \arrow[d] & A \hat{\otimes} A \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & D_B \arrow[r] \arrow[d] & B \hat{\otimes} B \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

que es de filas y columnas exactas: la exactitud de la columna central se deduce de 0.1.6. y lo demás es trivial.

Además comparando el diagrama que resulta de completar el (1) con el (2) resulta que deben ser iguales, de donde se deduce en particular que $D_A \cap \mathfrak{J} = \overline{\triangle_A \cap J}$, completado de $\triangle_A \cap J$.

Del diagrama (2) se deduce además que $\Omega_B = D_A + \mathfrak{J}/\overline{D_A{}^2 + \mathfrak{J}}$ algebraica y topológicamente y por tanto se tiene una sucesión exacta:

$$(3) \qquad 0 \to \overline{(D_A{}^2 + \mathfrak{J})} \cap D_A/\overline{D_A{}^2} \to \Omega_A \to \Omega_B \to 0$$

Ahora bien, se tiene $\overline{(D_A{}^2 + \mathfrak{J})} \cap D_A = \overline{(D_A{}^2 + \mathfrak{J}) \cap D_A}$: en efecto, es claro que el segundo espacio está contenido en el primero; tomemos $u \in \overline{(D_A{}^2 + \mathfrak{J})} \cap D_A$ y pongamos $u = \lim u_n$ con $u_n \in D_A{}^2 + \mathfrak{J}$; como $u \in D_A$, por la continuidad del morfismo $\pi : A \hat{\otimes} A \to A$ se tendrá $\lim \pi u_n = 0$ luego $\lim (\pi u_n \otimes 1) = 0$ y por tanto podemos poner $u = \lim (u_n - \pi u_n \otimes 1)$ donde $u_n - \pi u_n \otimes 1 \in (D_A{}^2 + \mathfrak{J}) \cap D_A$, lo cual prueba nuestra afirmación. Por consiguiente $\overline{(D_A{}^2 + \mathfrak{J})} \cap D_A = \overline{(D_A{}^2 + \mathfrak{J}) \cap D_A} = \overline{D_A{}^2 + (\mathfrak{J} \cap D_A)}$ y como dijimos antes $\mathfrak{J} \cap D_A = \overline{J \cap \triangle_A}$, por lo que en definitiva $\overline{(D_A{}^2 + \mathfrak{J})} \cap D_A = \overline{D_A{}^2 + (J \cap \triangle_A)}$ y la sucesión (3) puede escribirse.

$$(4) \qquad 0 \to \overline{(J \cap \triangle_A) + D_A{}^2} \, / \, \overline{D_A{}^2} \to \Omega_A \to \Omega_B \to 0$$

Hagamos el producto tensorial topológico de esta sucesión por B sobre A y tendremos morfismos continuos.

$$(5) \qquad B \underset{\pi A}{\otimes} \overline{(J \cap \triangle_A) + D_A{}^2} \, / \, \overline{D_A{}^2} \to B \underset{\pi A}{\otimes} \Omega_A \to \Omega_B \to 0$$

siendo la imagen del primer morfismo densa en el núcleo del segundo, que es un epimorfismo (1.1.7.)

Definamos un morfismo de A-módulos $I \to B \underset{\pi A}{\otimes} \overline{(J \cap \triangle_A) + D_A{}^2}/\overline{D_A{}^2}$ asignando a $z \in I$ el elemento $1_B \otimes d z$ (obsérvese que $d z$ es la clase en Ω_A de $z \otimes 1 - 1 \otimes z \in J \cap \triangle_A$). Este morfismo es continuo por serlo la diferencial. Además es nulo en I^2, luego en $\overline{I^2}$ y por tanto induce un morfismo continuo $I/\overline{I^2} \to B \underset{A\pi}{\otimes} \overline{(J \cap \triangle_A) + D_A{}^2} \, / \, \overline{D_A{}^2}$.

Veamos que la imagen de este morfismo es densa, para lo cual basta ver que los elementos que proceden de $J \cap \triangle_A$ en $\overline{(J \cap \triangle_A) + D_A{}^2}/\overline{D_A{}^2}$ son de la forma $d z + \sum_{i=1}^{n} x_i \, d t_i$ con $z \in I$, $x_i \in I$.

En efecto, $u \in \triangle \cap J$, es expresable en la forma $u = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes z_i + t_i \otimes b_i$ con $\sum a_i z_i + t_i b_i = 0$, por lo que puede ponerse $u = \sum - a_i \otimes 1 \, (z_i \otimes 1 - 1 \otimes z_i) - t_i \otimes 1 \, (b_i \otimes 1 - 1 \otimes b_i)$ cuya clase es $-\sum a_i\, d z_i - \sum t_i\, d b_i = d\,(\sum - a_i\, z_i) + \sum z_i\, d a_i - \sum t_i\, d b_i$ que es de la forma indicada. Con ello hemos demostrado:

III. 1. 4. 1. TEOREMA. Dada un álgebra de FRÉCHET A, un ideal I cerrado en A y $B = A/I$ se tiene una sucesión de morfismos continuos

$$I/\overline{I^2} \to B \underset{\pi A}{\otimes} \Omega_A \to \Omega_B \to 0$$

donde la imagen del primer morfismo es densa en el núcleo del segundo, que es un epimorfismo.

III. 1. 4. 2. COROLARIO. Si A es una F^*-álgebra y $I = \Gamma_F$ es el cierre del ideal de nulidades del cerrado F del espectro de A, es

$$\Omega_B = B \underset{\pi A}{\otimes} \Omega_A$$

DEMOSTRACIÓN. Basta observar que por ser Γ_F mínimo entre los ideales cerrados de ceros F es $\overline{\Gamma_F{}^2} = \Gamma_F$.

III. 1. 4. 3. COROLARIO. Si $I/\overline{I^2}$ es de dimensión compleja finita, la sucesión del teorema es exacta.

DEMOSTRACIÓN. La imagen de $I/\overline{I^2}$ en $B \underset{\pi A}{\otimes} \Omega_A$ es de dimensión finita, luego cerrada.

III. 1. 4. COROLARIO. Si x es un punto del espectro topológico de A y m es el ideal maximal de x se tiene $m/\overline{m}^2 = A/m \underset{\pi A}{\otimes} \Omega_A$.

DEMOSTRACIÓN. En este caso $B = A/m = \mathbf{C}$, con lo que $\Omega_B = 0$, por lo que el morfismo $m/\overline{m}^2 \to A/m \underset{\pi A}{\otimes} \Omega_A$ es de imágen densa. Pero por otra parte podemos definir una derivación $\delta : A \to m/\overline{m}^2$ asignando a cada $a \in A$ la clase δa de $a - a(x)$ en $m/\overline{m}^2$. Esta derivación es continua, luego proviene de un morfismo continuo $\varphi : \Omega_A \to m/\overline{m}^2$ (teor. III.1.3.) tal que $\varphi\,(d\,a) = \delta\, a$; como φ es morfismo de A-módulos, para $z \in m$ será $\varphi\,(z\,.\,d\,a) = z\,.\,\delta\, a = 0$ ya que z opera como cero en $m/\overline{m}^2$. Por consiguiente $m\,.\,\Omega_A \subset ker\,\varphi$ y por tanto se tiene un morfismo continuo: $\overline{\varphi} : A/m \underset{\pi A}{\otimes} \Omega_A \to m/\overline{m}^2$; como φ era exhaustivo, trivialmente, también lo es $\overline{\varphi}$. Además por su propia definición es claro que al aplicar $\overline{\varphi}$ y luego $m/\overline{m}^2 \to A/m \underset{\pi A}{\otimes} \Omega_A$ se obtiene la identidad, luego terminamos.

III. 1. 4. 5. COROLARIO. Sea B un álgebra de FRÉCHET, A una B-álgebra y $\pi : A \to B$ un morfismo continuo de núcleo I y que deje estable la subalgebra $B \subset A$. Entonces se tiene una sucesión exacta

$$0 \to I/\overline{I^2} \to B \underset{\pi A}{\otimes} \Omega_A \to \Omega_B \to 0 \text{ y además } B \underset{\pi A}{\otimes} \Omega_A \approx I/\overline{I^2} \oplus \Omega_B$$

(donde B se considera como A-módulo vía el morfismo $A \to B$).

DEMOSTRACIÓN. Definamos una derivación $\delta : A \to I/\overline{I^2}$ asignando a cada elemento $a \in A$ la clase de $a - \pi a$ en $I/\overline{I^2}$. Esta derivación da un morfismo de A-módulos $\varphi : \Omega_A \to I/\overline{I^2}$ que aplica $d\,a$ en $\delta\,a$ y que evidentemente es nulo en $I \,.\, \Omega_A$, luego define un morfismo:

$$p : B \underset{\pi A}{\otimes} \Omega_A \to I/\overline{I^2},\ p\,(1_B \otimes d\,a) = \delta\,a$$

p es exhaustivo ya que todo elemento del ideal I es de la forma $a - \pi\,a$; además la aplicación $I/\overline{I^2} \to B \underset{\pi A}{\otimes} \Omega_A$ compuesta con p da, trivialmente, la identidad.

Por consiguiente $I/\overline{I^2}$ es sumando directo topológico en $B \underset{\pi A}{\otimes} \Omega_A$ siendo el otro sumando el núcleo de p. Pero esto implica que $I/\overline{I^2}$ es cerrado en $B \underset{\pi A}{\otimes} \Omega_A$ y de aquí que el núcleo de p sea isomorfo a Ω_B.

III. 1. 5. TEOREMA. Si A es una F^*-álgebra de espectro X y U es un abierto de X, entonces $\Omega_{A_u} = A_u \underset{A}{\otimes} \Omega_A$.

DEMOSTRACIÓN. Tomemos una sucesión de compactos $Q_1 \subset Q_2 \subset \ldots$ cada uno contenido en el interior del siguiente y de reunión U. Sean $\Gamma_1 \supset \Gamma_2 \supset \ldots$ sus respectivos ideales de nulidades cerrados. Sabemos que por ser Ω_{A_u} un A_u-módulo de FRÉCHET es $\Omega_{A_u} = \varprojlim \Omega_{A_u}/\overline{\Gamma_{n_u}\Omega_{A_u}}$ (teor. 1.2.4.). Ahora bien, en virtud del corolario III.1.4.2. se tiene

$$\Omega_{A_u}/\overline{\Gamma_{n_u}\Omega_{A_u}} = \Omega_{B_n}$$

donde $B_n = A_u/\Gamma_{n_u} = A/\Gamma_n$.

Ahora bien en virtud del mismo teorema 1.2.4. las secciones de Ω_A sobre U, es decir $A_u \underset{A}{\otimes} \Omega_A$ son también

$$A_u \underset{A}{\otimes} \Omega_A = \varprojlim \Omega_A/\overline{\Gamma_n\,\Omega_A}$$

y por el mismo corolario III.1.4.2. es $\Omega_A/\overline{\Gamma_n\,\Omega_A} = \Omega_{B_n}$ con lo que hemos terminado.

III. 2. Caracterización de las álgebras diferenciablemente completas.

III. 2. 1. Definiciones y generalidades.

Un a. l. c. A dotada de una involución simétrica diremos que es diferenciablemente completa cuando para cada elemento autoconjugado $a \in A$ exista un morfismo continuo $C^{\infty}(\mathbf{R}) \to A$ que aplique la función identidad $t: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ en el elemento $a \in A$.

Si A es un álgebra sin radical, el morfismo $C^{\infty}(\mathbf{R}) \to A$ consistirá, evidentemente, en la composición de cada función diferenciable f con la función $a \in A$.

En el caso de que A sea una *-álgebra de Fréchet simétrica sin radical, todo morfismo $C^{\infty}(\mathbf{R}) \to A$ es automáticamente continuo (0.2.5.4.); y teniendo en cuenta que los polinomios en t forman una subálgebra densa en $C^{\infty}(\mathbf{R})$ es evidente que todo morfismo $C^{\infty}(\mathbf{R}) \to A$ que aplique t en a es la composición $f \to f \circ a$.

III. 2. 1. Caracterización de las *-álgebras de Fréchet simétricas, semisimples, diferenciablemente completas.

Sea A una *-álgebra de Fréchet simétrica semisimple. Sea H el subconjunto de los elementos autoconjugados de A. Se tiene, evidentemente $A = H \oplus iH$. De la simetría de A se deduce que los elementos de H son precisamente las funciones reales $\in A$, de donde es trivial ver que H es una parte cerrada de A y de aquí, por el teorema del gráfico cerrado que A es topológicamente la suma directa de H con iH, de donde resulta que la involución de A es un operador continuo. Por ello si p es una seminorma de A la seminorma $Sup\ \{p(a), p(a^*)\}$ es continua y podemos suponer que la familia de seminormas definidora de la topología de A está constituida por seminormas con la propiedad $p(a) = p(a^*)$. En lo que sigue supondremos que las seminormas a que hagamos alusión tienen esta propiedad.

III. 2. 1. 1. Teorema. Sea A una *-álgebra de Fréchet semisimple simétrica. La condición necesaria y suficiente para que A sea diferenciablemente completa es la siguiente:

(D). Para cada elemento autoconjugado $a \in A$ y cada seminorma p de A existen números α, β tales que para todo número real σ:

$$p(e^{i\sigma a}) \leq \beta(|\sigma|^{\alpha} + 1)$$

Demostración. Sea $p_1 \leq p_2 \leq \ldots$ una familia fundamental de seminormas de A; sea $A_n = A/ker\, p_n$ el anillo normado asociado a p_n, $\overline{A}_n$ su completado. Como $p_n(a) = p_n(a^*)$ podemos definir en A_n una involución, que será continua y podrá extenderse al álgebra de Banach $\overline{A}_n$. Con ello $\overline{A}_n$ será una *-álgebra de Banach simétrica (aunque quizá no sea semisimple). Demostraremos la necesidad de la condición (D). Pongamos $A = \underleftarrow{\lim}\, \overline{A}_n$. Sea $a \in H$, $\varphi : C^\infty(\mathbf{R}) \to A$ el morfismo $f \to f_0 a$. Componiendo φ con el morfismo canónico $A \to \overline{A}_n$ tendremos $\varphi_n : C^\infty(\mathbf{R}) \to \overline{A}_n$ que por ser φ_n continuo y ser $\overline{A}_n$ de Banach factorizará en $C^\infty(\mathbf{R}) \to C^m(\mathbf{R}) \to \overline{A}_n$. La imagen de la función $e^{i\sigma t} \in C^m(\mathbf{R})$ en $\overline{A}_n$ es $e^{i\sigma \overline{a}_n}$ (donde $\overline{a}_n$ es la imagen de a en $\overline{A}_n$), luego $\| e^{i\sigma \overline{a}_n} \| = p_n(e^{i\sigma a})$ estará mayorado salvo un factor numérico por $\| e^{i\sigma t} \|_{C^m(Q)}$ donde Q es un cierto compacto de $\mathbf{R}$, y será por tanto $p_n(e^{i\sigma a}) \leq \beta\, (|\sigma|^m + 1)$ para todo σ.

Para demostrar el recíproco empecemos por considerar el caso en que $X = Spec\; Top\; A$ es compacto. Podemos suponer entonces que las seminormas p_n son normas más finas que la norma de la convergencia uniforme sobre X. Entonces $\overline{A}_n$ es el completado de A para la norma p_n y $Spec\; Top\; \overline{A}_n = Spec\; Top\; A = X$.

Sea $a \in A$ autoconjugado; consideremos a como elemento de $\overline{A}_n$; como X es compacto, $a(X)$ está contenido en el interior de un segmento $\left(-\frac{\pi}{\sigma}, +\frac{\pi}{\sigma}\right)$ para un cierto $\sigma > 0$. Sea T la circunferencia de longitud $\frac{2\pi}{\sigma}$; toda función de $C^\infty(T)$ se expresa como $f = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \lambda_m\, e^{im\sigma t}$ donde λ_m es una sucesión de decrecimiento rápido. La serie $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \lambda_m\, e^{im\sigma a}$ es absolutamente sumable en $\overline{A}_n$, pues

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |\lambda_m| \cdot \| e^{im\sigma a} \| \leq \beta \sum_{-\infty}^{+\infty} |\lambda_m| \, (|m\sigma|^\alpha + 1) < \infty$$

por la condición (D). Así pues $b_n = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_m\, e^{im\sigma a} \in \overline{A}_n$ y es inmediato ver que en el morfismo $\overline{A}_n \to \overline{A}_{n-1}$, b_n se aplica en b_{n-1}, por lo que $b = (\ldots b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1) \in A$.

Es también inmediato comprobar que para cada $x \in X$ es $b(x) = f(a(x))$ con lo que tenemos un morfismo $\varphi : C^\infty(T) \to A$ tal que $f(t) \to f(a)$. Si S es un segmento cerrado conteniendo a $a(X)$ y contenido en $\left(-\frac{\pi}{\sigma}, +\frac{\pi}{\sigma}\right)$ y $I = ker\, S$ en $C^\infty(T)$, es inmediato ver, habida cuenta de que A es semisimple, que $I \subset ker\, \varphi$, por lo que tenemos un morfismo $C^\infty(T)/I \to A$. Pero hay un morfismo evidente de restricción de $C^\infty(\mathbf{R})$ en $C^\infty(T)/I$, con lo que tendremos en definitiva un morfismo $C^\infty(\mathbf{R}) \to A$, $t \to a$.

Con esto hemos terminado si el espectro de A es compacto.

Supongamos ahora que el espectro de A es cualquiera y tomemos la subálgebra B de los elementos acotados de A. Dotando a B de la topología reunión de la inducida por A y de la convergencia uniforme sobre el espectro de A, B es una *-álgebra de FRÉCHET, simétrica, semisimple y de espectro compacto (apartado 0.2.3.) y es inmediato ver que si A satisface la condición (D), también B con su topología satisface esta condición. Según acabamos de demostrar, B será diferenciablemente completa; y es fácil ver que el ser diferenciablemente completa supone que es regular.

Por el teorema 0.2.3.2., A también será regular, y toda función sobre el espectro de A que coincida localmente con funciones de A será una función de A ((0.2.4.4.) es un caso particular del teorema general que está en [7]).

Sea entonces a una función real $\in A$, x un punto del espectro de A y $f \in C^\infty(\mathbf{R})$. Existe, por la regularidad de A, un entorno U de x y una función $b \in B$ tal que $b = a$ en U, luego $f_0\, b = f_0\, a$ en U, luego $f_0\, a$ coincide localmente con funciones de A y según hemos dicho $f_0\, a \in A$.

Esto acaba la demostración del teorema.

III. 2. 1. 2. COROLARIO. (Todas las álgebras son simétricas, etc.). Toda subálgebra cerrada, todo cociente y todo límite proyectivo numerable de álgebras diferenciablemente completas es diferenciablemente completa.

DEMOSTRACIÓN. La condición (D) es una condición sobre las seminormas.

III. 2. 1. 3. PROPOSICIÓN (cálculo operacional con un número finito de variables).

Sea A una F^*-álgebra diferenciablemente completa, $a_1 \ldots a_2$ elementos reales de A. Existe un morfismo $C^\infty(\mathbf{R}^n) \to A$ que asigna a t_i (coordenada i-esima) el elemento $a_i \in A$.

DEMOSTRACIÓN. Los morfismos $\varphi_i : C^\infty(\mathbf{R}_i) \to A$

$$t_i \to a_i$$

existen y son continuos. Como $C^\infty(\mathbf{R}^n) = C^\infty(\mathbf{R}_1) \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} C^\infty(\mathbf{R}_n)$ tendremos un morfismo continuo

$$C^\infty(\mathbf{R}^n) \to A \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} A$$

que se compondrá con $A \hat{\otimes} A \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} A \to A$, etc.

III. 2. 2. TEOREMA. Sea A una *-álgebra de FRÉCHET simétrica (con o sin radical), de espectro compacto X y tal que $\bigcap_n (Rad\, A)^n = 0$. La condición necesaria y suficiente para que A sea diferenciablemente completa es que para cada seminorma (simétrica) p de A y cada $a \in A$ existan constantes α, β tales que

$$p(e^{i\sigma a}) \leqslant \beta(|\sigma|^\alpha + 1) \text{ para todo } \sigma \in \mathbf{R}.$$

DEMOSTRACIÓN. La necesidad de la condición se demuestra lo mismo que cuando el álgebra no tiene radical.

Para demostrar la suficiencia tomemos un elemento $a \in A$ real; $a(X)$ está contenido en un cierto segmento $\left(-\frac{\pi}{\sigma}, +\frac{\pi}{\sigma}\right)$.

Igual que para el caso sin radical se demuestra que existe un morfismo continuo $C^\infty(T) \to A$ tal que $f(t) \to f(a)$, donde $C^\infty(T)$ es el anillo de las funciones diferenciables periódicas de periodo $\frac{2\pi}{\sigma}$.

Tomemos un segmento cerrado S que contenga a $a(X)$ y esté contenido en $\left(-\frac{\pi}{\sigma}, +\frac{\pi}{\sigma}\right)$. El ideal Γ_s de las funciones de $C^\infty(T)$ nulas en S se aplica en $Rad\, A$.

Pero como $\Gamma_s^n = \Gamma_s$ para todo n (II. 4. 3.), las funciones la Γ_s se aplican en $\bigcap_n (Rad\, A)^n = 0$. Como $C^\infty(\mathbf{R})/\Gamma_s = C^\infty(T)/\Gamma_s$ tenemos un morfismo $C^\infty(\mathbf{R}) \to A$.

Así pues existe un morfismo $\varphi : C^\infty(\mathbf{R}) \to A$ que aplica $e^{i\sigma t}$ en $e^{i\sigma a}$ pero de aquí no se deduce inmediatamente que la imagen de t sea a.

Hay que demostrar este punto. Supongamos que $\varphi(t) = b \in A$. Entonces $e^{i\sigma b} = \varphi(e^{i\sigma t}) = e^{i\sigma a}$. Compongamos φ con el paso al cociente $A \to A/Rad\, A = \overline{A}$ y sean $\overline{a}, \overline{b}$ las imágenes de a, b en este paso al cociente. Tendremos así un morfismo $\overline{\varphi} : C^\infty(\mathbf{R}) \to \overline{A}$ tal que $\overline{\varphi}(t) = \overline{b}$ por lo que $\overline{\varphi}$ consiste en la composición de cada función $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ con la función $\overline{b} \in \overline{A}$. Pero tal como hemos construido $\overline{\varphi}$, es claro que $\overline{\varphi}(f)(x) = f(a(x))$ para todo x del espectro de A, con lo que $\bar{b} = \bar{a}$. Entonces $e^{i\sigma(b-a)} = 1$ donde $b - a \in Rad\ A$ y bastará que demostremos la siguiente

PROPOSICIÓN. Si A es un a. l. c. completa y $z \in Rad\ A$ es tal que $e^z = 1$, entonces $z = 0$.

DEMOSTRACIÓN. De ser $e^z = 1$ se deduce que

$$z\left(1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots\right) = 0$$

y por ser z del radical, $\left(1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots\right)$ toma valor 1 en todo punto del espectro, luego es invertible (teorema 0.2.1.) por lo que será $z = 0$.

III. 3. CARACTERIZACIÓN DE LAS ÁLGEBRAS DE WHITNEY.

III. 3. 1. EL «TEOREMA DE EXTENSIÓN» DE WHITNEY (ver [8] cap. 1).

Sabemos que el cociente del anillo $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ por el cierre del ideal de nulidades de un punto x es el anillo $\mathbf{C}[[\xi_1 \dots \xi_n]] = \mathbf{C}[[\xi]]$ de series formales en n variables (0.2.7.1.) Así pues, asignando a cada función $f \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ su desarrollo de TAYLOR en los puntos de $\mathbf{R}^n$ se puede pensar f como una sección continua del fibrado $\mathbf{R}^n \times \mathbf{C}[[\xi]]$. El problema resuelto por el teorema de extensión de WHITNEY es el siguiente: ¿Qué condiciones tiene que cumplir una función continua de un cerrado $Q \subset \mathbf{R}^n$ en $\mathbf{C}[[\xi]]$ para provenir de una función $\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$?

Una función continua F de Q en $\mathbf{C}[[\xi]]$ es lo que llaman los libros un «jet de funciones» sobre Q : F es un conjunto de funciones continuas $F = \{f^{(k)}\}$ donde $k = (k_1 \dots k_n)$ $(k_i \in \mathbf{N})$ se corresponde con todos los órdenes de derivación posibles; cuando F proviene de una función $f \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $f^{(k)}$ es la derivada de orden k de f restringida a Q.

Denotaremos con $\mathfrak{J}_Q$ el espacio de todos los jet sobre Q.

Se definen las «derivaciones formales» en $\mathfrak{J}_Q$ como aplicaciones

$$D^h : \mathfrak{J}_Q \to \mathfrak{J}_Q\,,\ (D^h F)^{(k)} = f^{(k+h)}$$

El desarrollo de TAYLOR de F hasta el orden m en un punto $a \in Q$, $T_a^m F$ se define como el polinomio (o su jet asociado)

$$T_a^m F = \sum_{|k| \leq m} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z - a)^k$$

con $k! = k_1! \dots k_n!$, $(z - a)^k = (z_1 - a_1)^{k_1} \dots (z_n - a_n)^{k_n}$.

El resto m-ésimo de TAYLOR en el punto a es el jet

$$R_a^m F = F - T_a^m F$$

Dicho esto el teorema de WHITNEY puede enunciarse así:

TEOREMA. La condición necesaria y suficiente para que una función continua de un compacto $Q \subset \mathbf{R}^n$ en el anillo de las series formales en n variables, $\mathbf{C}[[\xi]]$ provenga de una función C^∞ de $\mathbf{R}^n$ es que para todo número natural m y todo n-entero k con $|k| \leq m$ se verifique:

$$(R_x^m F)^{(k)}(y) = O(|x - y|^{m-|k|}) \text{ para } x, y \in Q$$

(O significa «infinitésimo de orden mayor que»)

Es cómodo usar la identidad

$$(R_x^m F)^{(k)} = f^{(k)} - T_x^{m-|k|} D^k F$$

con lo que el teorema de WHITNEY dice que $F = \{f^{(i)}\}$ proviene de una función diferenciable si y solo si

$$f^{(k)}(y) - \sum_{|k+h| \leq m} \frac{f^{(k+h)}(x)}{h!}(y - x)^h = O(|x - y|^{m-|k|})$$

OBSERVACIÓN. El teorema de WHITNEY es, evidentemente una caracterización del anillo $C^\infty(\mathbf{R}^n)/\Gamma_Q$ como subanillo de todas las funciones continuas de Q en $\mathbf{C}[[\xi]]$. Pero no es menos evidente que esta caracterización no viene directamente dada por propiedades del anillo, sino por propiedades de cada uno de sus elementos.

Nosotros daremos una caracterización en términos de propiedades del anillo.

III. 3. 2. PRELIMINARES AL TEOREMA DE CARACTERIZACIÓN.

III. 3. 2. 1. Comencemos recordando la definición del anillo graduado de un anillo por un ideal.

Sea $\mathfrak{A}$ un anillo, $\mathfrak{J}$ un ideal de $\mathfrak{A}$ y $A = \mathfrak{A}/\mathfrak{J}$.

Se define el A-módulo $g_{\mathfrak{J}}$ llamado graduado de $\mathfrak{A}$ por $\mathfrak{J}$ como

$$g_{\mathfrak{J}} = A \oplus \mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{J}^m/\mathfrak{J}^{m+1} \oplus \ldots$$

y se define en $g_{\mathfrak{J}}$ una multiplicación a base de las aplicaciones bilineales

$$\mathfrak{J}^m/\mathfrak{J}^{m+1} \times \mathfrak{J}^n/\mathfrak{J}^{n+1} \to \mathfrak{J}^{m+n}/\mathfrak{J}^{m+n+1}$$

definidas canonicamente por la multiplicación $\mathfrak{J}^m \times \mathfrak{J}^n \to \mathfrak{J}^{m+n}$. Con esta multiplicación $g_{\mathfrak{J}}$ deviene una A-álgebra. Si $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ es finito, generado por $\xi_1 \dots \xi_k$, es evidente que $g_{\mathfrak{J}}$ es un cociente del anillo de polinomios $A\,[t_1 \dots t_k]$ y que si coincide con este anillo los A-módulos $\mathfrak{J}^m/\mathfrak{J}^{m+1}$ son libres de base el conjunto de todas las clases $\xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_k^{\alpha_k}$ $(\alpha_1 + \dots + \alpha_k = m)$.

III. 3. 2. 2. Definición. Se llama Q-álgebra a toda a. l. c. que tiene un entorno de la unidad formado por elementos invertibles.

III. 3. 2. 3. Proposición. Si A es una Q-álgebra, *Spec Top* A es compacto en la topología de Guelfand.

Demostración. Sea p una seminorma de A tal que todo elemento $a \in A$ con $p\,(1 - a) < 1$ sea invertible. Es un ejercicio demostrar que toda funcional multiplicativa de A está mayorada por la seminorma p, luego *Spec Top* A está contenido en la polar en A' de la bola unidad de la seminorma p, luego es una parte equicontinua de A' y por ser débilmente cerrada es débilmente compacta.

III. 3. 2. 4. Proposición. Sea A una Q-álgebra completa, L un A-módulo libre finito; con su topología suma directa, L no contiene submódulos propios densos.

Demostración. Supongamos que M es denso en L. Sea $\{l_1 \dots l_n\}$ una base de L. Por hipótesis, dada una seminorma p en A y un $\varepsilon > 0$ podemos encontrar elementos $m_i \in M$, $m_i = \sum_{j=1}^{n} z_i^j\, l_j$ tales que $p\,(z_i^j - \delta_i^j) < \varepsilon$. En particular tomemos como seminorma p la de la convergencia uniforme sobre el espectro de A, que es compacto, como hemos demostrado, y como ε un número tal que para cualquiera números complejos α_i^j con $|\alpha_i^j| < \varepsilon$ se verifique que $det\,(\delta_i^j + \alpha_i^j) \neq 0$. Sea entonces $\varepsilon_i^j = z_i^j - \delta_i^j$. Para todo x del espectro de A es $|\,\varepsilon_i^j\,(x)\,| < \varepsilon$ luego $det\,(z_i^j\,(x)) = det\,(\delta_i^j + \varepsilon_i^j\,(x)) \neq 0$ lo cual prueba en virtud del teorema de representación espectral 0.2.1. que $det\,(z_i^j) \in A$ es invertible con lo que el resto de la demostración es trivial.

III. 3. 3. Teorema de caracterización de las álgebras diferenciables.

Sea A una Q-álgebra de Fréchet dotada de involución simétrica, generada topológicamente por n elementos autoconjugados y de espectro X (identificable, evidentemente, a una parte de $\mathbf{R}^n$). La condición necesaria y suficiente para que $A = C^\infty(\mathbf{R}^n)/\Gamma_X$ es que tenga las siguientes propiedades:

1) D_A es finito generada y para cada número natural m, $D_A{}^m$ es cerrada en $A \widehat{\otimes} A$ y el graduado de $A \widehat{\otimes} A$ por D_A es el anillo de polinomios en n variables con coeficientes en A.

2) $\bigcap\limits_{\substack{x \in X \\ k \in N}} m_x{}^k = 0$ (m_x = ideal maximal de $x \in X$).

3) A es diferenciablemente completa (la caracterización de las Q-*-álgebras de Fréchet diferenciablemente completas en términos de la topología está dada en III.2.2.).

Demostración

a) Necesidad de las condiciones.

Sea $\mathcal{E} = C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $A = \mathcal{E}/\Gamma_X$. Consideremos la sucesión exacta $0 \to \Gamma_X \to \mathcal{E} \to A \to 0$. Sea $\mathfrak{J} = \Gamma_X \widehat{\otimes} \mathcal{E} + \mathcal{E} \widehat{\otimes} \Gamma_X$. Teniendo en cuenta que $\mathcal{E}$, Γ_X y A son espacios de Fréchet nucleares (teorema 0.1.8. y 0.1.9.) se ve fácilmente que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathfrak{J} \cap D_{\mathcal{E}} & \longrightarrow & \mathfrak{J} & \longrightarrow & \Gamma_X & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & D_{\mathcal{E}} & \longrightarrow & \mathcal{E} \widehat{\otimes} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & D_A & \longrightarrow & A \widehat{\otimes} A & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

es de filas y columnas exactas.

Por otra parte, es sabido que $\mathcal{E} \widehat{\otimes} \mathcal{E} = C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ (ver [2]) de donde es fácil deducir que $\mathfrak{J}$ es precisamente el ideal de todas las funciones de $C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ nulas ellas y sus derivadas de todo orden en el compacto $X \times X$: basta observar que las funciones de $\mathfrak{J}$ tienen esta propiedad, que $\mathfrak{J}$ es cerrado y que sus ceros son precisamente $X \times X$.

Por abreviar, llamamos $E = \mathcal{E} \widehat{\otimes} \mathcal{E}$, $\mathfrak{A} = A \widehat{\otimes} A$.

De lo que hemos dicho de $\mathfrak{J}$ y de los teoremas II.4.4. y II.4.6. se deduce que $\mathfrak{J}$ es un E-módulo plano y que $\mathfrak{A}$ se comporta como un

E-módulo plano para las sucesiones exactas de E-módulos topológicos.

Tomemos coordenadas $(y_1 \dots y_n, x_1 \dots x_n)$ en $\mathbf{R}^{2n}$. Del desarrollo de Taylor a lo largo de la diagonal de $\mathbf{R}^{2n}$ se deduce trivialmente que D_ε^m consiste en las funciones de E cuyas derivadas de todos los órdenes $< m$ respecto de las variables y_i se anulan sobre la diagonal de $\mathbf{R}^{2n}$; luego D_ε^m es un ideal cerrado en E, por lo que $D_\varepsilon^m / D_\varepsilon^{m+1}$ es un E-módulo de FRÉCHET.

Tensorialicemos por $\mathfrak{A}$ sobre E la sucesión exacta

$$0 \to D_\varepsilon^{m+1} \to D_\varepsilon^m \to D_\varepsilon^m / D_\varepsilon^{m+1} \to 0$$

y obtendremos por la platitud topológica de $\mathfrak{A}$ antes indicada una sucesión exacta

$$0 \to \mathfrak{A} \underset{E}{\otimes} D_\varepsilon^{m+1} \to \mathfrak{A} \underset{E}{\otimes} D_\varepsilon^m \to \mathfrak{A} \underset{E}{\otimes} D_\varepsilon^m / D_\varepsilon^{m+1} \to 0$$

Teniendo en cuenta que $\mathfrak{J}$ es E-módulo plano y (II.4.5.) será

$$\mathfrak{A} \underset{E}{\otimes} D_\varepsilon^k = D_\varepsilon^k / \mathfrak{J} \,.\, D_\varepsilon^k = D_\varepsilon^k / \mathfrak{J} \cap D_\varepsilon^k = D_\varepsilon^k + \mathfrak{J} / \mathfrak{J} = D_A^k$$

y de aquí y de la sucesión anterior se deduce

$$D_A^m / D_A^{m+1} = \mathfrak{A} \underset{E}{\otimes} D_\varepsilon^m / D_\varepsilon^{m+1}$$

Ahora bien, de la sucesión exacta

$$0 \to D_A \to \mathfrak{A} \to A \to 0$$

se deduce tensorializando por $D_\varepsilon^m / D_\varepsilon^{m+1}$ la sucesión exacta

$$D_A \underset{E}{\otimes} D_\varepsilon^m / D_\varepsilon^{m+1} \to \mathfrak{A} \underset{E}{\otimes} D_\varepsilon^m / D_\varepsilon^{m+1} \to A \underset{E}{\otimes} D_\varepsilon^m / D_\varepsilon^{m+1} \to 0$$

pero evidentemente, la imagen del primer módulo en el segundo es cero debido a que D_A es cociente de D_ε y que D_ε anula a $D_\varepsilon^m / D_\varepsilon^{m+1}$. Así pues:

$$(1) \qquad D_A^m / D_A^{m+1} = A \underset{E}{\otimes} D_\varepsilon^m / D_\varepsilon^{m+1} = A \underset{\varepsilon}{\otimes} D_\varepsilon^m / D_\varepsilon^{m+1}$$

Usando el desarrollo de TAYLOR ordinario a lo largo de la diagonal de $\mathbf{R}^{2n}$ es fácil ver que $D_\varepsilon^m / D_\varepsilon^{m+1}$ es un $\mathcal{E}$-módulo libre engendrado por las clases de los

$$(y_1 - x_1)^{k_1} \dots (y_n - x_n)^{k_n} \text{ con } k_1 + \dots + k_n = m.$$

Por tanto, si llamamos $\bar{x}_i$ a la imagen de $x_i \in \mathcal{E}$ en A y $d\bar{x}_i$ a la clase de $\bar{x}_i \otimes 1 - 1 \otimes \bar{x}_i$ en D_A/D_A^2, de (1) se deduce que $D_A{}^m/D_A{}^{m+1}$ es el A-módulo libre engendrado por los productos $d\bar{x}_A{}^{k_1} \dots d\bar{x}_n{}^{k_n}$ $(k_1 + + \dots + k_n = m)$, y por tanto el graduado de $\mathcal{A}$ por D_A es el anillo de polinomios $A[d\bar{x}_1 \dots d\bar{x}_n]$. Con ello queda verificada la condición 1 salvo el hecho de que $D_A{}^m$ sea cerrado en $\mathcal{A}$, que luego demostraremos.

La condición 2) se deduce de que la intersección de todas las potencias del ideal maximal de $x \in X$ en el anillo $\mathcal{E}$ es Γ_x y la intersección de los Γ_x para todos los $x \in X$ es Γ_X, núcleo del morfismo $\mathcal{E} \to A$.

La condición 3) es trivial.

Finalmente hay que comprobar que $D_A{}^m$ es cerrada para todo m.

Para ello consideremos el desarrollo de Taylor a lo largo de la diagonal para las funciones de E.

$$f(x, y) = \sum_{|k|<m} f^{(k)}(x)(y - x)^k + \sum_{|h|=m} F_h(x, y)(y - x)^h \tag{2}$$

donde $f^{(k)}$ es salvo $k!$ la derivada k-ésima de f respecto de las variables y_i restringida a la diagonal de $\mathbf{R}^{2n}$.

Llamemos φ^k a la aplicación lineal continua $E \to \mathcal{E}$ que asigna a $f \in E$, $\varphi^k(f) = f^{(k)}$. Como $\varphi^{(k)}$ aplica el ideal $\mathfrak{J}$ en el ideal Γ_X es claro que φ^k baja a una aplicación lineal continua $\overline{\varphi^k} : \mathcal{A} \to A$ haciendo conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\varphi^k"] \arrow[d] & \mathcal{E} \arrow[d] \\ \mathcal{A} \arrow[r, "\overline{\varphi^k}"] & A \end{tikzcd}$$

luego la aplicación lineal $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ dada por

$$\bar{f} \to \sum_{|k|<m} \overline{\varphi^k}(\bar{f})(\bar{y} - \bar{x})^k$$

es continua, y su núcleo es precisamente $D_A{}^m$: en efecto, si la imagen de $\bar{f}$ por esta aplicación es cero, como el desarrollo de Taylor (2) para funciones ordinarias da un desarrollo para elementos de $\mathcal{A}$:

$$\bar{f} = \sum_{|k|<m} \overline{\varphi^k}(\bar{f})(\bar{y} - \bar{x})^k + \sum_{|h|=m} \overline{F}_h \cdot (\bar{y} - \bar{x})^h$$

si todas las $\overline{\varphi^k}(\bar{f})$ son cero, $\bar{f}$ es expresable como

$$\sum_{|h|=m} \overline{F}_h \cdot (\bar{y} - \bar{x})^h \in D_A{}^m$$

Con esto queda demostrada la necesidad de las condiciones.

b) Suficiencia de las condiciones.

Sea A un álgebra satisfaciendo las condiciones del enunciado. Por la primera condición $\Omega_A = D_A/D_A{}^2$ es un A-módulo libre de rango n. Sea $\xi_1 \dots \xi_n$ una base de Ω_A. En virtud de la proposición III.1.2. que asegura que $\triangle_A$ es densa en D_A es claro que el submódulo de Ω_A generado por las diferenciales de elementos del anillo A es denso en Ω_A (este submódulo es la imagen de $\triangle_A$ en Ω_A) y por la proposición III.3.2.4. resulta que este submódulo coincide con Ω_A de modo que las ξ_j son combinaciones lineales de diferenciales de elementos del anillo.

Por hipótesis podemos encontrar n elementos autoconjugados del anillo $x_1 \dots x_n$ que generen (topológicamente) el anillo. Por la continuidad de la aplicación $A \to \Omega_A$, $a \to da$ resulta nuevamente que el submódulo de Ω_A generado por $dx_1 \dots dx_n$ es denso en Ω_A y aplicado otra vez III.3.2.4. resulta que este submódulo es exactamente Ω_A. Luego $dx_1 \dots dx_n$ es una base para Ω_A y por tanto g_{D_A} es el anillo de polinomios $A\,[dx_1 \dots dx_n]$.

Por comodidad en las notaciones en lo que sigue pondremos $a \otimes 1 = a\,(y)$ $1 \otimes a = a\,(x)$ y denotaremos $F\,(x, y)$ los elementos de $A \hat{\otimes} A$.

Como Ω_A es libre de base $dx_1 \dots dx_n$, para cada $a \in A$, da se expresa en forma única como $da = a_1\,dx_1 + \dots + a_n\,dx_n$. Llamemos $a_i = \delta_i\,(a)$. Entonces $a\,(y) - a\,(x)$ y $\sum\limits_{i=1}^{n} \delta_i\,(a)\,(y_i - x_i)$ (donde $x_i = 1 \otimes x_i$, $y_i = x_i \otimes 1$) tienen la misma clase en Ω_A luego $a\,(y) - a\,(x) - \sum\limits_{i=1}^{n} \delta_i\,(a)\,(y_i - x_i) \in D^2$. Su clase en D^2/D^3 será por tanto univocamente expresable en la forma $\frac{1}{2\,!} \sum\limits_{i.j=1}^{n} a_{ij}\,(x)\,dx_i\,dx_j$. Llamemos $a_{ij}\,(x) = \delta_{ij}\,(a)$. Entonces

$$a\,(y) - a\,(x) - \sum_{i=1}^{n} \delta_i\,(a)\,(y_i - x_i) - \\ - \frac{1}{2\,!} \sum_{i.j=1}^{n} \delta_{ij}\,(a)\,(y_i - x_i)\,(y_j - x_j) \in D^3$$

y así sucesivamente obtenemos que para cada n-entero $k = (k_1 \dots k_n)$ se puede encontrar un elemento $\delta_{(k)}\,(a) \in A$ tal que:

(1) $$a\,(y) - \sum_{|k| \leq m} \frac{\delta_k\,(a)}{k\,!}\,(y - x)^k \in D_A{}^{m+1}$$

y que $\delta_k(a)$ está univocamente determinado para cada k por esta condición.

Demostremos que se verifica (2) $\delta_k \circ \delta_h = \delta_{k+h}$.

Para ello tengamos en cuenta que D^m/D^{m+1} es un módulo libre de FRÉCHET y que cada aplicación $\delta_k : A \to A$ consiste en componer una aplicación continua $A \to D^m/D^{m+1}$ (si $m = |k|$) con tomar la coordenada k-ésima en la base $\{dx_1^{k_1} \ldots dx_n^{k_n}\}$ de D^m/D^{m+1}; con ello $\delta_k : A \to A$ es continua y para demostrar la relación $\delta_k \circ \delta_h = \delta_{k+h}$ basta comprobar que se verifica en una parte densa del anillo A: pero los polinomios en $x_1 \ldots x_n$ forman una subálgebra densa de A y para ellos la relación (2) es puramente algebraica, formal.

El mismo argumento prueba la «regla de LEIBNITZ».

$$3) \qquad \delta_k(a \,.\, b) = \sum_{h \leq k} \binom{k}{h} \delta_h(a) \,.\, \delta_{(k-h)}(b)$$

sea $A[[\xi_1 \ldots \xi_n]] = A[[\xi]]$ (por abreviar) el anillo de las series formales de n variables con coeficientes en A. Definamos una aplicación $\varphi : A \to A[[\xi]]$ poniendo $\varphi(a) = \sum_k \frac{1}{k!} \delta_k(a) \,.\, \xi^k$.

Las relaciones (3) prueban que φ es un morfismo de anillos. Sea $\overline{A}$ el cociente de A por el radical. $\overline{A}$ es un anillo de funciones continuas sobre X. El morfismo $A \to \overline{A}$ da canonicamente un morfismo

$$A[[\xi]] \to \overline{A}[[\xi]]$$

que compuesto con φ da un morfismo $\overline{\varphi} : A \to \overline{A}[[\xi]]$.

Pues bien, las relaciones (2) demuestran que la imagen de $a \in A$ es un jet de WHITNEY sobre X (salvo los $k!$): en efecto, llamando T^m al morfismo que resulta de componer $\overline{\varphi}$ con el paso al cociente por el ideal de las series formales de grado $> m$ se tiene

$$T^m a = \sum_{|k| \leq m} \frac{\overline{\delta_k(a)}}{k!} \,.\, \xi^k$$

($\overline{\delta_h(a)}$ es la imagen de $\delta_k(a)$ en $\overline{A}$).

En virtud de las relaciones (2)

$$(4) \qquad \delta_k(a)(y) - \sum_{|h| \leq m-|k|} \frac{\delta_{k+h}(a)(x)}{h!}(y-x)^h \in D_A^{m+1-|k|}$$

luego tomando dos puntos α_0, $\alpha_1 \in X$ y aplicando a (4) el morfismo $A \hat{\otimes} A \to \mathbf{C}$ definido por este par de puntos tendremos

$$\overline{\delta_k (a)}\, (\alpha_1) - \sum_{|h| \leq m - |k|} \frac{\overline{\delta_{k+h} (a)}\, (\alpha_0)}{h\,!} (\alpha_1 - \alpha_0)^h =$$

$$= \sum_{|p| = m+1-|h|} F_p (\alpha_0\, \alpha_1)\, (\alpha_1 - \alpha_1)^p \qquad (*)$$

lo que implica la condición de WHITNEY dada en III.3.1. Por consiguiente tendremos un morfismo

$$\overline{\varphi} : A \to W (X)$$

siendo $W(X)$ el anillo de WHITNEY de X en $\mathbf{R}^n$.

$\overline{\varphi}$ es inyectivo; en efecto, tomemos $a \in A$ y consideremos la relación (1); tomemos $\alpha \in X$ y consideremos el morfismo $a \otimes b \to a \,.\, b\, (\alpha)$ de $A \hat{\otimes} A \to A \otimes \mathbf{C} = A$. Aplicando este morfismo a (1) tendremos

$$a = \sum_{|k| \leq m} \frac{\overline{\delta_k (a)}\, (\alpha)}{k\,!} (x - \alpha)^k + r_{m+1}$$

con $r_{m+1} \in m_\alpha^{m+1}$ (Obsérvese que el morfismo $a \otimes b \to a \,.\, b\, (\alpha)\, D_A$ se aplica en m_x). Por consiguiente, si $\overline{\varphi}(a) = 0$, deberá ser $\overline{\delta_k (a)}\, (\alpha) = 0$, luego $a \in m_\alpha^m$ para todo $\alpha \in X$ y todo $m \in \mathbf{N}$.

Pero por la condición (2) esto implica que $a = 0$. Luego $\overline{\varphi}$ es inyectivo.

Finalmente, demostraremos que el morfismo es exhaustivo usando para ello la condición 3).

Tomemos $\tilde{f} \in W(X)$ y sea f un representante de $\tilde{f}$ en $\mathcal{E}$. Utilizando una proposición análoga a (III.2.1.3.) para anillos con radical diferenciablemente cerrados, se demuestra que existe un morfismo continuo $\mathcal{E} = C^\infty(\mathbf{R}^n) \to A$ que transforma las coordenadas $t_1 \ldots t_n$ de $\mathbf{R}^n$ en los generadores $x_1 \ldots x_n$ de A. Este morfismo da un morfismo $\mathcal{E} \hat{\otimes} \mathcal{E} \to A \hat{\otimes} A$. Pongamos

$$f (t) = \sum_{|k| < m} \frac{f^{(k)} (s)}{k\,!} (t - s)^k + \sum_{|h| = m} R (t, s)\, (t - s)^h$$

(*) «Deberíamos haber demostrado que $D_A{}^r$ está generada sobre $A \hat{\otimes} A$ por las potencias $(y - x)^p$ con $|\, p\,| = r$; ver la demostración al final del texto».

En el morfismo $\mathcal{E} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{E} \to A \mathbin{\widehat{\otimes}} A$ esta igualdad se transforma en

$$(5) \qquad a(y) = \sum_{|k|<m} \frac{a_k(x)}{k!} (y - x)^k + \sum_{|h|=m} \varrho(x,y)(y - x)^h$$

donde a es la imagen de f y a_k la de $f^{(k)}$. Por la unicidad del desarrollo de a en A. necesariamente debe ser $a_k = \delta_k(a)$.

Pero tal como hemos definido el morfismo, evidentemente la función $\bar{a}_k$ en X coincide con $f^{(k)} \mid X$, que es desde luego la k-ésima componente del jet de WHITNEY $\tilde{f}$, luego en el morfismo $A \to W(X)$ a se aplica en $\tilde{f}$.

Esto termina la demostración.

Aclaración a la página 67

Hemos usado sin justificarlo el hecho de que $D_A{}^r$ está generada por las «potencias» $(y - x)^p$ con $|p| = r$. Por hipótesis $D_A{}^r$ es un $\mathfrak{A}$-módulo de FRÉCHET finito generado. De la proposición III.1.2 y de estar A generada como álgebra topológica por $x_1, \dots, x_n$ se deduce sin dificultad que los elementos $y_i - x_i$ generan un submódulo denso de D_A. Luego las mencionadas «potencias» de la forma $(y - x)^p = (y_1 - x_1)^{p_1} \dots (y_n - x_n)^{p_n}$ generan un ideal denso en $D_A{}^r$. Basta entonces que un módulo de FRÉCHET de tipo finito sobre un álgebra de FRÉCHET de espectro compacto (tal como $\mathfrak{A}$) no contenga submódulos propios densos. Y ésto se deduce fácilmente de la proposición III.3.2.3.

BIBLIOGRAFIA

1. A. GROTHENDIECK: *Produits tensoriels topologiques et espaces nucleaires*, Memoirs of the Amer. Math, Soc, núm. 16, 1955.
2. SEMINAIRE SCHWARTZ - 1953-54.
3. J. MUÑOZ Y J. M. ORTEGA: *Sobre las álgebras localmente convexas*. Coll. Math. vol. XX, fasc. 2.º, 1969.
4. R. M. BROOKS: *The Structure Space of a conmutative locally M. convex álgebra*. Pacific J. of Math. Vol. 25 n.º 3, 1968.
5. J. M. GUELFAND. D. A. RAIKOV. G. E. CHILOV, *Les Anneaux Normés Commutatifs*.
6. R. ARENS, *Dense inverse limit rings*. Michigan Math. J. Vol. 5, núm. 2, 1958.
7. R. M. BROOKS. *Partitions of Unity in F-Algebras*. Math. Ann. 177 - 4, 1968.
8. B. MALGRANGE. *Ideals of differentiable functions*.
9. B. ROTH. *Finitely - Generated Ideals of Differentiable Functions*. Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 150, july 1970.
10. J. C. TOUGERON ET J. MERRIEN. *Ideaux de fonctions differentiables*, II. Ann. Inst. Fourier, Tome XX, Fas. 1, 1970.