«RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE CAUCHY RELATIVO A UNA CLASE DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES DE 3.er ORDEN, CUASI-LINEALES Y DE TIPO HIPERBÓLICO»

por

J. M. CASCANTE DÁVILA

8. Abiertos regularmente convexos relativamente a una ecuación diferencial ordinaria. — Añadamos ahora, ciertas hipótesis restrictivas a la frontera del abierto G considerado precedentemente, así como al mismo G.

Sea $G \subset \mathbf{R}^2$ un abierto acotado y G' un abierto de $\mathbf{R}^2$ tal que $\bar{G} \subset G'$, y sea $\varrho : G' \longrightarrow \mathbf{R}^2$ una función continua y continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre G'. En estas condiciones, para todo $\vec{x}^0 \in G$, se verifica en virtud de lo establecido en la OBSERVACIÓN 2.ª del n.º 6, que las extremidades $x_1^{izq}(\vec{x}^0)$, $x_1^{der}(\vec{x}^0)$ del intervalo de definición de la solución global en G de la ecuación diferencial $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho_{|G}(x_1, x_2)$ pasando por $\vec{x}^0$, pertenecen al intervalo $]x_1'^{izq}(\vec{x}^0), x_1'^{der}(\vec{x}^0)[$ de definición de la solución global en G' de la ecuación diferencial $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$ pasando asimismo por $\vec{x}^0$, y además, si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ son los respectivos conjuntos de definición de la integral general global λ en G de $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho_{|G}(x_1, x_2)$ y de la integral general global μ en G' de $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$, se tiene que: $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$ y $\mu_{|\mathcal{A}} = \lambda$ y $(x_1^{izq}(\vec{x}^0), \mu(x_1^{izq}(\vec{x}^0), x_1^0, x_2^0)) \in \mathrm{Fr}\, G$ y y $(x_1^{der}(\vec{x}^0), \mu(x_1^{der}(\vec{x}^0), x_1^0, x_2^0)) \in \mathrm{Fr}\, G$.

Pongamos por definición:

$$«G \text{ es convexo relativamente a } \frac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall_{(x_1, x_1^0, x_2^0)})\ (\vec{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) \in G \text{ y } x_1 \in\ ]x_1'^{izq}(\vec{x}^0), x_1'^{der}(\vec{x}^0)[\text{ y}$$
$$\text{y } (x_1, \mu(x_1, x_1^0, x_2^0)) \in \mathrm{Fr}\ G \Rightarrow (x_1 = x_1^{izq}(\vec{x}^0) \text{ ó } x_1 = x_1^{der}(\vec{x}^0)))»$$

es decir, G es convexo relativamente a $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$ sí sólo sí, para todo $\vec{x}^0 \in G$, la solución global en G' de la ecuación diferencial $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$ pasando por $\vec{x}^0$ alcanza a la frontera de G en dos y solamente dos de sus puntos, que son, por tanto, los puntos $(x_1^{izq}(\vec{x}^0), \mu(x_1^{izq}(\vec{x}^0), x_1^0, x_2^0))$ y $(x_1^{der}(\vec{x}^0), \mu(x_1^{der}(\vec{x}^0), x_1^0\ x_2^0))$ de $\mathrm{Fr}\ G$.

Observación 3.ª. — Si se tiene:

$$«(x_1^0, x_2^0) \in G \text{ y } (x_1, x_1^0, x_2^0) \in \mathcal{A}' \text{ y } x_2 = \mu(x_1, x_1^0, x_2^0) \text{ y}$$
$$\text{y } x_1 \in\ ]x_1^{izq}(\vec{x}^0), x_1^{der}(\vec{x}^0)[»$$

puesto que:

$$«(x_1^0, x_2^0) \in G \text{ y } x_1 \in]x_1^{izq}(\vec{x}\,0), x_1^{der}(\vec{x}\,0)[\Rightarrow (x_1, x_1^0, x_2^0) \in \mathfrak{A}»$$

y

$$«(x_1, x_1^0, x_2^0) \in \mathfrak{A} \Rightarrow x_2 = \mu(x_1, x_1^0, x_2^0) = \lambda(x_1, x_1^0, x_2^0)»$$

y además, dado que:

$$«x_2 = \lambda(x_1, x_1^0, x_2^0) \Rightarrow (x_1, x_2) \in G»$$

se deduce de todo ello la validez de la relación:

$$«(x_1^0, x_2^0) \in G \text{ y } (x_1, x_1^0, x_2^0) \in \mathfrak{A}' \text{ y } x_2 = \mu(x_1, x_1^0, x_2^0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [x_1 \in]x_1^{izq}(\vec{x}\,0), x_1^{der}(\vec{x}\,0)[\Rightarrow (x_1, x_2) \in G]» \qquad (a')$$

Inversamente, supuesto que:

$$«(x_1^0, x_2^0) \in G \text{ y } (x_1, x_1^0, x_2^0) \in \mathfrak{A}' \text{ y } x_2 = \mu(x_1, x_1^0, x_2^0) \text{ y } (x_1, x_2) \in G»$$

ya que, en virtud de lo establecido en las OBSERVACIONES 1.ª y 2.ª, la hipótesis de que se ha partido al principio de este número y la hipótesis precedente, entrañan:

$$«x_1'^{izq}(\vec{x}\,0) = x_1'^{izq}(\vec{x}) \text{ y } x_1'^{der}(\vec{x}\,0) = x_1'^{der}(\vec{x}) \text{ y}$$
$$\text{y } [x_1^{izq}(\vec{x}), x_1^{der}(\vec{x})] \subset]x_1'^{izq}(\vec{x}), x_1'^{der}(\vec{x})[»$$

y por tanto:

$$«x_1'^{izq}(\vec{x}\,0) = x_1'^{izq}(\vec{x}) < x_1^{izq}(\vec{x}) < x_1^{der}(\vec{x}) < x_1'^{der}(\vec{x}) = x_1'^{der}(\vec{x}\,0)»$$

de lo que se deduce:

$$«(x_1^{izq}(\vec{x}), x_1^0, x_2^0) \in \mathfrak{A}' \text{ y } (x_1^{der}(\vec{x}), x_1^0, x_2^0) \in \mathfrak{A}'»$$

y dado que:

$$\left.\begin{array}{l} «(x_1^{izq}(\vec{x}), \mu(x_1^{izq}(\vec{x}), x_1^0, x_2^0)) = (x_1^{izq}(\vec{x}), \mu(x_1^{izq}(\vec{x}), x_1, x_2)) \in \operatorname{Fr} G» \\ \qquad\qquad\qquad \text{y} \\ «(x_1^{der}(\vec{x}), \mu(x_1^{der}(\vec{x}), x_1^0, x_2^0)) = (x_1^{der}(\vec{x}), \mu(x_1^{der}(\vec{x}), x_1, x_2)) \in \operatorname{Fr} G» \end{array}\right\}$$

se sigue como consecuencia de las hipótesis efectuadas sobre Fr G [teniendo en cuenta, además, que es: $x_1^{izq}(\vec{x}) < x_1^{der}(\vec{x})$ y $x_1^{izq}(\vec{x}\,0) < x_1^{der}(\vec{x}\,0)$], que:

$$«x_1^{izq}(\vec{x}) = x_1^{izq}(\vec{x}\,0) \text{ y } x_1^{der}(\vec{x}) = x_1^{der}(\vec{x}\,0)»$$

lo que implica:

$$«x_1 \in]x_1^{izq}(\vec{x}),\ x_1^{der}(\vec{x})[=]x_1^{izq}(\vec{x}0),\ x_1^{der}(\vec{x}0)[»$$

Así, pues, se verifica la relación:

$$«(x_1^0,\ x_2^0) \in G \text{ y } (x_1,\ x_1^0,\ x_2^0) \in \mathfrak{A}' \text{ y } x_2 = \mu(x_1,\ x_1^0,\ x_2^0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [(x_1,\ x_2) \in G \Rightarrow x_1 \in]x_1^{izq}(\vec{x}0),\ x_1^{der}(\vec{x}0)[]»$$

que junto con la ($^{a'}$) establece la validez de la:

$$«(x_1^0,\ x_2^0) \in G \text{ y } (x_1,\ x_1^0,\ x_2^0) \in \mathfrak{A}' \text{ y } x_2 = \mu(x_1,\ x_1^0,\ x_2^0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [(x_1,\ x_2) \in G \Leftrightarrow x_1 \in]x_1^{izq}(\vec{x}0),\ x_1^{der}(\vec{x}0)[]» \qquad (^a)$$

y puesto que, evidentemente:

$$«(x_1^0,\ x_2^0) \in G \text{ y } (x_1,\ x_1^0,\ x_2^0) \in \mathfrak{A}' \text{ y } x_2 = \mu(x_1,\ x_1^0,\ x_2^0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [(x_1,\ x_2) \in \mathrm{Fr}\ G \Leftrightarrow x_1 \in \{x_1^{izq}(\vec{x}0),\ x_1^{der}(\vec{x}0)\}]»$$

se concluye finalmente, que se verifica:

$$«(x_1^0,\ x_2^0) \in G \text{ y } (x_1,\ x_1^0,\ x_2^0) \in \mathfrak{A}' \text{ y } x_2 = \mu(x_1,\ x_1^0,\ x_2^0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [(x_1,\ x_2) \in \bar{G} \Leftrightarrow x_1 \in [x_1^{izq}(\vec{x}0),\ x_1^{der}(\vec{x}0)]]» \qquad (^b)$$

Sentado esto, impongamos ahora, que, además, la frontera de G esté constituída por una curva cerrada de JORDÁN definida por dos funciones $p : [t_1,\ t_2] \longrightarrow \mathbf{R}$ y $q : [t_1,\ t_2] \longrightarrow \mathbf{R}$, continuamente derivables sobre $[t_1,\ t_2]$ y tal que verifiquen: $p'(t_1) = p'(t_2)$ y $q'(t_1) = q'(t_2)$ y y $(\forall t)\ (t \in [t_1,\ t_2] \Rightarrow q'(t) - \varrho(p(t),\ q(t)) .\ p'(t) \neq 0)$. (10)

A un abierto G de $\mathbf{R}^2$ acotado, tal que: $\bar{G} \subset G'$ (G' abierto de $\mathbf{R}^2$), y que sea convexo relativamente a la ecuación diferencial $\frac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1,\ x_2)$, (con $\varrho : G' \longrightarrow \mathbf{R}$, continua y continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre G'), y cuya frontera Fr G sea una curva cerrada de JORDÁN definida por dos funciones $p : [t_1,\ t_2] \longrightarrow \mathbf{R}$, y $q : [t_1,\ t_2] \longrightarrow \mathbf{R}$, continuamente derivables sobre $[t_1,\ t_2]$, verificando además la condición (10), se le denominará «abierto regularmente convexo relativamente a la ecuación diferencial ordinaria $\frac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1,\ x_2)$».

Podemos siempre suponer prolongadas p y q a $\mathbf{R}$ mediante dos funciones $\widetilde{p}: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ y $\widetilde{q}: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, periódicas de período $t_2 - t_1$, definidas como sigue:

$$\left.\begin{aligned} t \in \mathbf{R} &\longrightarrow \widetilde{p}(t) = p\left(t - (t_2 - t_1) \cdot E\left(\frac{t - t_1}{t_2 - t_1}\right)\right) \in \mathbf{R} \\ t \in \mathbf{R} &\longrightarrow \widetilde{q}(t) = q\left(t - (t_2 - t_1) \cdot E\left(\frac{t - t_1}{t_2 - t_1}\right)\right) \in \mathbf{R} \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} (E : \mathbf{R} \longrightarrow Z, \text{ función} \\ \text{parte entera}) \end{array}$$

las cuales son continuamente derivables sobre $\mathbf{R}$ y verifican como consecuencia de (10), la relación:

$$«(\forall t)\ (t \in \mathbf{R} \Rightarrow \widetilde{q}'(t) - \varrho(\widetilde{p}(t), \widetilde{q}(t)) \cdot \widetilde{p}'(t) \neq 0)» \tag{10'}$$

Para todo $\vec{x}^{*0} \in G$, se tiene por lo establecido precedentemente, que es válida la relación:

$$\begin{gathered} «(x_1^{izq}(\vec{x}^{*0}),\ x_1^{*0},\ x_2^{*0}) \in \mathfrak{A}' \text{ y} \\ \text{y } (x_1^{izq}(\vec{x}^{*0}),\ \mu(x_1^{izq}(\vec{x}^{*0}),\ x_1^{*0},\ x_2^{*0})) \in \operatorname{Fr} G)» \end{gathered}$$

por lo que existe un $t^* \in \mathbf{R}$, tal que:

$$«x_1^{izq}(\vec{x}^{*0}) = \widetilde{p}(t^*) \text{ y } \mu(x_1^{izq}(\vec{x}^{*0}),\ x_1^{*0},\ x_2^{*0}) = \widetilde{q}(t^*)» \tag{10''}$$

Por otra parte, dado que $\vec{x}^{*0} \in G$ y $(x_1^{izq}(\vec{x}^{*0}), x_1^{*0}, x_2^{*0}) \in \mathfrak{A}'$ y $\mathfrak{A}'$ así como G son abiertos, existe un $(l, \eta) \in [\mathbf{R}^+ - \{0\}] \times [\mathbf{R}^+ - \{0\}]$, que verifica:

$$«B_\eta(\vec{x}^{*0}) \subset G \text{ y }]x_1^{izq}(\vec{x}^{*0}) - l,\ x_1^{izq}(\vec{x}^{*0}) + l[\times B_\eta(\vec{x}^{*0}) \subset \mathfrak{A}'»$$

y además, en virtud de la continuidad de $\widetilde{p}: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ sobre $\mathbf{R}$, se puede determinar un $\sigma \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$, tal que:

$$«(\forall t)\ (t \in]t^* - \sigma,\ t^* + \sigma[\Rightarrow \widetilde{p}(t) \in]x_1^{izq}(\vec{x}^{*0}) - l,\ x_1^{izq}(\vec{x}^{*0}) + l[)»$$

por lo que, consecuentemente, es válida la relación:

$$\begin{aligned} «(\forall (t,\ x_1^0,\ x_2^0))\ ((t,\ x_1^0,\ x_2^0) \in]t^* - \sigma,\ t^* + \sigma[\times B_\eta(\vec{x}^{*0}) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\widetilde{p}(t),\ x_1^0,\ x_2^0) \in \mathfrak{A}')» \end{aligned}$$

Se sigue de ello que está definida la aplicación compuesta:

$$(t,\ x_1{}^0,\ x_2{}^0) \in]t^* - \sigma,\ t^* + \sigma[\times B_\eta(\vec{x}^{*0}) \longrightarrow \Phi(t,\ x_1{}^0,\ x_2{}^0) =$$
$$= \widetilde{q}(t) - \mu(\widetilde{p}(t),\ x_1{}^0,\ x_2{}^0) \in \mathbf{R}$$

verificándose, además [habida cuenta (10′) y (10″)]:

$$\left\{\begin{array}{ll} \alpha') & \Phi(t,^*\ x_1{}^{*0},\ x_2{}^{*0}) = \widetilde{q}(t^*) - \mu(\widetilde{p}(t^*),\ x_1{}^{*0},\ x_2{}^{*0}) = 0 \\ \beta') & (D_1\Phi)(t^*,\ x_1{}^{*0},\ x_2{}^{*0}) = \widetilde{q}'(t^*) - \varrho(\widetilde{p}(t^*),\ \mu(\widetilde{p}(t^*),\ x_1{}^{*0},\ x_2{}^{*0}))\cdot \\ & \cdot\widetilde{p}'(t^*) = \widetilde{q}'(t^*) - \varrho(\widetilde{p}(t^*),\ \widetilde{q}(t^*))\cdot\widetilde{p}'(t^*) \neq 0 \\ \gamma') & \widetilde{p}(t^*) = x_1{}^{izq}(\vec{x}^{*0}) < x_1{}^{*0} \end{array}\right.$$

En virtud del teorema de existencia de funciones implícitas, existe una aplicación $s : B_{\eta'}(\vec{x}^{*0}) \longrightarrow \mathbf{R}$ definida y continuamente diferenciable sobre un cierto disco abierto $B_{\eta'}(\vec{x}^{*0})$ centrado en $\vec{x}^{*0}$, tal que:

$$\text{«}s(x_1{}^{*0},\ x_2{}^{*0}) = t^* \text{ y } (\forall(x_1{}^0,\ x_2{}^0))\ ((x_1{}^0,\ x_2{}^0), \in B_{\eta'}(\vec{x}^{*0}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (s(x_1{}^0,\ x_2{}^0),\ x_1{}^0,\ x_2{}^0) \in]t^* - \sigma,\ t^* + \sigma[\times B_\eta(\vec{x}^{*0}) \text{ y}$$
$$\text{y } \Phi(s(x_1{}^0,\ x_2{}^0),\ x_1{}^0,\ x_2{}^0) =$$
$$= \widetilde{q}(s(x_1{}^0,\ x_2{}^0)) - \mu(\widetilde{p}(s(x_1{}^0,\ x_2{}^0)),\ x_1{}^0,\ x_2{}^0) = 0)\text{»} \qquad (10''')$$

Pongamos $w = \widetilde{p} \circ s : B_{\eta'}(\vec{x}^{*0}) \subset \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$; w es continuamente diferenciable sobre $B_{\eta'}(\vec{x}^{*0})$, y en virtud de γ') y de (10‴), se tiene que:

$$\text{«}w(\vec{x}^{*0}) = \widetilde{p}(s(x_1{}^{*0},\ x_2{}^{*0})) = \widetilde{p}(t^*) < x_1{}^{*0}\text{»} \qquad (10^{\mathrm{IV}})$$

Por la continuidad de la aplicación proyección $\vec{x}^0 = (x_1{}^0,\ x_2{}^0) \in \in \mathbf{R}^2 \longrightarrow pr_1(\vec{x}^0) = x_1{}^0 \in \mathbf{R}$, y dado que por ($10^{\mathrm{IV}}$) se verifica que $w(\vec{x}^{*0}) < pr_1\,\vec{x}^{*0} = x_1{}^{*0}$, se puede determinar, consecuentemente, un disco abierto $B_{\eta^*}(\vec{x}^{*0})$ centrado en $\vec{x}^{*0}$ y contenido en $B_{\eta'}(\vec{x}^{*0})$, tal que:

$$\text{«}(\forall\vec{x}^0)\ (\vec{x}^0 \in B_{\eta^*}(\vec{x}^{*0}) \Rightarrow w(\vec{x}^0) < pr_1\,\vec{x}^0 = x_1{}^0)\text{»} \qquad (10^{\mathrm{V}})$$

Por otra parte, de (10''') [habida cuenta además que: $B_{\eta^*}(\vec{x}^{*0}) \subset \subset B_{\eta'}(\vec{x}^{*0}) \subset B_\eta(\vec{x}^{*0}) \subset G$], se deduce que:

$$«(\forall \vec{x}^0)\,(\vec{x}^0 \in B_{\eta^*}(\vec{x}^{*0}) \Rightarrow \vec{x}^0 \in G \quad \text{y} \quad (w(\vec{x}^0),\ \mu(w(\vec{x}^0),\ x_1{}^0,\ x_2{}^0)) = = (\widetilde{p}(s(\vec{x}^0)),\ \mu(\widetilde{p}(s(\vec{x}^0)),\ x_1{}^0,\ x_2{}^0)) = (\widetilde{p}(s(\vec{x}^0)),\ \widetilde{q}(s(\vec{x}^0))) \in \mathrm{Fr}\ G)»$$

relación, que en virtud de la hipótesis efectuada sobre la frontera de G, entraña:

$$«(\forall \vec{x}^0)\,(\vec{x}^0 \in B_{\eta^*}(\vec{x}^{*0}) \Rightarrow [(w(\vec{x}^0) = x_1{}^{izq}(\vec{x}^0)) \text{ ó } (w(\vec{x}^0) = x_1{}^{der}(\vec{x}^0))])»$$

y esta última relación junto con la (10$^{\mathrm{V}}$) establece a su vez la validez de la:

$$«(\forall \vec{x}^0)\,(\vec{x}^0 \in B_{\eta^*}(\vec{x}^{*0}) \Rightarrow w(\vec{x}^0) = x_1{}^{izq}(\vec{x}^0))» \qquad (10^{\mathrm{VI}})$$

Pongamos $«w_{|B_{\eta^*}(\vec{x}^{*0})} = v^{(\vec{x}^{*0})}$; de (10$^{\mathrm{VI}}$) se sigue que cualesquiera sean $(\vec{x}^{*0},\ \vec{x}^{**0}) \in G \times G$, es válida la relación:

$$«\vec{x}^0 \in B_{\eta^*}(\vec{x}^{*0}) \cap B_{\eta^{**}}(\vec{x}^{**0}) \Rightarrow v^{(\vec{x}^{*0})}(\vec{x}^0) = x_1{}^{izq}(\vec{x}^0) = v^{(\vec{x}^{**0})}(\vec{x}^0)»$$

es decir:

$$«v^{(\vec{x}^{*0})}_{|B_{\eta^*}(\vec{x}^{*0}) \cap B_{\eta^{**}}(\vec{x}^{**0})} = v^{(\vec{x}^{**0})}_{|B_{\eta^*}(\vec{x}^{*0}) \cap B_{\eta^{**}}(\vec{x}^{**0})}»$$

lo que entraña que exista una única función $v^{izq} : G \longrightarrow \mathbf{R}$, tal que para todo $\vec{x}^{*0} \in G$ prolonga $v^{(\vec{x}^{*0})}$ a $G = \cup B_{\eta^*}(\vec{x}^{*0})$, la cual es continuamente diferenciable sobre G y verifica que:

$$«(\forall \vec{x}^0)\,(\vec{x}^0 \in G \Rightarrow v^{izq}(\vec{x}^0) = x_1{}^{izq}(\vec{x}^0))»$$

Análogamente, se construiría una aplicación $v^{der} : G \longrightarrow \mathbf{R}$, continuamente diferenciable sobre G y tal que:

$$«(\forall \vec{x}^0)\,(\vec{x}^0 \in G \Rightarrow v^{der}(\vec{x}^0) = x_1{}^{der}(\vec{x}^0))»$$

9. El subconjunto $\{(x_1, x_2) \in \bar{G}/(\exists\, r)\,(r \in [r^A, r^B] \text{ y } (x_1(r), x_1, x_2) \in \in \mathfrak{A}' \text{ y } x_2(r) = \mu(x_1(r), x_1, x_2))\}$ de $\bar{G}$. — Supongamos ahora, que como en el número precedente es $G \subset \mathbf{R}^2$ un abierto acotado y G' asimismo un abierto de $\mathbf{R}^2$, pero tal que $\bar{G} \subset G'$, y $\varrho : G' \longrightarrow \mathbf{R}$ una función continua y continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre G', tal que relativamente a la ecuación diferencial ordinaria $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$ sea el abierto G regular-

mente convexo, [n.º 8 precedente], y que además sea C un arco de la clase (Γ) contenido en G y relativamente a la ecuación diferencial $\frac{dx_2}{dx_1} = \varrho_{|G}(x_1, x_2)$. Nos proponemos estudiar las relaciones existentes entre el conjunto $\mathcal{E}_c = \{(x_1, x_2) \in \bar{G} / (\exists\, r)\, (r \in [r^A, r^B]$ y $(x_1(r), x_1, x_2) \in \mathfrak{A}'$ y y $x_2(r) = \mu(x_1(r), x_1, x_2))\}$ y el conjunto considerado en el n.º 7, $\mathcal{E}_c{}^a = \{(x_1, x_2) \in G / (\exists\, r)\, (r \in]r^A, r^B[$ y $(x_1(r), x_1, x_2) \in \mathfrak{A}$ y $x_2(r) = = \lambda(x_1(r), x_1, x_2))\}$ el primero de los cuales contiene evidentemente a C, y en donde $\mu : \mathfrak{A}' \subset \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ es la integral general global en G' de $\frac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$ y $\lambda = \mu_{|\mathfrak{A}} : \mathfrak{A} \subset \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ es la integral general global en G de la ecuación diferencial ordinaria $\frac{dx_2}{dx_1} = \varrho_{|G}(x_1, x_2)$.

Para ello, sea $\vec{x}^* = (x_1{}^*, x_2{}^*) \in \overline{\mathcal{E}_c{}^a}$; existe, en consecuencia, una sucesión $(\vec{x}^i)_{i \in N}$ de puntos de $\mathcal{E}_c{}^a$ convergente en $\mathbf{R}^2$ hacia $\vec{x}^*$, por lo que:

$$«(\forall i)\ (i \in N \Rightarrow (\exists\, r^i)\ (r^i \in]r^A, r^B[\subset [r^A, r^B] \text{ y } (x_1{}^i, x_1(r^i), x_2(r^i)) \in \mathfrak{A} \text{ y }$$
$$\text{y } x_2{}^i = \lambda(x_1{}^i, x_1(r^i), x_2(r^i)) = \mu(x_1{}^i, x_1(r^i), x_2(r^i))))»$$

Pero por ser $[r^A, r^B]$ un compacto de $\mathbf{R}$, la sucesión $(r^i)_{i \in N}$ de elementos de $[r^A, r^B]$ admite un valor de adherencia $r^* \in [r^A, r^B]$, es decir, existe una sucesión $(r^{i_k})_{k \in N}$ parcial de la sucesión $(r^i)_{i \in N}$, que es convergente en $\mathbf{R}$ hacia r^*, sucesión parcial a la cual corresponde la sucesión parcial $(\vec{x}^{i_k})_{k \in N}$ de la sucesión $(\vec{x}^i)_{i \in N}$, y que por tanto converge en $\mathbf{R}^2$ hacia $\vec{x}^*$.

Puesto que:

$$«(\forall k)\ (k \in N \Rightarrow v^{izq}(\vec{x}(r^{i_k})) = x_1{}^{izq}(\vec{x}(r^{i_k})) < x_1{}^{i_k} < x_1{}^{der}(\vec{x}(r^{i_k})) =$$
$$= v^{der}(\vec{x}(r^{i_k}))))»$$

en virtud de la continuidad de v^{izq} y v^{der} sobre G, y dado que $(\vec{x}(r^{i_k}))_{k \in N}$ converge en $\mathbf{R}^2$ hacia $\vec{x}(r^*) \in G$ y $(x_1{}^{i_k})_{k \in N}$ converge en $\mathbf{R}$ hacia $x_1{}^*$, se sigue de la anterior relación:

$$«v^{izq}(\vec{x}(r^*)) = x_1{}^{izq}(\vec{x}(r^*)) \leq x_1{}^* \leq x_1{}^{der}(\vec{x}(r^*)) = v^{der}(\vec{x}(r^*))»$$

lo que entraña:

$$«x_1{}^* \in [x_1{}^{izq}(\vec{x}(r^*)),\ x_1{}^{der}(\vec{x}(r^*))] \subset]x_1{}'^{izq}(\vec{x}(r^*)),\ x_1{}'^{der}(\vec{x}(r^*))[»$$

es decir:

$$«(x_1{}^*,\ x_1(r^*),\ x_2(r^*)) \in \mathcal{A}'»$$

y, por tanto, en virtud de la continuidad de μ sobre $\mathcal{A}'$, [habida cuenta, además, que: $(\forall k)\ (k \in N \Rightarrow (x_1{}^{i_k},\ x_1(r^{i_k}),\ x_2(r^{i_k})) \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{A}')$], se deduce que:

$$«(x_2{}^{i_k})_{k \in N} = (\mu(x_1{}^{i_k},\ x_1(r^{i_k}),\ x_2(r^{i_k})))_{k \in N} \text{ converge en } \mathbf{R} \text{ hacia } x_2{}^* = \mu(x_1{}^*,\ x_1(r^*),\ x_2(r^*))»$$

Así pues, es válida, por consiguiente, la relación:

$$«\vec{x}^* \in \bar{\mathcal{E}}_c^a \Rightarrow \vec{x}^* \in \bar{G} \text{ y } (\exists\, r^*)\ (r^* \in [r^A,\ r^B] \text{ y } (x_1{}^*,\ x_1(r^*),\ x_2(r^*)) \in \mathcal{A}' \text{ y } \text{ y } x_2{}^* = \mu(x_1{}^*,\ x_1(r^*),\ x_2(r^*))))»$$

o lo que es equivalente (Véase OBSERVACIÓN 1.ª del n.º 5):

$$«\vec{x}^* \in \bar{\mathcal{E}}_c^a \Rightarrow \vec{x}^* \in \bar{G} \text{ y } (\exists\, r^*)\ (r^* \in [r^A,\ r^B] \text{ y } (x_1(r^*),\ x_1{}^*,\ x_2{}^*) \in \mathcal{A}' \text{ y } \text{ y } x_2(r^*) = \mu(x_1(r^*),\ x_1{}^*,\ x_2{}^*))» \tag{11}$$

Inversamente, supuesto se verifique:

$$«\vec{x}^* \in \bar{G} \text{ y } (\exists\, r^*)\ (r^* \in [r^A,\ r^B] \text{ y } (x_1(r^*),\ x_1{}^*,\ x_2{}^*) \in \mathcal{A}' \text{ y } \text{ y } x_2(r^*) = \mu(x_1(r^*),\ x_1{}^*,\ x_2{}^*))» \tag{11'}$$

dado que, en virtud de la OBSERVACIÓN 1.ª (n.º 5), se tiene la equivalencia:

$$«(x_1(r^*),\ x_1{}^*,\ x_2{}^*) \in \mathcal{A}' \text{ y } x_2(r^*) = \mu(x_1(r^*),\ x^*{}_1,\ x_2{}^*) \Leftrightarrow (x_1{}^*,\ x_1(r^*),\ x_2(r^*)) \in \mathcal{A}' \text{ y } x_2{}^* = \mu(x_1{}^*,\ x_1(r^*),\ x_2(r^*))» \tag{11''}$$

y puesto que además se tiene $\vec{x}(r^*) = (x_1(r^*),\ x_2(r^*)) \in C \subset G$ y y $\vec{x}^* = (x_1{}^*,\ x_2{}^*) \in \bar{G}$, y consecuentemente, [habida cuenta (11″) así como la OBSERVACIÓN 3.ª del número precedente], es válida la relación:

$$«x_1{}^* \in [x_1{}^{izq}(\vec{x}(r^*)),\ x_1{}^{der}(\vec{x}(r^*))]»$$

ha lugar, por tanto, a considerar los casos siguientes, mutuamente excluyentes:

$$\left.\begin{array}{ll} 1.^{o}) & x_1^* \in]x_1^{izq}(\vec{x}(r^*)),\ x_1^{der}(\vec{x}(r^*))[\\ 2.^{o}) & x_1^* = x_1^{izq}(\vec{x}(r^*)) \\ 3.^{o}) & x_1^* = x_1^{der}(\vec{x}(r^*)) \end{array}\right\}$$

1.º) $x_1^* \in]x_1^{izq}(\vec{x}(r^*)),\ x_1^{der}(\vec{x}(r^*))[$ (º). Ya que $\overline{]r^A, r^B[} = [r^A, r^B]$ y y $r^* \in [r^A, r^B]$, existe, en consecuencia, una sucesión $(r^i)_{i \in N}$ de elementos de $]r^A, r^B[$ convergente en **R** hacia r^*, lo que entraña, [dado que: $(\forall i)\ (i \in N \Rightarrow \vec{x}(r^i) \in G)$ y $\vec{x}(r^*) \in G$], que las sucesiones $(x_1^{izq}(\vec{x}(r^i)))_{i \in N} = (v^{izq}(\vec{x}(r^i)))_{i \in N}$ y $(x_1^{der}(\vec{x}(r^i)))_{i \in N} = (v^{der}(\vec{x}(r^i)))_{i \in N}$ converjan en **R**, respectivamente, hacia $x_1^{izq}(\vec{x}(r^*)) = v^{izq}(\vec{x}(r^*))$ y y $x_1^{der}(\vec{x}(r^*)) = v^{der}(\vec{x}(r^*))$, y por tanto, [teniendo en cuenta (º)], se verifica que:

$$«(\exists\, \nu)\ (\nu \in N \text{ y } (\forall i)\ (i \in N \text{ y } i > \nu \Rightarrow x_1^{izq}(\vec{x}(r^i)) < x_1^* < x_1^{der}(\vec{x}(r^i))))»$$

es decir:

$$«(\exists\, \nu)\ (\nu \in N \text{ y } (\forall i)\ (i \in N \text{ y } i > \nu \Rightarrow (x_1^*,\ x_1(r^i),\ x_2(r^i)) \in \mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}'))»$$

y puesto que $(\vec{x}(r^{j+\nu}))_{j \in N}$ converge en $\mathbf{R}^2$ hacia $\vec{x}(r^*)$ y $(x_1^*, x_1(r^*), x_2(r^*)) \in \mathfrak{A}$, es válida, consecuentemente, la relación:

$$«(\lambda(x_1^*,\ x_1(r^{j+\nu}),\ x_2(r^{j+\nu})))_{j \in N} = (\mu(x_1^*,\ x_1(r^{j+\nu}),\ x_2(r^{j+\nu})))_{j \in N}$$
$$\text{converge en } \mathbf{R} \text{ hacia } \mu(x_1^*,\ x_1(r^*),\ x_2(r^*)) = x_2^*»$$

la cual entraña:

$$«(x_1^*,\ \lambda(x_1^*,\ x_1(r^{j+\nu}),\ x_2(r^{j+\nu})))_{j \in N} \text{ es una sucesión de puntos de } \mathcal{E}_c^a$$
$$\text{convergente en } \mathbf{R}^2 \text{ hacia } (x_1^*,\ x_2^*) = \vec{x}^*»$$

y finalmente:

$$«\vec{x}^* \in \bar{\mathcal{E}}_c^a»$$

2.º) $x_1^* = x_1^{izq}(\vec{x}(r^*))$. Consideremos un intervalo abierto $Q(\vec{x}^*) =]x_1^* - a,\ x_1^* + a[\times]x_2^* - b,\ x_2^* + b[$ cualquiera centrado en $\vec{x}^*$. Puesto que las hipótesis efectuadas sobre $G = \mathring{G} \subset \mathbf{R}^2$, sobre $G' = \mathring{G}' \subset \mathbf{R}^2$ y sobre $\varrho : G' \longrightarrow \mathbf{R}$, entrañan, [habida cuenta la OBSERVACIÓN 2.ª del n.º 6 y (11″)] la validez de la relación:

$$
\begin{aligned}
&«\text{Existe } \Psi_{(\vec{x}(r^*))}(x_1^{izq}(\vec{x}(r^*)) + 0) \text{ y } \Psi_{(\vec{x}(r^*))}(x_1^{izq}(\vec{x}(r^*)) + 0) = \\
&= \Psi_{(\vec{x}(r^*))}(x_1^* + 0) = \lambda_{(x_1(r^*),\, x_2(r^*))}(x_1^* + 0) = \\
&= \lim_{x_1 \to x_1^* + 0} \lambda(x_1, x_1(r^*), x_2(r^*)) = \lim_{x_1 \to x_1^* + 0} \mu_{|\mathfrak{C}}(x_1, x_1(r^*), x_2(r^*)) = \\
&= \lim_{x_1 \to x_1^* + 0} \mu(x_1, x_1(r^*), x_2(r^*)) = \mu(x_1^*, x_1(r^*), x_2(r^*)) = x_2^*»
\end{aligned}
$$

se puede, consecuentemente, determinar un $\eta' \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$, tal que:

$$
\begin{aligned}
&«(\forall x_1)\,(x_1 \in]x_1^{izq}(\vec{x}(r^*)),\ x_1^{der}(\vec{x}(r^*))[\cap]x_1^*,\ x_1^* + \eta'[\Rightarrow \\
&\Rightarrow \lambda(x_1, x_1(r^*), x_2(r^*)) \in]x_2^* - b,\ x_2^* + b[)»
\end{aligned}
$$

Sea $\eta = \text{mín}\ \{x_1^{der}(\vec{x}(r^*)) - x_1^{izq}(\vec{x}(r^*)),\ \eta',\ a\} \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$; se verificará, por tanto:

$$
\begin{aligned}
&«(x_1(r^*),\ x_2(r^*)) \in C \subset G \text{ y} \\
&\text{y }]x_1^*,\ x_1^* + \eta[\subset]x_1^*,\ x_1^* + a[\cap]x_1^{izq}(\vec{x}(r^*)),\ x_1^{der}(\vec{x}(r^*))[»
\end{aligned}
$$

y además:

$$»(\forall x_1)\,(x_1 \in]x_1^*,\ x_1^* + \eta[\Rightarrow \lambda(x_1, x_1(r^*), x_2(r^*)) \in]x_2^* - b,\ x_2^* + b[)»$$

es decir:

$$
\begin{aligned}
&«(\forall x_1)\,(x_1 \in]x_1^*,\ x_1^* + \eta[\Rightarrow (x_1, x_1(r^*), x_2(r^*)) \in \mathfrak{C} \text{ y} \\
&\text{y } (x_1, \lambda(x_1, x_1(r^*), x_2(r^*))) \in]x_1^*,\ x_1^* + a[\times]x_2^* - b,\ x_2^* + b[)»
\end{aligned}
$$

y en particular:

$$
\begin{aligned}
&«(\exists\, x_1')\,(x'_1 \in]x_1^*,\ x_1^* + \eta[\text{ y } \vec{x}(r^*) \in G \text{ y} \\
&\text{y } x_1^{izq}(\vec{x}(r^*)) < x_1' < x_1^{der}(\vec{x}(r^*)) \text{ y } (x_1', \lambda(x_1', x_1(r^*), x_2(r^*))) \in \\
&\in]x_1^*,\ x_1^* + a[\times]x_2^* - b,\ x_2^* + b[)» \qquad (11''')
\end{aligned}
$$

Pongamos: $|\lambda(x_1', x_1(r^*), x_2(r^*)) - x_2^*| = b'$ (11^{IV}). Se tiene así: $0 \leq b' < b$, y por tanto:

$$«b - b' \in \mathbf{R}^+ - \{0\}» \qquad (11^{V})$$

Por otra parte, dado que $r^* \in \overline{[r^A, r^B]} = \overline{]r^A, r^B[}$, existe, consecuentemente, una sucesión $(r^i)_{i\in N}$ de elementos de $]r^A, r^B[$ convergente en **R** hacia r^*, la cual determina las sucesiones $(x_1{}^{izq}(\vec{x}(r^i)))_{i\in N} = (v^{izq}(\vec{x}(r^i)))_{i\in N}$ y $(x_1{}^{der}(\vec{x}(r^i)))_{i\in N} = (v^{der}(\vec{x}(r^i)))_{i\in N}$, respectivamente, convergentes en **R** hacia $x_1{}^{izq}(\vec{x}(r^*)) = v^{izq}(\vec{x}^*(r^*))$ y hacia $x_1{}^{der}(\vec{x}(r^*)) = v^{der}(\vec{x}(r^*))$, lo que, habida cuenta (11'''), entraña que exista un $\nu' \in N$, tal que:

$$«(\forall i)\ (i \in N \text{ y } i > \nu' \Rightarrow x_1{}^{izq}(\vec{x}(r^i)) < x_1' < x_1{}^{der}(\vec{x}(r^i)))»$$

es decir:

$$«(\forall i)\ (i \in N \text{ y } i > \nu' \Rightarrow (x_1', x_1(r^i), x_2(r^i)) \in \mathcal{A})» \qquad (11^{VI})$$

y además, dado que $(x_1', x_1(r^{j+\nu'}), x_2(r^{j+\nu'}))_{j\in N}$ converge en $\mathbf{R}^3$ hacia $(x_1', x_1(r^*), x_2(r^*)) \in \mathcal{A}$, se verifica teniendo en cuenta (11^V), que:

$$«(\exists \nu'')\ (\nu'' \in N \text{ y } (\forall j)\ (j \in N \text{ y } j > \nu'' \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |\lambda(x_1', x_1(r^{j+\nu'}), x_2(r^{j+\nu'})) - \lambda(x_1', x_1(r^*), x_2(r^*))| < b - b'))»$$

y en particular:

$$«|\lambda(x_1', x_1(r^{\nu'+\nu''+1}), x_2(r^{\nu'+\nu''+1})) - \lambda(x_1', x_1(r^*), x_2(r^*))| < b - b'»$$

Haciendo $r' = r^{\nu'+\nu''+1} \in]r^A, r^B[$ y $x_2' = \lambda(x_1', x_1(r'), x_2(r'))$ se puede poner, por consiguiente:

$$«|x_2' - \lambda(x_1', x_1(r^*), x_2(r^*))| < b - b' \qquad (11^{VII})$$

así como [habida cuenta además (11^{VI})]:

$$«\vec{x}' = (x_1', x_2') \in G \text{ y } (\exists r')\ (r' \in]r^A, r^B[\text{ y } (x_1', x_1(r'), x_2(r')) \in \mathcal{A} \text{ y}$$
$$\text{y } x_2' = \lambda(x_1', x_1(r'), x_2(r')))»$$

o lo que es equivalente:

$$«\vec{x}' = (x_1', x_2') \in \mathcal{E}_c{}^a»$$

Pero de (11'''), (11^{IV}) y (11^{VII}) se deduce que:

$$«|x_1' - x_1^*| < a \text{ y } |x_2' - x_2^*| \leq |x_2' - \lambda(x_1', x_1(r^*), x_2(r^*))| +$$
$$|\lambda(x_1', x_1(r^*), x_2(r^*)) - x_2^*| < (b - b') + b' = b»$$

resultando en consecuencia:

$$«\vec{x}' \in \mathcal{E}_c{}^a \cap Q(\vec{x}^*)»$$

Así pues, y dada la arbitrariedad del intervalo abierto $Q(\vec{x}^*)$ de $\mathbf{R}^2$ centrado en $\vec{x}^*$, se puede poner:

$$«\vec{x}^* \in \overline{\mathcal{E}_c{}^a}»$$

3.º) $x_1{}^* = x_1{}^{der}(\vec{x}(r^*))$. Se establece, procediendo de un modo enteramente similar la caso 2.º), que es válida, asimismo, la relación:

$$«\vec{x}^* \in \overline{\mathcal{E}_c{}^a}»$$

Combinando los casos 1.º), 2.º) y 3.º), habida cuenta el supuesto (11′) de que se había partido, queda establecida así la validez de la relación:

$$«\vec{x}^* \in \bar{G} \text{ y } (\exists\, r^*)\,(r^* \in [r^A, r^B] \text{ y } (x_1(r^*), x_1{}^*, x_2{}^*) \in \mathfrak{A}' \text{ y }$$
$$\text{y } x_2(r^*) = \mu(x_1(r^*), x_1{}^*, x_2{}^*)) \Rightarrow \vec{x}^* \in \overline{\mathcal{E}_c{}^a}»$$

la cual junto con la (11) establece a su vez la validez de la:

$$«\vec{x}^* \in \overline{\mathcal{E}_c^a} \Leftrightarrow \vec{x}^* \in \bar{G} \text{ y } (\exists\, r^*)\,(r^* \in [r^A, r^B] \text{ y } (x_1(r^*), x_1{}^*, x_2{}^*) \in \mathfrak{A}' \text{ y }$$
$$\text{y } x_2(r^*) = \mu(x_1(r^*), x_1{}^*, x_2{}^*))»$$

o lo que es equivalente:

$$«\vec{x}^* \in \overline{\mathcal{E}_c^a} \Leftrightarrow \vec{x}^* \in \mathcal{E}_c»$$

y dada la arbitrariedad de $\vec{x}^*$, se obtiene finalmente:

$$«\overline{\mathcal{E}_c^a} = \mathcal{E}_c»$$

Por otra parte, puesto que $\mathcal{E}_c{}^a$, según se demostró en el n.º 7, es conexo, el conjunto $\mathcal{E}_c = \overline{\mathcal{E}_c^a}$ es, consecuentemente, conexo.

Observemos que la relación:

$$«\vec{x} \in \bar{G} \text{ y } (r, r') \in [r^A, r^B] \times [r^A, r^B] \text{ y } (x_1(r), x_1, x_2) \in \mathfrak{A}' \text{ y }$$
$$\text{y } (x_1(r'), x_1, x_2) \in \mathfrak{A}' \text{ y } x_2(r) = \mu(x_1(r), x_1, x_2) \text{ y }$$
$$\text{y } x_2(r') = \mu(x_1(r'), x_1, x_2)» \qquad (11^{\text{VIII}})$$

entraña necesariamente:

$$«r = r'»$$

En efecto, la relación (11^{VIII}) precedente implica, a su vez, la relación:

$$«(r, r') \in [r^A, r^B] \times [r^A, r^B] \text{ y } x_1(r) \in]x_1'^{izq}(\vec{x}), x_1'^{der}(\vec{x})[\text{ y } \\ \text{ y } x_1(r') \in]x_1'^{izq}(\vec{x}), x_1'^{der}(\vec{x})[»$$

por lo que, en el supuesto de ser $r \neq r'$, y dada la continuidad y monotonía estricta sobre $[r^A, r^B]$ de la función $r \in [r^A, r^B] \longrightarrow x_1(r) \in \mathbf{R}$, se verifica:

$$«(\forall t)\ (t \in [\text{mín } \{r, r'\}, \text{máx } \{r, r'\}] \Rightarrow x_1(t) \in]x_1'^{izq}(\vec{x}), x_1'^{der}(\vec{x})[)» \qquad (11^{\text{IX}})$$

estando, por tanto, definida la aplicación compuesta:

$$«t \in [\text{mín } \{r, r'\}, \text{máx } \{r, r'\}] \longrightarrow \mu(x_1(t), x_1, x_2) \in \mathbf{R}»$$

y en consecuencia, la relación:

$$«t \in [\text{mín } \{r, r'\}, \text{máx } \{r, r'\}] \longrightarrow x_2(t) - \mu(x_1(t), x_1, x_2) \in \mathbf{R}»$$

define una aplicación, la cual es continuamente derivable sobre el intervalo [mín $\{r, r'\}$, máx $\{r, r'\}$], y puesto que en virtud de (11^{VIII}) toma valores iguales en los extremos de su intervalo de definición, existe, por tanto, un $\bar{r} \in]\text{mín } \{r, r'\}, \text{máx } \{r, r'\}[\subset]r^A, r^B[$, tal que:

$$«x_2'(\bar{r}) - \varrho(x_1(\bar{r}), \mu(x_1(\bar{r}), x_1, x_2)) \cdot x_1'(\bar{r}) = 0» \qquad (11^{\text{X}})$$

Ahora bien, en virtud de la OBSERVACIÓN 1.ª del n.º 5, la relación (11^{VIII}) entraña:

$$«(x_1, x_1(r), x_2(r)) \in \mathfrak{A}' \text{ y } \mu_{(x_1, x_2)} = \mu_{(x_1(r), x_2(r))} \text{ y } (x_1, x_1(r'), x_2(r')) \in \mathfrak{A}' \text{ y} \\ \text{ y } x_2(r') = \mu(x_1(r'), x_1, x_2) = \mu_{(x_1, x_2)}(x_1(r'))»$$

resultando de ello que:

$$«(x_1, x_1(r'), x_2(r')) \in \mathfrak{A}' \text{ y } \mu_{(x_1, x_2)} = \mu_{(x_1(r), x_2(r))} \text{ y} \\ \text{ y } x_2(r') = \mu_{(x_1(r), x_2(r))}(x_1(r')) = \mu(x_1(r'), x_1(r), x_2(r))»$$

por lo que, habida cuenta la OBSERVACIÓN 3.ª del n.º 8 y que además se tiene: $\vec{x}(r) = (x_1(r), x_2(r)) \in C \subset G$ y $(x_1(r'), x_2(r')) \in C \subset G$, se deduce, por tanto:

$$«\mu_{(x_1, x_2)} = \mu_{(x_1(r), x_2(r))} \text{ y } x_1(r') \in]x_1^{izq}(\vec{x}(r)), \ x_1^{der}(\vec{x}(r))[»$$

así como, se tiene trivialmente:

$$«x_1(r) \in]x_1^{izq}(\vec{x}(r)), \ x_1^{der}(\vec{x}(r))[»$$

Estas relaciones junto con la (11^{X}) y la relación $x_1(\bar{r}) \in]\text{mín}\{x_1(r), x_1(r')\}, \text{máx}\{x_1(r), x_1(r')\}[$, consecuencia de la $\bar{r} \in]\text{mín}\{r, r'\}, \text{máx}\{r, r'\}[$ y de la monotonía estricta de la función $r \in [r^A, r^B] \longrightarrow x_1(r) \in \mathbf{R}$, establecen que:

$$«x_1(\bar{r}) \in]x_1^{izq}(\vec{x}(r)), \ x_1^{der}(\vec{x}(r))[\text{ y}$$
$$\text{y } x_2'(\bar{r}) - \varrho(x_1(\bar{r}), \mu(x_1(\bar{r}), x_1(r), x_2(r))) \cdot x_1'(\bar{r}) = 0» \quad (11^{\mathrm{XI}})$$

Pero en virtud de la OBSERVACIÓN 3.ª se tiene que:

$$«\vec{x}(r) \in G \text{ y } x_1(\bar{r}) \in]x_1^{izq}(\vec{x}(r)), \ x_1^{der}(\vec{x}(r))[\Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x_1(\bar{r}), \mu(x_1(\bar{r}), x_1(r), x_2(r))) \in G»,$$

por lo que poniendo, para abreviar, $\bar{x}_1 = x_1(\bar{r})$ y $\bar{x}_2 = \mu(x_1(\bar{r}), x_1(r), x_2(r))$, la relación (11^{XI}) entraña a su vez la:

$$«(\exists(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{r}))((\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{r}) \in G \times]r^A, r^B[\text{ y } x_2'(\bar{r}) - \varrho_{|G}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \cdot x_1'(\bar{r}) = 0)»$$

lo que está en contradicción con la condición c), que por pertenecer a la clase (Γ) el arco C contenido en G relativamente a la ecuación diferencial $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho_{|G}(x_1, x_2)$, ha de verificar dicho arco C (n.º 8 de esta INTRODUCCIÓN).

Así, pues, debe verificarse la relación:

$$«\vec{x} \in \bar{G} \text{ y } (r, r') \in [r^A, r^B] \times [r^A, r^B] \text{ y } (x_1(r), x_1, x_2) \in \mathfrak{A}' \text{ y}$$
$$\text{y } (x_1(r'), x_1, x_2) \in \mathfrak{A}' \text{ y } x_2(r) = \mu(x_1(r), x_1, x_2) \text{ y } x_2(r') =$$
$$= \mu(x_1(r'), x_1, x_2) \Rightarrow r = r'» \quad (11^{\mathrm{XII}})$$

Sentado lo anterior, consideremos el subconjunto de $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$:

$$«F = \{(\vec{x},\ r) \in \mathcal{E}_c \times [r^A,\ r^B] / (x_1(r),\ x_1,\ x_2) \in \mathcal{A}' \text{ y}$$
$$\text{y } x_2(r) = \mu(x_1(r),\ x_1,\ x_2)\} = \{(\vec{x}, r) \in \mathcal{E}_c \times [r^A, r^B] / (x_1, x_1(r), x_2(r)) \in \mathcal{A}' \text{ y}$$
$$\text{y } x_2 = \mu(x_1,\ x_1(r),\ x_1(r))\}»$$

Es inmediato, [habida cuenta además la relación precedente (11^{XII})], que:

$$«pr_1 F = \mathcal{E}_c \text{ y } pr_2 F = [r^A,\ r^B] \text{ y } (\forall (\vec{x},\ r,\ r'))\ ((\vec{x},\ r) \in F \text{ y}$$
$$\text{y } (\vec{x},\ r') \in F \Rightarrow r = r')»$$

por lo que (Chap. II, § 3, n.º 4 de [5]), la terna $(F,\ \mathcal{E}_c,\ \mathbf{R})$ define una aplicación $h_c : \mathcal{E}_c \longrightarrow \mathbf{R}$, la cual evidentemente prolonga $h_c^a : \mathcal{E}_c^a \longrightarrow \mathbf{R}$ a $\mathcal{E}_c$, y por tanto, $h_{c|\mathcal{E}_c^a} = h_c^a$. Se tiene como consecuencia de la misma definición de h_c que:

$$(\forall_{(r,\vec{x})})\ ((r,\ \vec{x}) \in [r^A,\ r^B] \times \mathcal{E}_c \text{ y } r = h_c(\vec{x}) \Rightarrow (x_1(r),\ x_1,\ x_2) \in \mathcal{A}' \text{ y}$$
$$\vec{x} \in \bar{G} \text{ y } x_2(r) = \mu(x_1(r),\ x_1,\ x_2))\ (*)$$

[Señalemos, que puesto que en virtud de la propia definición de $\acute{\mathcal{E}}_c$ se verifica:

$$«\vec{x} \in \mathcal{E}_c \Longleftrightarrow \vec{x} \in \bar{G} \text{ y } (\exists\, r)\ (r \in [r^A,\ r^B] \text{ y } (x_1,\ x_1(r),\ x_2(r)) \in \mathcal{A}' \text{ y}$$
$$\text{y } x_2 = \mu(x_1,\ x_1(r),\ x_2(r)))»$$

y por otra parte, se tiene siempre $\vec{x}(r) = (x_1(r),\ x_2(r)) \in G$, la OBSERVACIÓN 3.ª del n.º 8 establece, en consecuencia, que es válida la relación:

$$«x_1 \in [x_1^{izq}(\vec{x}(r)),\ x_1^{der}(\vec{x}(r))]»$$

relación de la cual, y habida cuenta la definición de $h_c : \mathcal{E}_c \longrightarrow \mathbf{R}$, se sigue la validez de la relación:

$$«(\forall (r,\ \vec{x}))\ ((r,\ \vec{x}) \in [r^A,\ r^B] \times \mathcal{E}_c \text{ y}$$
$$\text{y } r = h_c(\vec{x}) \Rightarrow x_1^{izq}(\vec{x}(r)) \leq x_1 \leq x_1^{der}(\vec{x}(r)))» \qquad (11^{\text{XII}*})]$$

La función $h_c : \mathcal{E}_c \longrightarrow \mathbf{R}$ acabada de construir es continua sobre $\mathcal{E}_c$. En efecto, sea $\vec{x} \in \mathcal{E}_c$ y $(\vec{x}^i)_{i \in N}$ una sucesión de puntos de $\mathcal{E}_c$ convergente en $\mathbf{R}^2$ hacia $\vec{x}$, y $(r^i)_{i \in N} = (h_c(\vec{x}^i))_{i \in N}$.

Se verifica en virtud de $(11^{\mathrm{XII}*})$ y de la definición de $\mathcal{E}_c$, así como la de h_c:

$$«(\forall i)\ (i \in N \Rightarrow x_1^{izq}(\vec{x}\,(r^i)) \leq x_1{}^i \leq x_1{}^{der}(\vec{x}(r^i)) \text{ y } \\ \text{y } x_2{}^i = \mu\,(x_1{}^i,\ x_1(r^i),\ x_2(r^i)))» \qquad (11^{\mathrm{XIII}})$$

Consideremos una sucesión parcial $(r^{i_k})_{k \in N}$ cualquiera de $(r^i)_{i \in N}$.

Puesto que: $\bigcup_{k \in N} \{r^{i_k}\} \subset [r^A,\ r^B]$, y $[r^A,\ r^B]$ es un compacto de $\mathbf{R}$, la sucesión $(r^{i_k})_{k \in N}$ admite un valor de adherencia $r \in [r^A,\ r^B]$, es decir, existe una sucesión $(r^{i_{k_j}})_{j \in N}$ parcial de la $(r^{i_k})_{k \in N}$ que es convergente en $\mathbf{R}$ hacia r.

Las sucesiones $(x_1{}^{izq}(\vec{x}\,(r^{i_{k_j}})))_{j \in N}$, $(x_1{}^{der}(\vec{x}\,(r^{i_{k_j}})))_{j \in N}$, $(x_1{}^{i_{k_j}})_{j \in N}$ y y $(x_2{}^{i_{k_j}})_{j \in N}$, convergen en $\mathbf{R}$, respectivamente, hacia $x_1{}^{izq}(\vec{x}\,(r))$, $x_1{}^{der}(\vec{x}\,(r))$, x_1 y x_2, por lo que, teniendo en cuenta (11^{XIII}), se verifica que:

$$«x_1{}'^{\,izq}(\vec{x}\,(r)) < x_1{}^{izq}(\vec{x}(r)) \leq x_1 \leq x_1{}^{der}(\vec{x}\,(r)) < x_1{}'^{\,der}(\vec{x}\,(r))»$$

es decir (dado que: $\vec{x}\,(r) = (x_1(r),\ x_2(r)) \in C \subset G \subset \bar{G}$):

$$«(x_1,\ x_1(r),\ x_2(r)) \in \mathfrak{A}'»$$

y en virtud de la continuidad de μ sobre $\mathfrak{A}'$, la sucesión $(\mu\,(x_1{}^{i_{k_j}},$ $x_1(r^{i_{k_j}}),\ x_2(r^{i_{k_j}})))_{j \in N} = (x_2{}^{i_{k_j}})_{j \in N}$ converge en $\mathbf{R}$ hacia $\mu\,(x_1,\ x_1(r),$ $x_2(r)) = x_2$, todo lo cual entraña:

$$«r = h_c(\vec{x})»$$

Se ha, así establecido, que para cualquier sucesión parcial $(r^{i_k})_{k \in N}$ de la $(r^i)_{i \in N}$ existe una sucesión parcial $(r^{i_{k_j}})_{j \in N}$ de la $(r^{i_k})_{k \in N}$ que converge en $\mathbf{R}$ hacia $r = h_c(\vec{x})$, lo que demuestra que $(r^i)_{i \in N} = (h_c(\vec{x}))_{i \in N}$, converge en $\mathbf{R}$ hacia $r = h_c(\vec{x})$, y dada la arbitrariedad de $\vec{x} \in \mathcal{E}_c$ y de la sucesión de puntos de $\mathcal{E}_c$ convergente en $\mathbf{R}^2$ hacia $\vec{x}$, se concluye que h_c es continua sobre $\mathcal{E}_c$.

Así, pues, $h_c : \mathcal{E}_c \longrightarrow \mathbf{R}$ prolonga con continuidad y unívocamente, $h_c{}^a : \mathcal{E}_c{}^a \longrightarrow \mathbf{R}$, a $\mathcal{E}_c = \overline{\mathcal{E}_c{}^a}$.

Puesto que para todo $\vec{u} = (u_1\ u_2) \in \mathcal{E}_c{}^a$, la función $h_c{}^a : \mathcal{E}_c{}^a \longrightarrow \mathbf{R}$ considerada en el n.º 7 es derivable parcialmente respecto a su primero y segundo argumento en $\vec{u}$, siendo las expresiones de dichas derivadas parciales:

$$\left.\begin{aligned}
(D_1 h_c^a)(\vec{u}) &= \frac{\varrho_{|G}(\vec{u}) \cdot \exp\left\{\int_{u_1}^{x_1(h_c^a(u))} (D_2 \varrho_{|G})[t, \mu_{|\mathfrak{a}}(t, u_1, u_2)]\, dt\right\}}{\varrho_{|G}(\vec{x}(h_c^a(\vec{u}))) \cdot x_1'(h_c^a(\vec{u})) - x_2'(h_c^a(\vec{u}))} = \\
&= \frac{\varrho(\vec{u}) \cdot \exp\{-(J^{(\mathcal{E}_c)}((D_2\varrho)_{|\mathcal{E}_c}))\}}{\varrho(\vec{x}(h_c(\vec{u}))) \cdot x_1'(h_c(\vec{u})) - x_2'(h_c(\vec{u}))} \\
(D_2 h_c^a)(\vec{u}) &= -\frac{\exp\left\{\int_{u_1}^{x_1(h_c^a(\vec{u}))} (D_2 \varrho_{|G})[t, \mu_{|\mathfrak{a}}(t, u_1, u_2)]\, dt\right\}}{\varrho_{|G}(\vec{x}(h_c^a(\vec{u}))) \cdot x_1'(h_c^a(\vec{u})) - x_2'(h_c^a(\vec{u}))} = \\
&= -\frac{\exp\{-(J^{(\mathcal{E}_c)}((D_2\varrho)_{|\mathcal{E}_c}))\}}{\varrho(\vec{x}(h_c(\vec{u}))) \cdot x_1'(h_c(\vec{u})) - x_2'(h_c(\vec{u}))}
\end{aligned}\right\} (^0)$$

y dado que las aplicaciones:

$$\vec{u} \in \mathcal{E}_c \longrightarrow \frac{\varrho(\vec{u})}{\varrho(\vec{x}(h_c(\vec{u}))) \cdot x_1'(h_c(\vec{u})) - x_2'(h_c(\vec{u}))} \in \mathbf{R}$$

$$\vec{u} \in \mathcal{E}_c \longrightarrow \frac{1}{\varrho(\vec{x}(h_c(\vec{u}))) \cdot x_1'(h_c(\vec{u})) - x_2'(h_c(\vec{u}))} \in \mathbf{R}$$

así como [II del APENDICE que sigue a la PARTE SEGUNDA]:

$$\vec{u} \in \mathcal{E}_c \longrightarrow (J^{(\mathcal{E}_c)}((D_2\varrho)_{|\mathcal{E}_c}))(\vec{u}) \in \mathbf{R}$$

son continuas sobre $\mathcal{E}_c$, y consecuentemente, las restricciones a $\mathcal{E}_c^a$ de dichas aplicaciones son continuamente prolongables a $\mathcal{E}_c = \overline{\mathcal{E}_c^a}$, se concluye que $D_1 h_c^a$ y $D_2 h_c^a$ son prolongables con continuidad, de modo unívoco, a la adherencia $\overline{\mathcal{E}_c^a} = \mathcal{E}_c$ de $\mathcal{E}_c^a$, resultando así dos funciones definidas y continuas sobre $\mathcal{E}_c$ que denotaremos, respectivamente, por $D_1 h_c$, $D_2 h_c$:

$$\left.\begin{aligned}
\vec{x} \in \mathcal{E}_c \longrightarrow (D_1 h_c)(\vec{x}) &= \frac{\varrho(x_1 x_2) \cdot \exp\left\{\int_{x_1}^{x_1(r)} (D_2\varrho)[t, \mu(t, x_1, x_2)]\, dt\right\}}{\varrho(x_1(r), x_2(r)) \cdot x_1'(r) - x_2'(r)} \in \mathbf{R} \\
\vec{x} \in \mathcal{E}_c \longrightarrow (D_2 h_c)(\vec{x}) &= -\frac{\exp\left\{\int_{x_1}^{x_1(r)} (D_2\varrho)[t, \mu(t, x_1, x_2)]\, dt\right\}}{\varrho(x_1(r), x_2(r)) \cdot x_1'(r) - x_2'(r)} \in \mathbf{R}
\end{aligned}\right\} (11^{\mathrm{XIII}*}),\ [r = h_c(\vec{x})]$$

cuyas restricciones a $\mathcal{E}_c^a$, son respectivamente, $D_1 h_c^a$, $D_2 h_c^a$.

---

(0) Véase II del Apéndice que sigue a la Parte segunda de esta Memoria.

10. LOS SUBCONJUNTOS D_c^a Y D_c DE $\mathcal{E}_c^a$ Y $\mathcal{E}_c$, RESPECTIVAMENTE: RELACIONES MUTUAS ENTRE LOS MISMOS. — Manteniendo las mismas hipótesis que en el n.º 9 precedente, sean:

$$«D_c^a = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^2 / (\exists\, (r_1, r_2))\, ((r_1\, r_2) \in]\, r^A, r^B\, [\times]\, r^A, r^B\, [\text{ y } x_1 = x_1\,(r_1) \text{ y }$$
$$\text{y } x_2 = x_2\,(r_2) \text{ y } \bigcup_{v\in[0,1]} \{(x_1, (1-v)\, x_2 + v.\, x_2\,(r_1))\} \subset \mathcal{E}_c^a \text{ y}$$
$$\text{y } \bigcup_{v\in[0,1]} \{((1-v)\, x_1 + v.\, x_1\,(r_2), x_2)\} \subset \mathcal{E}_c^a)\}»$$

$$«D_c = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^2 / (\exists (r_1, r_2))\, ((r_1, r_2) \in [r^A, r^B] \times [r^A, r^B] \text{ y } x_1 = x_1\,(r_1) \text{ y}$$
$$\text{y } x_2 = x_2\,(r_2) \text{ y } \bigcup_{v\in[0,1]} \{(x_1, (1-v)\, x_2 + v.\, x_2\,(r_1))\} \subset \mathcal{E}_c \text{ y}$$
$$\text{y } \bigcup_{v\in[0,1]} \{((1-v)\, x_1 + v.\, x_1\,(r_2), x_1)\} \subset \mathcal{E}_c)\}»$$

es decir, D_c^a (resp. D_c) están constituidos por los puntos M de $\mathbf{R}^2$ para los cuales las dos rectas pasando por ellos y paralelas a los ejes coordenados Ox_1 y Ox_2, intersectan a $C - \{A, B\}$ (resp. intersectan a C), [en puntos únicos para cada paralela en virtud de la monotonía estricta de las funciones: $r \in [r^A, r^B] \to x_1\,(r) \in \mathbf{R}$ y $r \in [r^A, r^B] \to x_2\,(r) \in \mathbf{R}$], estando además contenidos en $\mathcal{E}_c^a$ (resp. contenidos en $\mathcal{E}_c$), los segmentos de dichas paralelas determinados por M y los referidos puntos de intersección de las mismas con $C - \{A, B\}$ (resp. con C).

Evidentemente:

$$«D_c^a \subset D_c»$$

y dado que:

$$«(\exists\, (r_1, r_2))\, ((r_1, r_2) \in [r^A, r^B] \times [r^A, r^B] \text{ y } x_1 = x_1\,(r_1) \text{ y } x_2 = x_1\,(r_2)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x_1, x_2) \in [\text{mín. } \{x_1\,(r^A), x_1\,(r^B)\}, \text{máx. } \{x_1\,(r^A), x_1\,(r^B)\}] \times$$
$$\times [\text{mín. } \{x_2\,(r^A), x_2\,(r^B)\}, \text{máx. } \{x_2\,(r^A), x_2\,(r^B)\}]»$$

se sigue (denotando por $R_{AB} = [\text{mín. } [x_1\,(r^A), x_1\,(r^B)\}, \text{máx. } \{x_1\,(r^A), x_1\,(r^B)\}] \times [\text{mín. } \{x_2\,(r^A), x_2\,(r^B)\}, \text{máx. } \{x_2\,(r^A), x_2\,(r^B)\}]$ al intervalo de $\mathbf{R}^2$ de diagonal la cuerda AB del arco C), que es asimismo:

$$«D_c \subset R_{AB}»$$

así como: $«D_c^a \subset \mathring{R}_{AB}»$ ($\mathring{R}_{AB}$ es el interior de R_{AB}, es decir:

$\mathring{R}_{AB} =]\, \text{mín. } \{x_1\,(r^A), x_1\,(r^B)\}, \text{máx. } \{x_1\,(r^A), x_1\,(r^B)\}\, [\times]\, \text{mín. } \{x_2\,(r^A), x_2\,(r^B)\}, \text{máx. } \{x_2\,(r^A), x_2\,(r^B)\}\, [$), por lo que:

$$«D_c^a \subset \mathring{R}_{AB} \cap \mathcal{E}_c^a»$$

y

$$«D_c \subset R_{AB} \cap \mathcal{E}_c»$$

El conjunto D_c^a es un abierto de $\mathbf{R}^2$ (resp. el conjunto D_c es un cerrado de $\mathbf{R}^2$).

En efecto, si $\vec{x}^* \in D_c^a$, se tiene en primer lugar:

$$«(\exists\ (r_1^*, r_2^*))\ ((r_1^*, r_2^*) \in]r^A, r^B[\ \times\ ]r^A, r^B[\text{ y } x_1^* = x_1(r_1^*) \text{ y } x^*_2 = x_2(r_2^*) \text{ y } \bigcup_{\nu\in[0,1]} \{((1-\nu)\,x_1^* + \nu.\, x_1(r_2^*),\ x_2^*)\} \subset \mathcal{E}_c^a \text{ y}$$
$$\text{y } \bigcup_{\nu\in[0,1]} \{(x_1^*,\ (1-\nu)x_2^* + \nu.\, x_2(r_1^*))\} \subset \mathcal{E}_c^a)»$$

Puesto que la reunión $[\bigcup_{\nu\in[0,1]} \{((1-\nu)\ x_1^* + \nu.\ x_1\ (r_2^*),\ x_2^*)\}] \cup [\bigcup_{\nu\in[0,1]} \{(x_1^*,\ (1-\nu)\ x_2^* + \nu.\ x_2\ (r_1^*))\}] \subset \mathcal{E}_c^a$ de los dos segmentos de paralelas a los ejes Ox_1, Ox_2 limitados por el punto $\vec{x}^*$ y los respectivos puntos de intersección de dichas paralelas con $C - \{A, B\}$ es un compacto contenido en el abierto $\mathcal{E}_c^a$, existe, consecuentemente, un $\varrho' \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$, tal que:

$$«(\forall \nu)\ (\nu\in[0,1] \Rightarrow B\varrho'\ ((1-\nu).\ x_1^* + \nu.\ x_1(r_2^*),\ x_2^*) \subset \mathcal{E}_c^a \text{ y}$$
$$\text{y } B\varrho'\ (x_1^*,\ (1-\nu).\ x_2^* + \nu.\ x_2(r_1^*)) \subset \mathcal{E}_c^a)»$$

Por otro lado, en virtud de la continuidad de las aplicaciones, $x_1 \circ \overset{-1}{x_2} \circ pr_{2|\mathring{R}_{AB}} : \mathring{R}_{AB} \to]\ \text{mín}\ \{x_1(r^A),\ x_1(r^B)\},\ \text{máx}\ \{x_1(r^A),\ x_1(r^B)\}[$ y $x_2 \circ \overset{-1}{x_1} \circ pr_{1|\mathring{R}_{AB}} : \mathring{R}_{AB} \to]\ \text{mín}\ \{x_2(r^A),\ x_2(r^B)\},\ \text{máx}\ \{x_2(r^A),\ x_2(r^B)\}[$ y dado que $\vec{x}^* \in D_c^a \subset \mathring{R}_{AB}$, se puede determinar, por tanto, un $\varrho'' \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$ tal que: $«B\varrho''\ (\vec{x}^*) \subset \mathring{R}_{AB}$ y $(\forall \vec{x})\ (\vec{x} \in B\varrho''\ (\vec{x}^*) \Rightarrow |\ (x_1 \circ \overset{-1}{x_2} \circ pr_2)\ (\vec{x}) - (x_1 \circ \overset{-1}{x_2} \circ pr_2)\ (\vec{x}^*)| = |(x_1 \circ \overset{-1}{x_2} \circ pr_2)\ (\vec{x}) - x_1\ (r_2^*)| < \varrho'/3$ y $|\ (x_2 \circ \overset{-1}{x_1} \circ pr_1)\ (\vec{x}) - (x_2 \circ \overset{-1}{x_1} \circ pr_1)\ (\vec{x}^*)\ | = |\ (x_2 \circ \overset{-1}{x_1} \circ pr_1)\ (\vec{x}) - x_2\ (r_1^*)\ | < \dfrac{\varrho'}{3}\Big)»$

Sí, para abreviar, para todo $\vec{x} \in B_{\varrho''}(\vec{x}^*)$ ponemos $r_1 = (\overset{-1}{x_1} \circ pr_1)\ (\vec{x})$ y y $r_2 = (\overset{-1}{x_2} \circ pr_2)\ (\vec{x})$, se tiene: $(r_1, r_2) \in]\ r^A, r^B\ [\ \times\ ]\ r^A, r^B\ [$ y $x_1\ (r_1) = pr_1\ \vec{x} = x_1$ y $x_2\ (r_2) = pr_2\ \vec{x} = x_2$, verificándose, en consecuencia:

$$«(\forall \vec{x})(\vec{x} \in B_{\varrho''}(\vec{x}^*) \Rightarrow (\exists (r_1, r_2))((r_1, r_2) \in]\, r^A, r^B [\times]\, r^A, r^B [\text{ y } x_1 (r_1) = x_1 \text{ y}$$
$$\text{y } x_2 (r_2) = x_2 \text{ y } |x_1 (r_2) - x_1 (r_2^*)| < \frac{\varrho'}{3} \text{ y } |x_2 (r_1) - x_2 (r_1^*)| < \frac{\varrho'}{3}))»$$

Sea $\varrho = \text{mín} \left\{\frac{\varrho'}{3}, \varrho''\right\}$. Se tiene: $B_\varrho (\vec{x}^*) \subset B_{\varrho''} (\vec{x}^*)$ y $\varrho \leq \frac{\varrho'}{3}$, lo que entraña:

$$«\varrho \leq \frac{\varrho'}{3} \text{ y } (\forall \vec{x})\ (x \in B_\varrho (\vec{x}^*) \Rightarrow (\exists\ (r_1, r_2))\ ((r_1, r_2) \in]\, r^A, r^B [\times]\, r^A, r^B[\text{ y}$$
$$\text{y } x_1 (r_1) = x_1 \text{ y } x_2 (r_2) = x_2 \text{ y } |x_1 (r_2) - x_1 (r_2^*)| < \frac{\varrho'}{3} \text{ y } |x_2 (r_1) -$$
$$- x_2 (r_1^*)| < \frac{\varrho'}{3}))» \ (12)$$

Pero: $«\vec{x} \in B_\varrho (\vec{x}^*)$ y $|x_1 (r_2) - x_1 (r_2^*)| < \frac{\varrho'}{3}$ y $|x_2 (r_1) - x_2 (r_1^*)| < \frac{\varrho'}{3}$, implica:

$$«(\forall \nu)\ (\nu \in [0,1] \Rightarrow \|((1 - \nu)\ x_1 + \nu x_1 (r_2),\ x_2) - ((1 - \nu)\ x_1^* +$$
$$+ \nu \cdot x_1 (r_2^*),\ x_2^*)\|_{(\mathbf{R}^2)} = \|((1 - \nu) \cdot (x_1 - x_1^*) + \nu.\ (x_1 (r_2) -$$
$$- x_1 (r_2^*)),\ x_2 - x_2^*)\|_{(\mathbf{R}^2)} \leq (1 - \nu).\ |x_1 - x_1^*| + \nu.\ |x_1 (r_2) -$$
$$- x_1 (r_2^*)| + |x_2 - x_2^*| \leq \|\vec{x} - \vec{x}^*\|_{(\mathbf{R}^2)} + |x_1 (r_2) - x_1 (r_2^*)| +$$
$$+ \|\vec{x} - \vec{x}^*\|_{(\mathbf{R}^2)} < \varrho + \frac{\varrho'}{3} + \varrho \leq \frac{\varrho'}{3} + \frac{\varrho'}{3} + \frac{\varrho'}{3} = \varrho')»$$

es decir:

$$«(\forall \nu)\ (\nu \in [0,1] \Rightarrow ((1 - \nu) \cdot x_1 + \nu \cdot x_1 (r_2),\ x_2) \in B_{\varrho'} ((1 - \nu) \cdot x_1^* +$$
$$+ \nu \cdot x_1 (r_2^*),\ x_2^*) \subset \mathcal{E}_c^a)»$$

y consecuentemente:

$$« \bigcup_{\nu \in [0,1]} \{((1 - \nu) \cdot x_1 + \nu \cdot x_1 (r_2),\ x_2)\} \subset \mathcal{E}_c^a» \ (12')$$

Similarmente, se establecería que:

$$« \bigcup_{\nu \in [0,1]} \{(x_1,\ (1 - \nu)\ x_2 + \nu \cdot x_2 (r_1))\} \subset \mathcal{E}_c^a» \ (12'')$$

De (12), (12′) y (12″) se deduce la validez de la relación:

$$«(\forall \vec{x})(\vec{x} \in B_\varrho(\vec{x}^*) \Rightarrow (\exists\,(r_1, r_2))((r_1, r_2) \in]\,r^A, r^B\,[\times]\,r^A, r^B\,[\text{ y } x_1(r_1) = x_1 \text{ y}$$
$$\text{y } x_2(r_2) = x_2 \text{ y } \bigcup_{\nu \in [0,1]} \{((1-\nu)\cdot x_1 + \nu\cdot x_1(r_2), x_2)\} \subset \mathcal{E}_c^a \text{ y}$$
$$\text{y } \bigcup_{\nu \in [0,1]} \{(x_1, (1-\nu)\cdot x_2 + \nu\cdot x_2(r_1))\} \subset \mathcal{E}_c^a))»$$

es decir, habida cuenta la definición de D_c^a, se verifica que:

$$«(\forall \vec{x})(\vec{x} \in B_\varrho(\vec{x}^*) \Rightarrow \vec{x} \in D_c^a)»$$

o lo que es equivalente:

$$«B_\varrho(\vec{x}^*) \subset D_c^a»$$

lo que prueba que:

$$«\vec{x}^* \in \mathring{D}_c^a$$

Puesto que $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*) \in D_c^a)$ es arbitrario, se concluye que:

$$«D_c^a = \mathring{D}_c^a \quad (12''')$$

Por otra parte, si $\vec{x}^* = (x^*_1, x^*_2) \in \overline{D}_c$, existe, consecuentemente, una sucesión $(\vec{x}_i)_{i\in N}$ de puntos de D_c convergente en $\mathbf{R}^2$ hacia $\vec{x}^*$, lo que entraña, [habida cuenta que: $(\forall i)\ (i \in N \Rightarrow \vec{x}^i = (x^i_1, x^i_2) \in R_{AB})$]:

$$«(\forall i)\ (i \in N \Rightarrow x^i_1 \in [\text{mín}\,\{x_1(r^A), x_1(r^B)\}, \text{ máx. } \{x_1(r^A), x_1(r^B)\}] \text{ y}$$
$$\text{y } x^i_2 \in [\text{mín. } \{x_2(r^A), x_2(r^B)\}, \text{ máx. } \{x_2(r^A), x_2(r^B)\}])»$$

y que existan dos sucesiones $(r^i_1)_{i\in N}$ y $(r^i_2)_{i\in N}$ de puntos de $[r^A, r^B]$, tales que:

$$«(\forall i)\ (i \in N \Rightarrow x^i_1 = x^i_1(r^i_1) \text{ y } x^i_2 = x_2(r^i_2) \text{ y } \bigcup_{\nu\in[0,1]} \{(x^i_1, (1-\nu).\, x^i_2 +$$
$$+ \nu.\, x_2(r^i_1))\} \subset \mathcal{E}_c \text{ y } \bigcup_{\nu\in[0,1]} \{((1-\nu).\, x^i_1 + \nu.\, x_1(r^i_2), x^i_2)\} \subset \mathcal{E}_c)»$$

deduciéndose:

$$«x_1^* \in [\text{mín}\,\{x_1(r^A), x_1(r^B)\}, \text{ máx } \{x_1(r^A), x_1(r^B)\}] \text{ y}$$
$$\text{y } x_2^* \in [\text{mín}\,\{x_2(r^A), x_2(r^B)\}, \text{ máx } \{x_2(r^A), x_2(r)^B\}]»$$

y además, como consecuencia de la continuidad sobre sus respectivos intervalos de definición de las aplicaciones $\overset{-1}{x_1}$: $[\text{mín}\,\{x_1(r^A), x_1(r^B)\}$, máx $\{x_1(r^A), x_1(r^B)\}] \to [r^A, r^B]$ y $\overset{-1}{x_2}$: [mín $\{x_2(r^A), x_2(r^B)\}$, máx $\{x_2(r^A), x_2(r^B)\}] \to [r^A, r^B]$, recíprocas, respectivamente, de las aplicaciones $r \in [r^A, r^B] \to x_1(r) \in \mathbf{R}$ y $r \in [r^A, r^B] \to x_2(r) \in \mathbf{R}$ que definen el arco C, se sigue que:

$$«(\overset{-1}{x_1}(x^i{}_1))_{i\in N} = (r^i{}_1)_{i\in N} \text{ converge en } \mathbf{R} \text{ hacia } r_1{}^* = \overset{-1}{x_1}(x_1{}^*) \in [r^A, r^B]»$$

y

$$«(\overset{-1}{x_2}(x^i{}_2))_{i\in N} = (r^i{}_2)_{i\in N} \text{ converge en } \mathbf{R} \text{ hacia } r_2{}^* = \overset{-1}{x_2}(x_2{}^*) \in [r^A, r^B]»$$

De todo ello se deduce que:

$$«x_1{}^* = x_1(r_1{}^*) \text{ y } x_2{}^* = x_2(r_2{}^*)»$$

y

$$«(\forall \nu)\ (\nu \in [0,1] \Rightarrow ((x^i{}_1, (1-\nu).\, x^i{}_2 + \nu.\, x_2(r^i{}_1)))_{i\in N} \text{ converge en } \mathbf{R}^2 \text{ hacia } (x_1{}^*, (1-\nu)\, x_2{}^* + \nu.\, x_2(r_1{}^*)) \text{ y } (((1-\nu).\, x^i{}_1 + \nu.\, x_1(r^i{}_2), x^i{}_2))_{i\in N} \text{ converge en } \mathbf{R}^2 \text{ hacia } ((1-\nu).\, x_1{}^* + \nu.\, x_1(r_2{}^*), x_2{}^*))»$$

y puesto que:

$$«(\forall \nu)\ (\nu \in [0,1] \Rightarrow (\forall i)\ (i \in N \Rightarrow (x^i{}_1, (1-\nu).\, x^i{}_2 + \nu.\, x_2(r^i{}_1)) \in \mathcal{E}_c = \overline{\mathcal{E}_c} \text{ y } \text{ y } ((1-\nu).\, x^i{}_1 + \nu.\, x_1(r^i{}_2), x^i{}_2) \in \mathcal{E}_c = \overline{\mathcal{E}_c}))»$$

y consecuentemente:

$$«(\forall \nu)\ (\nu \in [0,1] \Rightarrow (x_1{}^*, (1-\nu).\, x_2{}^* + \nu.\, x_2(r_1{}^*)) \in \mathcal{E}_c \text{ y } \text{ y } ((1-\nu).\, x_1{}^* + \nu.\, x_1(r_2{}^*), x_2{}^*) \in \mathcal{E}_c)»$$

es válida, por tanto, (habida cuenta además lo precedente) la relación:

$$«(\exists (r_1{}^*, r_2{}^*))\ ((r_1{}^*, r_2{}^*) \in [r^A, r^B] \times [r^A, r^B] \text{ y } x_1{}^* = x_1(r_1{}^*) \text{ y } \text{ y } x_2{}^* = x_2(r_2{}^*) \text{ y } \bigcup_{\nu\in[0,1]} \{(x_1{}^*, (1-\nu).\, x_2{}^* + \nu.\, x_2(r_1{}^*))\} \subset \mathcal{E}_c \text{ y } \text{ y } \bigcup_{\nu\in[0,1]} \{((1-\nu).\, x_1{}^* + \nu.\, x_1(r_2{}^*), x_2{}^*)\} \subset \mathcal{E}_c)»$$

la cual equivale a:

$$«\vec{x}^* \in D_c»$$

y dada la arbitrariedad de $\vec{x}^* \in \overline{D}_c$, se concluye que:

$$«D_c = \overline{D}_c» \quad (12^{IV})$$

Las relaciones (12‴) y (12^{IV}) demuestran lo afirmado al principio.

Adjuntemos, ahora, a las hipótesis del n.º 9 mantenidas hasta el momento, la siguiente:

$$«\varrho_{\overline{G}} \neq 0 \text{ sobre } \overline{G}»$$

es decir, para todo $(x_1, x_2) \in \overline{G}$ es $\varrho(x_1, x_2) \neq 0$, lo que entraña, en virtud de la conexión de $\mathcal{E}_c \subset \overline{G}$ (n.º 9 de esta INTRODUCCIÓN), que $\varrho_{|\mathcal{E}_c}$ es de signo constante sobre $\mathcal{E}_c$, y denotemos para todo $\vec{x}^M = M \in D_c$, por L_M, P_M, Q_M, respectivamente, los puntos de C: $(x_1(h_c(\vec{x}^M)), x_2(h_c(\vec{x}^M)))$, $(x_1^M, x_2(\overset{-1}{x_1}(x_1^M)))$, $(x_1(\overset{-1}{x_2}(x_2^M)), x_2^M)$ (fig. 2).

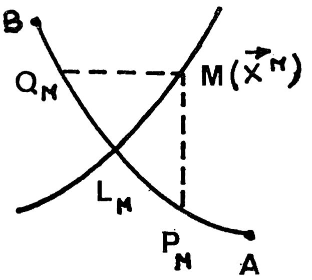


FIG. 2

Se verifica, obviamente, en el supuesto $M \in D_c - C$, que $L_M \neq P_M$ y $P_M \neq Q_M$, y en virtud de la hipótesis efectuada sobre ϱ, se tiene, asimismo, $L_M \neq Q_M$. Nos proponemos demostrar el siguiente:

TEOREMA I. — «Supuestas las hipótesis precedentes, se verifica que para todo $M \in D_c - C$ el triángulo mixtilíneo $\triangle M P_M Q_M$ está contenido en D_c, y además el interior $\overset{\circ}{\widehat{\triangle M P_M Q_M}}$ de dicho triángulo mixtilíneo $\triangle M P_M Q_M$ está contenido en D_c^a, o formulado simbólicamente:

$$(\forall M)\ (M \in D_c - C \to \triangle M P_M Q_M \subset D_c \text{ y } \overset{\circ}{\widehat{\triangle M P_M Q_M}} \subset D_c^a)» \quad (12^V)$$

Para demostrar dicho Teorema, consideraremos los casos posibles siguientes, resultantes de las diversas combinaciones de signos de $\varrho_{|\mathcal{E}_c}$, y de $\varrho x'_1 - x'_2$, ($\varrho x'_1 - x'_2$ denota la función compuesta $r \in [r^A, r^B] \to \varrho(x_1(r), x_2(r)) \cdot x'_1(r) - x'_2(r)$, $\in \mathbf{R}$, la cual, en virtud de las hipótesis efectuadas sobre C (n.º 7 de esta INTRODUCCIÓN) es de signo constante sobre $[r^A, r^B]$), de x'_1 y de x'_2:

$$1.^{\circ})\ \begin{array}{l}(x'_1>0 \text{ y } x'_2>0, \text{ sobre } [r^A, r^B]) \text{ y}\\ \text{y } \varrho_{|\mathcal{E}_c}>0 \text{ sobre } \mathcal{E}_c\end{array} \left\langle \begin{array}{l} 1.^{\alpha})\ \varrho\cdot x'_1 - x'_2>0, \text{ sobre } [r^A,r^B]\\ 1.^{\beta})\ \varrho\cdot x'_1-x'_2<0, \text{ sobre } [r^A,r^B]\end{array}\right.$$

$$1'^{\circ})\ \begin{array}{l}(x'_1>0 \text{ y } x'_2>0, \text{ sobre } [r^A, r^B]) \text{ y}\\ \text{y } \varrho_{|\mathcal{E}_c}<0 \text{ sobre } \mathcal{E}_c\end{array} \rangle\ \varrho\cdot x'_1 - x'_2 < 0, \text{ sobre } [r^A,r^B]$$

$$2.^{\circ})\ \begin{array}{l}(x'_1<0 \text{ y } x'_2<0, \text{ sobre } [r^A, r^B]) \text{ y}\\ \text{y } \varrho_{|\mathcal{E}_c}>0 \text{ sobre } \mathcal{E}_c\end{array} \left\langle \begin{array}{l} 2.^{\alpha})\ \varrho\cdot x'_1 - x'_2>0, \text{ sobre } [r^A,r^B]\\ 2.^{\beta})\ \varrho\cdot x'_1-x'_2<0, \text{ sobre } [r^A,r^B]\end{array}\right.$$

$$2'^{\circ})\ \begin{array}{l}(x'_1<0 \text{ y } x'_2<0, \text{ sobre } [r^A, r^B]) \text{ y}\\ \text{y } \varrho_{|\mathcal{E}_c}<0 \text{ sobre } \mathcal{E}_c\end{array} \rangle\ \varrho\cdot x'_1 - x'_2 > 0, \text{ sobre } [r^A,r^B]$$

$$3.^{\circ})\ \begin{array}{l}(x'_1>0 \text{ y } x'_2<0, \text{ sobre } [r^A, r^B]) \text{ y}\\ \text{y } \varrho_{|\mathcal{E}_c}<0 \text{ sobre } \mathcal{E}_c\end{array} \left\langle \begin{array}{l} 3.^{\alpha})\ \varrho\cdot x'_1 - x'_2>0, \text{ sobre } [r^A,r^B]\\ 3.^{\beta})\ \varrho\cdot x'_1-x'_2<0, \text{ sobre } [r^A,r^B]\end{array}\right.$$

$$3'^{\circ})\ \begin{array}{l}(x'_1>0 \text{ y } x'_2<0, \text{ sobre } [r^A, r^B]) \text{ y}\\ \text{y } \varrho_{|\mathcal{E}_c}>0 \text{ sobre } \mathcal{E}_c\end{array} \rangle\ \varrho\cdot x'_1 - x'_2 > 0, \text{ sobre } [r^A,r^B]$$

$$4.^{\circ})\ \begin{array}{l}(x'_1<0 \text{ y } x'_2>0, \text{ sobre } [r^A, r^B]) \text{ y}\\ \text{y } \varrho_{|\mathcal{E}_c}<0 \text{ sobre } \mathcal{E}_c\end{array} \left\langle \begin{array}{l} 4.^{\alpha})\ \varrho\cdot x'_1 - x'_2>0, \text{ sobre } [r^A,r^B]\\ 4.^{\beta})\ \varrho\cdot x'_1-x'_2<0, \text{ sobre } [r^A,r^B]\end{array}\right.$$

$$4'^{\circ})\ \begin{array}{l}(x'_1<0 \text{ y } x'_2>0, \text{ sobre } [r^A, r^B]) \text{ y}\\ \text{y } \varrho_{|\mathcal{E}_c}>0 \text{ sobre } \mathcal{E}_c\end{array} \rangle\ \varrho\cdot x'_1 - x'_2 < 0, \text{ sobre } [r^A,r^B]$$

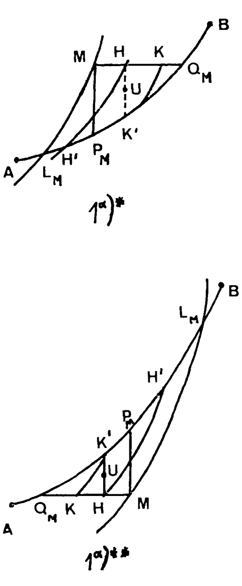


FIG. 1α)

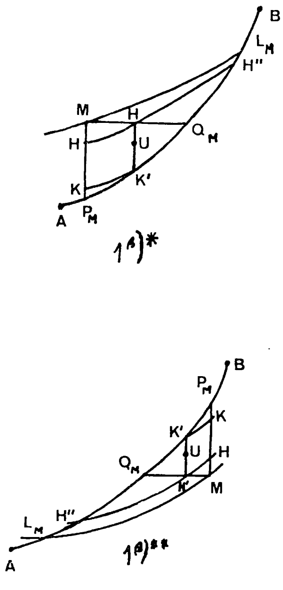


FIG. 1β)

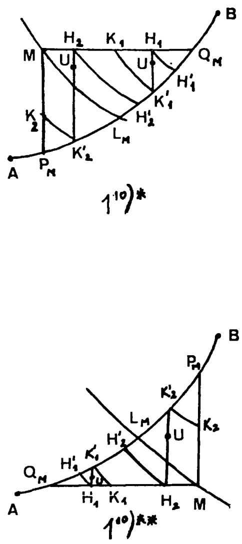


FIG. 1'0)

Refirámonos a los subcasos 1^{α}) y 1^{β}) del caso 1.º), así como al caso 1'º), los cuales corresponden, respectivamente, a las figuras precedentes. (º)

En 1.º), ya que:

$$\left.\begin{array}{c} «(\forall x_1)\ (x_1 \in [\text{mín. } \{x_1{}^M,\ x_1{}^{Q_M}\},\ \text{máx. } \{x_1{}^M,\ x_1{}^{Q_M}\}] \Rightarrow (x_1,\ x_2{}^M) \in \mathcal{E}_c)» \\ \text{y} \\ «(\forall x_2)\ (x_2 \in [\text{mín. } \{x_2{}^M,\ x_2{}^{P_M}\},\ \text{máx. } \{x_2{}^M,\ x_2{}^{P_M}\}] \Rightarrow (x_1{}^M,\ x_2) \in \mathcal{E}_c)» \end{array}\right\}$$

existen, por tanto, las aplicaciones compuestas:

$$\left.\begin{array}{l} «x_1 \in [\text{mín. } \{x_1{}^M, x_1{}^{Q_M}\},\ \text{máx. } \{x_1{}^M, x_1{}^{Q_M}\}] \rightarrow \mathcal{T}_1\,(x_1) = h_c\,(x_1, x_2{}^M) \in \mathbf{R}» \\ «x_2 \in [\text{mín. } \{x_2{}^M, x_2{}^{P_M}\},\ \text{máx. } \{x_2{}^M, x_2{}^{P_M}\}] \rightarrow \mathcal{T}_2(x_2) = h_c'\,(x_1{}^M, x_2) \in \mathbf{R}» \end{array}\right\}$$

las cuales son contínuas sobre sus respectivos intervalos de definición, y además, [habida cuenta las expresiones de $D_1 h_c$, $D_2 h_c$ dadas por las fórmulas (11^{XIII*}) del n.º 9], en el subcaso 1^{α}) es estrictamente creciente la primera y estrictamente decreciente la segunda, por lo que se verifica:

$$\left.\begin{array}{ll} «r^{L_M} = \mathcal{T}_2\,(x_2{}^M) < \mathcal{T}_2\,(x_2{}^{P_M}) = r^{P_M}» & [\text{En } 1^{\alpha})^*] \\ «r^{L_M} = \mathcal{T}_2\,(x_2{}^M) > \mathcal{T}_2\,(x_2{}^{P_M}) = r^{P_M}» & [\text{En } 1^{\alpha})^{**}] \end{array}\right\}$$

y dado que se tiene:

$$\left.\begin{array}{ll} «r^{P_M} < r^{Q_M}» & [\text{En } 1^{\alpha})^*] \\ «r^{P_M} > r^{Q_M}» & [\text{En } 1^{\alpha})^{**}] \end{array}\right\}$$

se sigue de ello que:

$$«[\text{mín. } \{r^{L_M}, r^{P_M}\},\ \text{máx. } \{r^{L_M}, r^{P_M}\}] \cup (\text{mín. } \{r^{P_M}, r^{Q_M}\},\ \text{máx. } \{r^{P_M}, r^{Q_M}\}] =$$
$$= [\text{mín. } \{r^{L_M},\ r^{Q_M}\},\ \text{máx. } \{r^{L_M},\ r^{Q_M}\}] = \mathcal{T}_1\ ([\text{mín. } \{x_1{}^M,\ x_1{}^{Q_M}\},$$
$$,\ \text{máx. } \{x_1{}^M,\ x_1{}^{Q_M}\}])» \quad (12^{V*})$$

(º) El simple asterisco)* corresponde en todos los subcasos 1^{α}), 1^{β}) de 1.º), así como al caso 1'º) a: $x_1{}^M < x_1{}^{Q_M} = x_1\,(r^{Q_M})$, [o equivalentemente (dado que: $x_1{}^M < x_1{}^{Q_M} = x_1\,(r^{Q_M}) \Leftrightarrow r^{P_M} = \overset{-1}{x_1}\,(x_1{}^M) < \overset{-1}{x_1}\,(x_1\,(r^{Q_M})) = r^{Q_M} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x_2{}^{P_M} = x_2\,(r^{P_M}) < x_2\,(r^{Q_M}) = x_2{}^{Q_M} = x_2{}^M)$: $x_2{}^M > x_2{}^{P_M} = x_2\,(r^{P_M})$], y el doble asterisco)** corresponde, asimismo en todos los subcasos de 1.º) y al caso 1'º), a: $x_1{}^M > x_1{}^{Q_M} = x_1\,(r^{Q_M})$ [o equivalentemente: $x_2{}^M < x_2{}^{P_M} = x_2\,(r^{P_M})$].

Sea ahora $U = (x_1^U, x_2^U)$ un punto interior al triángulo mixtilíneo $\triangle MP_MQ_M$; denotemos por $\overline{HK'}$ al segmento de paralela al eje Ox_2, limitado en las trazas $H = (x_1^H, x_2^H) = (x_1^U, x_2^M)$ y $K' = = (x_1^{K'}, x_2^{K'}) = (x_1(r^{K'}), x_2(r^{K'})) = (x_1^H, \overset{-1}{x_2}(x_1(x_1^H)))$ de la misma con el segmento $\overline{MQ_M}$ y el subarco $\widehat{P_MQ_M} \subset C$, respectivamente, y consideremos el punto $H' = (x_1(r^{H'}), x_2(r^{H'})) = (x_1(\mathcal{T}_1(x_1^H)), x_2(\mathcal{T}_1(x_1^H))) \in \widehat{L_MQ_M}$ así como el punto $K = (x_1^K, x_2^K) = (x_1^K, x_2^M) = (\overset{-1}{\mathcal{T}_1}(r^{K'}), x_2^M) \in \overline{MQ_M}$ [existente, siempre, dado que $r^{K'} \in]$ mín $\{r^{P_M}, r^{Q_M}\}$, máx. $\{r^{P_M}, r^{Q_M}\}[$, y en consecuencia, [teniendo en cuenta (12^V*)], se tiene:

$$r^{K'} \in \mathcal{T}_1([\text{mín. } \{x_1^M, x_1^{Q_M}\}, \text{ máx. } \{x_1^M, x_1^{Q_M}\}])].$$

Puesto que se verifica, [habida cuenta además que:

$r = h_c(x_1, x_2) \Rightarrow x_2(r) = \mu(x_1(r), x_1, x_2)]$: $x_2^H = \mu(x_1^H, x_1^H, x_2^H) = = \underset{(x_1^H, x_2^H)}{\mu}(x_1^H)$ y $x_2(r^{H'}) = x_2(\mathcal{T}_1(x_1^H)) = x_2(h_c(x_1^H, x_2^M)) = x_2(h_c(x_1^H, x_2^H)) =$

$$= \mu(x_1(r^{H'}), x_1^H, x_2^H) = \underset{(x_1^H, x_2^H)}{\mu}(x_1(r^{H'}))»$$

y dado que:

$$\left.\begin{array}{l} «x_2(r^{H'}) < x_2^H» \text{ [En } 1^\alpha)^*] \\ «x_2(r^{H'}) > x_2^H» \text{ [En } 1^\alpha)^{**}] \end{array}\right\}$$

se sigue (teniendo en cuenta, además, que en los dos subcasos $1^\alpha)^*$ y $1^\alpha)^{**}$ de $1^\alpha)$ es $\varrho_{|\mathcal{E}_c} > 0$ sobre $\mathcal{E}_c$, y que en virtud de la misma definición de $\mathcal{E}_c$ (n.º 9 de esta INTRODUCCIÓN), para todo $\vec{x} \in \mathcal{E}_c$, si $r = h_c(\vec{x})$, se verifica: $\bigcup_{t \in [\text{mín}\{x_1, x_1(r)\}, \text{máx}\{x_1, x_1(r)\}]} \{(t, \mu(t, x_1, x_2))\} \subset \mathcal{E}_c$ lo que entraña: $(\forall t)\ (t \in [\text{mín } \{x_1, x_1(r)\}, \text{ máx. } x_1, \{x_1(r)\}] \Rightarrow \underset{(x_1, x_2)}{\mu'}(t) = \varrho(t, \mu(t, x_1, x_2)) > 0)$, y por tanto, $\mu_{(x_1, x_2)}$ es estrictamente creciente sobre $[\text{mín } \{x_1, x_1(r)\}, \text{ máx } \{x_1, x_1(r)\}])$, en consecuencia que:

$$\left.\begin{array}{l} «x_1(r^{H'}) < x_1^H = x_1(r^{K'})» \text{ [En } 1^\alpha)^*] \\ «x_1(r^{H'}) > x_1^H = x_1(r^{K'})» \text{ [En } 1^\alpha)^{**}] \end{array}\right\}$$

lo que en virtud del crecimiento estricto de $\overset{-1}{x_1}$: $[x_1(r^A), x_1(r^B))] \to \to [r^A, r^B»]$, entraña:

$$\left.\begin{array}{l} «r^{H'} < r^{K'}» \text{ [En } 1^\alpha)^*] \\ «r^{H'} > r^{K'}» \text{ [En } 1^\alpha)^{**}] \end{array}\right\}$$

Ahora bien, para todo $r \in [\text{mín}\ \{r^{H'}, r^{K'}\}, \text{máx}\ \{r^{H'}, r^{K'}\}]$ se tiene, como consecuencia de lo acabado de establecer y del crecimiento estricto de $\mathcal{T}_1$ y de la función $r \in [r^A, r^B] \to x_1(r) \in \mathbf{R}$, las desigualdades:

$$\left.\begin{array}{l} «x_1(r) \leq x_1(r^{K'}) = x_1{}^U = x_1{}^H = \overset{-1}{\mathcal{T}_1}(r^{H'}) \leq \overset{-1}{\mathcal{T}_1}(r)» \text{ [En } 1^\alpha)^*] \\ «x_1(r) \geq x_1(r^{K'}) = x_1{}^U = x_1{}^H = \overset{-1}{\mathcal{T}_1}(r^{H'}) \geq \overset{-1}{\mathcal{T}_1}(r)» \text{ [En } 1^\alpha)^{**}] \end{array}\right\}$$

[Si $r \in]\ \text{mín}\ \{r^{H'}, r^{K'}\}, \text{máx.}\ \{r^{H'}, r^{K'}\}[$ las desigualdades precedentes son estrictas], y dado que en virtud de la misma definición de $\mathcal{T}_1$, se verifica:

$$«r = h_c(\overset{-1}{\mathcal{T}_1}(r), x_2{}^M)»$$

y consecuentemente [habida cuenta (11^{XII*}) del n.º 9], es válida la relación:

$$«x_1{}^{izq}(\vec{x}(r)) \leq \overset{-1}{\mathcal{T}_1}(r) \leq x_1{}^{der}(\vec{x}(r))»$$

se deduce de todo ello que para todo $r \in [\text{mín.}\ \{r^{H'}, r^{K'}\}, \text{máx.}\ \{r^{H'}, r^{K'}\}]$, se verifica:

$$\left.\begin{array}{l} «x_1{}^{izq}(\vec{x}(r)) < x_1(r) \leq x_1{}^H \leq \overset{-1}{\mathcal{T}_1}(r) \leq x_1{}^{der}(\vec{x}(r))» \text{ [En } 1^\alpha)^*] \\ «x_1{}^{izq}(\vec{x}(r)) \leq \overset{-1}{\mathcal{T}_1}(r) \leq x_1{}^H \leq x_1(r) < x_1{}^{der}(\vec{x}(r))» \text{ [En } 1^\alpha)^{**}] \end{array}\right\}$$

y si $r \in]\ \text{mín.}\ \{r,^{H'} r^{K'}\}, \text{máx.}\ \{r^{H'}, r^{K'}\}\ [$ se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l} «x_1{}^{izq}(\vec{x}(r)) < x_1(r) < x_1{}^H < \overset{-1}{\mathcal{T}_1}(r) \leq x_1{}^{der}(\vec{x}(r))» \text{ [En } 1^\alpha)^*] \\ «x_1{}^{izq}(\vec{x}(r)) \leq \overset{-1}{\mathcal{T}_1}(\vec{x}(r)) < x_1{}^H < x_1(r) < x_1{}^{der}(\vec{x}(r))» \text{ [En } 1^\alpha)^{**}] \end{array}\right\}$$

es decir, para todo $r \in [\text{mín.}\ \{r^{H'}, r^{K'}\}, \text{máx.}\ \{r^{H'}, r^{K'}\}]$ se verifica en los dos subcasos:

$$«x_1{}^H \in [x_1{}^{izq}(\vec{x}(r)), x_1{}^{der}(\vec{x}(r))]» \quad (12^{V**})$$

y para todo $r \in]\ \text{mín.}\ \{r^{H'}, r^{K'}\}, \text{máx.}\ \{r^{H'}, r^{K'}\}[$, es válida, asimismo en los dos subcasos, la relación:

$$«x_1{}^H \in]\ x_1{}^{izq}(\vec{x}(r)), x_1{}^{der}(\vec{x}(r))[» \quad (12^{V***})$$

(12^{V**}) y (12^{V***}) establecen a su vez la validez de las relaciones:

$$\left.\begin{array}{c} «(\forall r)\ (r \in [\text{mín}\ \{r^{H'}, r^{K'}\},\ \text{máx}\ \{r^{H'}, r^{K'}\}] \Rightarrow (x_1^H, x_1(r), x_2(r)) \in \mathfrak{A}')» \\ \text{y} \\ «(\forall r)\ (r \in]\ \text{mín}\ \{r^{H'}, r^{K'}\},\ \text{máx}\ \{r^{H'}, r^{K'}\}\ [\ \Rightarrow (x_1^H, x_1(r), x_2(r)) \in \mathfrak{A})» \end{array}\right\}$$

por lo que está definida la aplicación compuesta:

$$«r \in [\text{mín.}\ \{r^{H'}, r^{K'}\},\ \text{máx.}\ \{r^{H'}, r^{K'}\}] \rightarrow \sigma(r) = \mu(x_1^H, x_1(r), x_2(r)) \in \mathbf{R}»$$

la cual, como consecuencia de la segunda de las relaciones precedentes, verifica:

$$«(\forall r)\ (r \in]\ \text{mín.}\ \{r^{H'}, r^{K'}\},\ \text{máx.}\ \{r^{H'}, r^{K'}\}[\ \Rightarrow \sigma(r) = \lambda(x_1^H, x_1(r), x_2(r)))»$$

y por tanto:

$$«(\forall r)\ (r \in]\ \text{mín.}\ \{r^{H'}, r^{K'}\},\ \text{máx.}\ \{r^{H'}, r^{K'}\}[\ \Rightarrow (x_1^H, \sigma(r)) \in G)» \quad (13)$$

La función σ es derivable sobre su intervalo de definición, siendo para todo $r \in [\text{mín.}\ \{r^{H'}, r^{K'}\},\ \text{máx.}\ \{r^{H'}, r^{K'}\}]$ el valor de su derivada:

$$«\sigma'(r) = \exp. \left\{\int_{x_1(r)}^{x_1^H} (D_2\varrho)(t, \mu(t, x_1(r), x_2(r)))\, dt\right\} \cdot [x_2'(r) - \\ - \varrho(x_1(r), x_2(r)) \cdot x_1'(r)] < 0»$$

y consecuentemente σ es contínua y estrictamente decreciente, y puesto que:

$$«r^{H'} = \mathcal{T}_1(x_1^H) = h_c(x_1^H, x_2^M) = h_c(x_1^H, x_2^H)»$$

lo que, (habida cuenta la definición de h_c), entraña:

$$«x_2^H = \mu(x_1^H, x_1(r^{H'}), x_2(r^{H'})) = \sigma(r^{H'})»$$

y además se tiene:

$$«\sigma(r^{K'}) = \mu(x_1^H, x_1(r^{K'}), x_2(r^{K'})) = \mu(x_1(r^{K'}), x_1(r^{K'}), x_2(r^{K'})) = \\ = x_2(r^{K'}) = x_2^{K'}»$$

se sigue de todo ello, que:

$$«\sigma([\text{mín.}\ \{r^{H'}, r^{K'}\},\ \text{máx.}\ \{r^{H'}, r^{K'}\}]) = [\text{mín.}\ \{x_2^H, x_2^{K'}\},\ \text{máx.}\ \{x_2^H, x_2^{K'}\}]»$$

y en particular, dado que $x_2^U \in]$ mín. $\{x_2^H, x_2^{K'}\}$, máx. $\{x_2^H, x_2^{K'}\}[$, existe un único $r \in]$ mín. $\{r^{H'}, r^{K'}\}$, máx. $\{r^{H'}, r^{K'}\}[\subset] r^A, r^B[$, tal que:

$$« (x_1^H, x_1(r), x_2(r)) \in \mathcal{A} \text{ y } x_2^U = \sigma(r) = \lambda(x_1^H, x_1(r), x_2(r)) = \\ = \lambda(x_1^U, x_1(r), x_2.(r)) »$$

es decir teniendo en cuenta además (13):

$$« U = (x_1^U, x_2^U) \in G \text{ y } (\exists r)\ (r \in] r^A, r^B[\text{ y } (x_1^U, x_1(r), x_2(r)) \in \mathcal{A} \text{ y} \\ \text{y } x_2^U = \lambda(x_1^U, x_1(r), x_2(r))) »$$

La relación acabada de establecer es equivalente a:

$$« U = (x_1^U, x_2^U) \in \mathcal{E}_c^a »$$

En 1^β) las aplicaciones continuas ya consideradas $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$, son la primera estrictamente decreciente sobre [mín. $\{x_1^M, x_1^{Q_M}\}$, máx. $\{x_1^M, x_1^{Q_M}\}$] y la segunda estrictamente creciente sobre [mín. $\{x_2^M, x_2^{P_M}\}$, máx. $\{x_2^M, x_2^{P_M}\}$], por lo que:

$$\left.\begin{array}{l} «r^{L_M} = \mathcal{T}_1(x_1^M) > \mathcal{T}_1(x_1^{Q_M}) = r^{Q_M}» \ [\text{En } 1^\beta)^*] \\ «r^{L_M} = \mathcal{T}_1(x_1^M) < \mathcal{T}_1(x_1^{Q_M}) = r^{Q_M}» \ [\text{En } 1^\beta)^{**}] \end{array}\right\}$$

y puesto que se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} « r^{Q_M} > r^{P_M} » \ [\text{En } 1^\beta)^*] \\ « r^{Q_M} < r^{P_M} » \ [\text{En } 1^\beta)^{**}] \end{array}\right\}$$

se sigue que en los dos subcasos se verifica:

$$« [\text{mín. } \{r^{L_M}, r^{Q_M}\}, \text{máx. } \{r^{L_M}, r^{Q_M}\}] \cup [\text{mín. } \{r^{P_M}, r^{Q_M}\}, \text{máx. } \{r^{P_M}, r^{Q_M}\}] = \\ = [\text{mín. } \{r^{L_M}, r^{P_M}\}, \text{máx. } \{r^{L_M}, r^{P_M}\}] = \mathcal{T}_2 ([\text{mín. } \{x_2^M, x_2^{P_M}\}, \text{máx. } \\ \{x_2^M, x_2^{P_M}\}] » \quad (13')$$

Sea $U = (x_1^U, x_2^U)$ un punto interior al triángulo mixtilíneo $\triangle M P_M Q_M$; designemos por $\overline{H'K'}$ al segmento de paralela al eje Ox_2 limitado en las trazas $H' = (x_1^{H'}, x_2^{H'}) = (x_1^U, x_2^M)$ y $K' = (x_1^{K'}, x_2^{K'}) = (x_1(r^{K'}), x_2(r^{K'})) = (x_1^{H'}, x_2(\overset{-1}{x_1}(x_1^{H'})))$ de la misma con el segmento

$\overline{MQ_M}$ y el arco $\widehat{P_M Q_M}$, respectivamente, y consideremos el punto $H'' = (x_1(r^{H''}), x_2(r^{H''})) = (x_1(\mathcal{T}_1(x_1^{H'})), x_2(\mathcal{T}_1(x_1^{H'}))) \in \widehat{L_M Q_M} \subset \widehat{L_M P_M}$, el punto $K = (x_1^K, x_2^K) = (x_1^M, \overset{-1}{\mathcal{T}_2}(r^{K'})) \in \overline{MP_M}$, [punto K existente siempre, dado que $r^{K'} \in]$ mín. $\{r^{P_M}, r^{Q_M}\}$, máx. $\{r^{P_M}, r^{Q_M}\}[$, y en virtud de (13') se tiene: $r^{K'} \in \mathcal{T}_2$ ([mín. $\{x_2^M, x_2^{P_M}\}$, máx. $\{x_2^M, x_2^{P_M}\}$])], así como el punto $H = (x_1^H, x_2^H) = (x_1^M, \overset{-1}{\mathcal{T}_2}(r^{H''})) \in \overline{MP_M}$. [Dicho punto H existe siempre, puesto que $r^{H''} = \mathcal{T}_1(x_1^{H'}) \in]$ mín. $\{r^{L_M}, r^{Q_M}\}$, máx. $\{r^{L_M}, r^{Q_M}\}[$, y en consecuencia, habida cuenta (13'), se tiene: $r^{H''} \in \mathcal{T}_2$ ([mín. $\{x_2^M, x_2^{P_M}\}$, máx. $\{x_2^M, x_2^{P_M}\}$])].

Se verifica, en virtud del decrecimiento estricto de $\mathcal{T}_1$:

$$\text{«} r^{H''} = \mathcal{T}_1(x_1^{H'}) > \mathcal{T}_1(x_1^{Q_M}) = r^{Q_M} > r^{K'} \text{» [En } 1^\beta)^*]$$
$$\text{«} r^{H''} = \mathcal{T}_1(x_1^{H'}) < \mathcal{T}_1(x_1^{Q_M}) = r^{Q_M} < r^{K'} \text{» [En } 1^\beta)^{**}]$$

relaciones, de las que habida cuenta el crecimiento estricto de $\overset{-1}{\mathcal{T}_2}$, se deduce:

$$\text{«} \overset{-1}{\mathcal{T}_2}(r^{H''}) = x_2^H > x_2^K = \overset{-1}{\mathcal{T}_2}(r^{K'}) \text{» [En } 1^\beta)^*]$$
$$\text{«} \overset{-1}{\mathcal{T}_2}(r^{H''}) = x_2^H < x_2^K = \overset{-1}{\mathcal{T}_2}(r^{K'}) \text{» [En } 1^\beta)^{**}]$$

Por otro lado, para todo $r \in$ [mín. $\{r^{H''}, r^{K'}\}$, máx. $\{r^{H''}, r^{K'}\}$] se tiene, como consecuencia de lo acabado de establecer y del crecimiento estricto de la función $r \in [r^A, r^B] \to x_1(r) \in \mathbf{R}$, las desigualdades:

$$\left.\begin{array}{l} \text{«} x_1(r) \geq x_1(r^{K'}) = x_1^U > x_1(r^{P_M}) = x_1^M \text{» [En } 1^\beta)^*] \\ \text{«} x_1(r) \leq x_1(r^{K'}) = x_1^U < x_1(r^{P_M}) = x_1^M \text{» [En } 1^\beta)^{**}] \end{array}\right\}$$

y dado que, en virtud de la misma definición de $\mathcal{T}_2$, para todo $r \in$ mín. [$\{r^{L_M}, r^{P_M}\}$, máx. $\{r^{L_M}, r^{P_M}\}$], se verifica:

$$\text{«} r = \mathcal{T}_2(\overset{-1}{\mathcal{T}_2}(r)) = h_c(x_1^M, \overset{-1}{\mathcal{T}_2}(r)) \text{»}$$

y consecuentemente [(11^{XII*}) del n.º 9], es válida la relación:

$$\text{«} x_1^{izq}(\vec{x}(r)) \leq x_1^M \leq x_1^{der}(\vec{x}(r)) \text{»}$$

se deduce de todo ello que:

$$\left.\begin{array}{l} «x_1^{izq}(\vec{x}(r)) \leq x_1^M < x_1^U \leq x_1(r) < x_1^{der}(\vec{x}(r))» \text{ [En } 1^{\beta})^*] \\ «x_1^{izq}(\vec{x}(r)) < x_1(r) \leq x_1^U < x_1^M \leq x_1^{der}(\vec{x}(r))» \text{ [En } 1^{\beta})^{**}] \end{array}\right\}$$

es decir, para todo $r \in [\text{mín}\{r^{H''}, r^{K'}\}, \text{máx}\{r^{H''}, r^{K'}\}]$, se verifica en los dos subcasos:

$$«x_1^U \in]x_1^{izq}(\vec{x}(r)), x_1^{der}(\vec{x}(r))[»$$

Así pues, es válida la relación:

$$«(\forall r)\ (r \in [\text{mín}\{r^{H''}, r^{K'}\}, \text{máx}\{r^{H''}, r^{K'}\}] \Rightarrow (x_1^U, x_1(r), x_2(r)) \in \mathfrak{A})» \quad (13'')$$

y, consecuentemente, está definida la aplicación compuesta:

$$«r \in [\text{mín}\{r^{H''}, r^{K'}\}, \text{máx}\{r^{H''}, r^{K'}\}] \to \sigma(r) = \lambda(x_1^U, x_1(r), x_2(r)) \in \mathbf{R}»$$

la cual es derivable sobre su intervalo de definición, siendo para todo r de dicho intervalo, el valor de la derivada igual a:

$$«\sigma'(r) = \exp.\left\{\int_{x_1(r)}^{x_1^U} (D_2\varrho)\ (t, \lambda(t, x_1(r), x_2(r)))\, dt\right\} \cdot$$
$$\cdot [x'_2(r) - \varrho(x_1(r), x_2(r)) \cdot x'_1(r)] > 0»$$

y por tanto σ es continua y estrictamente creciente sobre su intervalo de definición, verificándose, además, como consecuencia de la propia definición de σ:

$$«(\forall r)\ (r \in [\text{mín.}\{r^{H''}, r^{K'}\}, \text{máx.}\{r^{H''}, r^{K'}\}] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x_1^U, \sigma(r)) \in G)» \quad (13''')$$

y puesto que:

$$«r^{H''} = \mathcal{T}_1(x_1^{H'}) = h_c(x_1^{H'}, x_2^M) = h_c(x_1^U, x_2^{H'})»$$

lo que entraña, habida cuenta la definición de h_c, [n.º 9 de esta INTRODUCCIÓN], y que en virtud de (13'') es $(x_1^U, x_1(r^{H''}), x_2(r^{H''})) \in \mathfrak{A}$:

$$«x_2^{H'} = \mu(x_1^U, x_1(r^{H''}), x_2(r^{H''})) = \lambda(x_1^U, x_1(r^{H''}), x_2(r^{H''})) = \sigma(r^{H''})»$$

así como se tiene además que:

$$«\sigma(r^{K'}) = \lambda(x_1{}^U, x_1(r^{K'}), x_2(r^{K'})) = \lambda(x_1(r^{K'}), x_1(r^{K'}), x_2(r^{K'})) = \\ = x_2(r^{K'}) = x_2{}^{K'}»$$

por lo que se verifica:

$$«\sigma([\text{mín}\{r^{H''}, r^{K'}\}, \text{máx}\{r^{H''}, r^{K'}\}]) = [\text{mín}\{x_2{}^{H'}, x_2{}^{K'}\}, \text{máx}\{x_2{}^{H'}, x_2{}^{K'}\}]»$$

y en particular, dado que $x_2{}^U \in]\text{mín}\{x_2{}^{H'}, x_2{}^{K'}\}. \text{máx}\{x_2{}^{H'}, x_2{}^{K'}\}[$, existe, por tanto, un único $r \in]\text{mín}\{r^{H''}, r^{K'}\}, \text{máx}\{r^{H''}, r^{K'}\}[\subset]r^A, r^B[$, tal que, [teniendo en cuenta además (13'')]:

$$«(x_1{}^U, x_1(r), x_2(r)) \in \mathcal{A} \text{ y } x_2{}^U = \sigma(r) = \lambda(x_1{}^U, x_1(r), x_2(r))»$$

y en consecuencia, habida cuenta además (13'''), es válida la relación:

$$«U = (x_1{}^U, x_2{}^U) \in G \text{ y } (\exists r)\ (r \in]r^A, r^B[\text{ y } (x_1{}^U, x_1(r), x_2(r)) \in \mathcal{A} \text{ y} \\ \text{y } x_2{}^U = \lambda(x_1{}^U, x_1(r), x_2(r)))»$$

o lo que es equivalente:

$$«U = (x_1{}^U, x_2{}^U) \in \mathcal{E}_c{}^a»$$

En 1'º) las aplicaciones continuas $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ son ambas estrictamente crecientes sobre sus respectivos intervalos de definición, por lo que:

$$\left.\begin{array}{l} «r^{P_M} = \mathcal{T}_2(x_2{}^{P_M}) < \mathcal{T}_2(x_2{}^M) = r^{L_M} = \mathcal{T}_1(x_1{}^M) < \mathcal{T}_1(x_1{}^{Q_M}) = r^{Q_M}» \text{ [En 1'º)*]} \\ «r^{P_M} = \mathcal{T}_2(x_2{}^{P_M}) > \mathcal{T}_2(x_2{}^M) = r^{L_M} = \mathcal{T}_1(x_1{}^M) > \mathcal{T}_1(x_1{}^{Q_M}) = r^{Q_M}» \text{ [En 1'º)**]} \end{array}\right\}$$

deduciéndose, que en los dos subcasos se verifica:

$$«\mathcal{T}_1([\text{mín}\{x_1{}^M, x_1{}^{Q_M}\}, \text{máx}\{x_1{}^M, x_1{}^{Q_M}\}]) \cup \mathcal{T}_2([\text{mín}\{x_2{}^M, x_2{}^{P_M}\}, \\ , \text{máx}\{x_2{}^M, x_2{}^{P_M}\}]) = [\text{mín}\{r^{L_M}, r^{Q_M}\}, \text{máx}\{r^{L_M}, r^{Q_M}\}] \cup [\text{mín}\{r^{L_M}, r^{P_M}\}, \\ \text{máx}\{r^{L_M}, r^{P_M}\}] = [\text{mín}\{r^{P_M}, r^{Q_M}\}, \text{máx}\{r^{P_M}, r^{Q_M}\}]» \qquad (13^{IV})$$

Sea $U = (x_1{}^U, x_2{}^U) \in \overset{\circ}{\widehat{\triangle M P_M Q_M}}$, y como anteriormente, (fig. 3), sea $\overline{HK'}$ el segmento de paralela al eje Ox_2 limitado en las trazas

$H = (x_1{}^U, x_2{}^M)$ y $K' = (x_1{}^U, x_2\,(\overset{-1}{x_1}\,(x_1{}^U)))$ de dicha paralela con el, segmento $\overline{MQ_M}$ y el arco $\widehat{P_M Q_M}$, respectivamente.

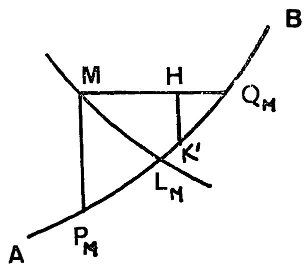


FIG. 3

Puesto que:

$$«\, r^{K'} \in]\ \text{mín.}\ \{r^{P_M}, r^{Q_M}\},\ \text{máx.}\ \{r^{P_M}, r^{Q_M}\}[\ »$$

se sigue, habida cuenta (13^{IV}), que ha lugar, tanto en $1'^{\text{o}})^*$ como en $1'^{\text{o}})^{**}$, a considerar los subcasos:

$$\left.\begin{array}{l} «\, r^{K'} \in [\text{mín.}\ \{r^{L_M}, r^{Q_M}\},\ \text{máx.}\ \{r^{L_M}, r^{Q_M}\}] - \{r^{Q_M}\}\ » \ (^1) \\ «\, r^{K'} \in]\text{mín.}\ \{r^{L_M}, r^{P_M}\},\ \text{máx.}\ \{r^{L_M}, r^{P_M}\}[\ » \ (^2) \end{array}\right\}$$

Designaremos a los subcasos $(^1)$ y $(^2)$, mediante $(^1)^*$ y $(^2)^*$ o $(^1)^{**}$ y $(^2)^{**}$, según, que, respectivamente, correspondan a $1'^{\text{o}})^*$ o $1'^{\text{o}})^{**}$. «$(^1)^*$ y $(^1)^{**}$». — Denotemos en estos subcasos (véanse figuras correspondientes), a H y K' por $H_1 = (x_1{}^{H_1}, x_2{}^{H_1}) = (x_1{}^U, x_2{}^M)$ y $K'_1 = (x_1{}^{K'_1}, x_2{}^{K'_1}) = (x_1\,(r^{K'_1}), x_2\,(r^{K'_1})) = (x_1{}^{H_1}, x_2\,(\overset{-1}{x_1}\,(x_1{}^{H_1})))$, respectivamente, y consideremos, como en 1^α), el punto $H'_1 = (x_1(r^{H'_1}), x_2(r^{H'_1})) = (x_1\,(\mathcal{T}_1\,(x_1{}^U)), x_2\,(\mathcal{T}_1\,(x_1{}^U))) \in \widehat{L_M Q_M}$, así como el punto $K_1 = (x_1{}^{K_1}, x_2{}^{K_1}) = (x_1{}^{K_1}, x_2{}^M) = (\overset{-1}{\mathcal{T}_1}\,(r^{K'_1}), x_2{}^M) \in \overline{MQ_M}$, punto este último existente siempre, ya que en el subcaso $(^1)$ que estamos considerando, se tiene: $r^{K'_1} \in \mathcal{T}_1\,([\text{mín.}\ \{x_1{}^M, x_1{}^{Q_M}\},\ \text{máx.}\ \{x_1{}^M, x_1{}^{Q_M}\}])$.

Puesto que:

$$«x_2{}^{H_1} = \mu\,(x_1{}^{H_1}, x_1{}^{H_1}, x_2{}^{H_1}) = \underset{(x_1{}^{H_1}, x_2{}^{H_1})}{\mu\,(x_1{}^{H_1})} \text{ y } x_2\,(r^{H'_1}) = x_2\,(\mathcal{T}_1\,(x_1{}^U)) =$$

$$= x_2(h_c\,(x_1{}^U, x_2{}^M)) = x_2\,(h_c(x_1{}^{H_1}, x_2{}^{H_1})) = \mu\,(x_1\,(r^{H'_1}), x_1{}^{H_1}, x_2{}^{H_1}) = \underset{(x_1{}^{H_1}, x_2{}^{H_1})}{\mu\,(x_1\,(r^{H'_1}))}»$$

y dado que:

$$\left.\begin{array}{l} «\, x_2\,(r^{H'_1}) < x_2{}^{H_1} \,» \text{ [En } (^1)^*] \\ «\, x_2\,(r^{H'_1}) > x_2{}^{H_1} \,» \text{ [En } (^1)^{**}] \end{array}\right\}$$

se sigue, [teniendo en cuenta que en $1'^{o})$, y por tanto en $(^1)^*$ y $(^1),^{**}$ es $\varrho_{|\mathcal{E}_c} < 0$ sobre $\mathcal{E}_c$, por lo que para todo $\vec{x} \in \mathcal{E}_c$, si $r = h_c\,(\vec{x})$, se verifica que $\mu_{(x_1, x_2)}$ es estrictamente decreciente sobre [mín. $\{x_1, x_1\,(r)\}$, máx. $\{x_1, x_1\,(r)\}$] (Razonamiento análogo al empleado en 1^{α}))], en consecuencia que:

$$\left.\begin{array}{l} «\, x_1\,(r^{H'_1}) > x_1{}^{H_1} = x_1\,(r^{K'_1}) \,» \text{ [En } (^1)^*] \\ «\, x_1\,(r^{H'_1}) < x_1{}^{H_1} = x_1\,(r^{K'_1}) \,» \text{ [En } (^1)^{**}] \end{array}\right\}$$

lo que en virtud del crecimiento estricto de $\overset{-1}{x_1}$: $[x_1\,(r^A), x_1\,(r^B)] \to$ $\to [r^A, r^B]$, entraña:

$$\left.\begin{array}{l} «\, r^{H'_1} > r^{K'_1} \,» \text{ [En } (^1)^*] \\ «\, r^{H'_1} < r^{H'_1} \,» \text{ [En } (^1)^{**}] \end{array}\right\}$$

y por tanto, para todo $r \in$ [mín. $\{r^{H'_1}, r^{K'_1}\}$, máx. $\{r^{H'_1}, r^{K'_1}\}$], se tiene como consecuencia de lo precedente y del crecimiento estricto de $\overset{-1}{\mathcal{T}_1}$ y de la función: $r \in [r^A, r^B] \to x_1\,(r) \in \mathbf{R}$, las desigualdades:

$$\left.\begin{array}{l} «\, x_1\,(r) \geq x_1\,(r^{K'_1}) = x_1{}^U = x_1{}^{H_1} = \overset{-1}{\mathcal{T}_1}\,(r^{H'_1}) \geq \overset{-1}{\mathcal{T}_1}\,(r) \,» \text{ [En } (^1)^*] \\ «\, x_1\,(r) \leq x_1\,(r^{K'_1}) = x_1{}^U = x_1{}^{H_1} = \overset{-1}{\mathcal{T}_1}\,(r^{H'_1}) \leq \overset{-1}{\mathcal{T}_1}\,(r) \,» \text{ [En } (^1)^{**}] \end{array}\right\}$$

[Si $r \in$]mín. $\{r^{H'_1}, r^{K'_1}\}$, máx. $\{r^{H'_1}, r^{K'_1}\}$[las desigualdades anteriores son estrictas]. y puesto que, en virtud de la misma definición de $\mathcal{T}_1$ se verifica:

$$«\, r = h_c\,(\overset{-1}{\mathcal{T}_1}\,(r), x_2{}^M) \,»$$

y consecuentemente, [(11^{XII*}) del n.º 9], es válida la relación:

$$«\, x_1{}^{izq}\,(\vec{x}\,(r)) \leq \overset{-1}{\mathcal{T}_1}\,(r) \leq x_1{}^{der}\,(\vec{x}\,(r)) \,»$$

se deduce de todo ello que para todo $r \in$ [mín. $\{r^{H'_1}, r^{K'_1}\}$, máx. $\{r^{H'_1}, r^{K'_1}\}$], se verifica:

$$\left.\begin{array}{l} «\, x_1{}^{izq}\,(\vec{x}\,(r)) \leq \overset{-1}{\mathcal{T}_1}\,(r) \leq x_1{}^U \leq x_1\,(r) < x_1{}^{der}\,(\vec{x}\,(r)) \,» \text{ [En } (^1)^*] \\ «\, x_1{}^{izq}\,(\vec{x}\,(r)) < x_1\,(r) \leq x_1{}^U \leq \overset{-1}{\mathcal{T}_1}\,(r) \leq x_1{}^{der}\,(\vec{x}\,(r)) \,» \text{ [En } (^1)^{**}] \end{array}\right\}$$

y si $r \in]$ mín. $\{r^{H'_1}, r^{K'_1}\}$, máx. $\{r^{H'_1}, r^{K'_1}\}[$, se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l} «x_1^{izq}(\vec{x}(r)) \leq \overset{-1}{\mathcal{T}_1}(r) < x_1^U < x_1(r) < x_1^{der}(\vec{x}(r))» \text{ [En } (^1)^*] \\ «x_1^{izq}(\vec{x}(r)) < x_1(r) < x_1^U < \overset{-1}{\mathcal{T}_1}(r) \leq x_1^{der}(\vec{x}(r))» \text{ [En } (^1)^{**}] \end{array}\right\}$$

es decir, para todo $r \in [$mín. $\{r^{H'_1}, r^{K'_1}\}$, máx. $\{r^{H'_1}, r^{K'_1}\}]$, se verifica en los dos subcasos $(^1)^*$ y $(^1)^{**}$:

$$«x_1^U \in [x_1^{izq}(\vec{x}(r)), x_1^{der}(\vec{x}(r))]»$$

y para todo $r \in]$ mín. $\{r^{H'_1}, r^{K'_1}\}$, máx. $\{r^{H'_1}, r^{K'_1}\}[$ es válida, asimismo en los dos subcasos, la relación:

$$«x_1^U \in] x_1^{izq}(\vec{x}(r)), x_1^{der}(\vec{x}(r))[»$$

Las dos últimas relaciones establecen a su vez la validez de las relaciones:

$$\left.\begin{array}{l} «(\forall r)\ (r \in [\text{mín. } \{r^{H'_1}, r^{K'_1}\}, \text{máx. } \{r^{H'_1}, r^{K'_1}\}] \Rightarrow (x_1^U, x_1(r), x_2(r)) \in \mathcal{A}')» \\ «(\forall r)\ (r \in]\text{mín. } \{r^{H'_1}, r^{K'_1}\}, \text{máx. } \{r^{H'_1}, r^{K'_1}\}[\Rightarrow (x_1^U, x_1(r), x_2(r)) \in \mathcal{A})» \end{array}\right\}$$

por lo que, análogamente a lo que sucedía en 1α), está definida la aplicación compuesta:

$$«r \in [\text{mín. } \{r^{H'_1}, r^{K'_1}\}, \text{máx. } \{r^{H'_1}, r^{K'_1}\}] \to \sigma(r) = \mu(x_1^U, x_1(r), x_2(r)) \in \mathbf{R}»$$

la cual, como consecuencia de la segunda de las relaciones precedentes, verifica:

$$«(\forall r)\ (r \in]\ \text{mín. } \{r^{H'_1}, r^{K'_1}\}, \text{ máx. } \{r^{H'_1}, r^{K'_1}\}[\Rightarrow (x_1^U, \sigma(r)) \in G)»$$

La función σ es derivable sobre su intervalo de definición, siendo, para todo $r \in [$mín. $\{r^{H'_1}, r^{K'_1}\}$, máx. $\{r^{H'_1}, r^{K'_1}\}]$, el valor de su derivada igual a:

$$«\sigma'(r) = \exp. \left\{\int_{x_1(r)}^{x_1^U} (D_2\,\varrho)\ (t, \mu(t, x_1(r), x_2(r)))\ dt\right\}. [x'_2(r) - \\ - \varrho(x_1(r), x_2(r)) \cdot x'_1(r)] > 0»$$

por lo que σ es continua y estrictamente creciente, y además se tiene, [lo que se comprueba inmediatamente de forma análoga que en $1^{\alpha})$], que:

$$«\sigma(r^{H'_1}) = x_2^{H_1} \text{ y } \sigma(r^{K'_1}) = x_2^{K'_1}»$$

y en consecuencia:

$$«\sigma([\text{mín}\{r^{H'_1}, r^{K'_1}\}, \text{máx}\{r^{H'_1}, r^{K'_1}\}]) = [\text{mín}\{x_2^{H_1}, x_2^{K'_1}\}, \text{máx}\{x_2^{H_1}, x_2^{K'_1}\}]»$$

lo que, habida cuenta que $x_2^U \in\,]\text{mín}\{x_2^{H_1}, x_2^{K'_1}\}, \text{máx}\{x_2^{H_1}, x_2^{K'_1}\}[$, entraña que exista un único $r \in\,]\text{mín}\{r^{H'_1}, r^{K'_1}\}, \text{máx}\{r^{H'_1}, r^{K'_1}\}[\, \subset\,]r^A, r^B[$, tal que:

$$«(x_1^U, x_1(r), x_2(r)) \in \mathcal{A} \text{ y } (x_1^U, x_2^U) = (x_1^U, \sigma(r)) \in G \text{ y } x_2^U = \sigma(r) = \\ = \lambda(x_1^U, x_1(r), x_2(r))»$$

es decir, se verifica la relación:

$$«U = (x_1^U, x_2^U) \in G \text{ y } (\exists r)\ (r \in]\, r^A, r^B[\text{ y } (x_1^U, x_1(r), x_2(r)) \in \mathcal{A} \text{ y } x_2^U = \\ = \lambda(x_1^U, x_1(r), x_2(r)))»$$

o lo que es equivalente:

$$«U = (x_1^U, x_2^U) \in \mathcal{E}_c^a»$$

«(2)* y (2)**» — En estos subcasos (Véasen figuras correspondientes), denotemos a H y K' por $H_2 = (x_1^{H_2}, x_2^{H_2}) = (x_1^U, x_2^M)$ y $K'_2 = (x_1^{K'_2}, x_2^{K'_2}) = (x_1(r^{K'_2}), x_2(r^{K'_2})) = (x_1^{H_2}, x_2(\overset{-1}{x_1}(x_1^{H_2})))$, respectivamente, y consideremos el punto $H'_2 = (x_1(r^{H'_2}), x_2(r^{H'_2})) = (x_1(\mathcal{T}_1(x_1^U)), x_2(\mathcal{T}_1(x_1^U))) \in \widehat{L_M Q_M} \subset \widehat{P_M Q_M}$, y el punto $K_2 = (x_1^{K_2}, x_2^{K_2}) = (x_1^M, \overset{-1}{\mathcal{T}_2}(r^{K'_2}))$ [Punto K_2 existente siempre, ya que en el subcaso (2) que se está considerando, se tiene: $r^{K'_2} \in\,]\text{mín}\{r^{L_M}, r^{P_M}\}, \text{máx}\{r^{L_M}, r^{P_M}\}[\, = \mathcal{T}_2(]\text{mín.}\{x_2^M, x_2^{P_M}\}, \text{máx.}\{x_2^M, x_2^{P_M}\}[)]$.

Puesto que:

$$\left.\begin{array}{l} «x_1^M < x_1^{H_2} = x_1^U» \text{ [En (2)*]} \\ «x_1^M > x_1^{H_2} = x_1^U» \text{ [En (2)**]} \end{array}\right\}$$

se sigue, habida cuenta el crecimiento estricto de $\mathcal{T}_1$ sobre [mín. $\{x_1^M, x_1^{Q_M}\}$, máx. $\{x_1^M, x_1^{Q_M}\}$], en consecuencia que:

$$\left.\begin{array}{l} «\mathcal{T}_1(x_1^M) = r^{L_M} < r^{H'_2} = \mathcal{T}_1(x_1^U)» \text{ [En (}^2\text{)*]} \\ «\mathcal{T}_1(x_1^M) = r^{L_M} > r^{H'_2} = \mathcal{T}_1(x_1^U)» \text{ [En (}^2\text{)**]} \end{array}\right\} \quad (13^V)$$

y por otro lado, dado que en (²) se verifica:

$$«r^{K'_2} \in]\text{mín. } \{r^{L_M}, r^{P_M}\}, \text{ máx. } \{r^{L_M}, r^{P_M}\}[»$$

lo que entraña:

$$\left.\begin{array}{l} «r^{K'_2} < r^{L_M}» \text{ [En (}^2\text{)*]} \\ «r^{K'_2} > r^{L_M}» \text{ [En (}^2\text{)**]} \end{array}\right\} \quad (13^{V*})$$

que junto con (13^V) establece la relación: $r^{L_M} \in]$mín. $\{r^{H'_2}, r^{K'_2}\}$, máx. $\{r^{H'_2}, r^{K'_2}\}[$, y consecuentemente, se verifica:

$$«[\text{mín. } \{r^{L_M}, r^{H'_2}\}, \text{ máx. } \{r^{L_M}, r^{H'_2}\}] \cup [\text{mín. } \{r^{L_M}, r^{K'_2}\}, \text{ máx. } \{r^{L_M}, r^{K'_2}\}] =$$
$$= [\text{mín. } \{r^{H'_2}, r^{K'_2}\}, \text{ máx. } \{r^{H'_2}, r^{K'_2}\}]» \quad (13^{V**})$$

De (13^V) y (13^{V*}) y del crecimiento estricto de $\overset{-1}{\mathcal{T}_1}$ y de la función: $r \in [r^A, r^B] \to x_1(r) \in \mathbf{R}$, se deduce que para todo $r \in [$mín. $\{r^{L_M}, r^{H'_2}\}$, máx. $\{r^{L_M}, r^{H'_2}\}]$ son válidas las desigualdades:

$$\left.\begin{array}{l} «x_1(r) \geq x_1(r^{L_M}) > x_1(r^{K'_2}) = x_1^U = x_1^{H_2} = \overset{-1}{\mathcal{T}_1}(r^{H'_2}) \geq \overset{-1}{\mathcal{T}_1}(r)» \text{ [En (}^2\text{)*]} \\ «x_1(r) \leq x_1(r^{L_M}) < x_1(r^{K'_2}) = x_1^U = x_1^{H_2} = \overset{-1}{\mathcal{T}_1}(r^{H'_2}) \leq \overset{-1}{\mathcal{T}_1}(r)» \text{ [En (}^2\text{)**]} \end{array}\right\}$$

y puesto que, para todo $r \in [$mín. $\{r^{L_M}, r^{H'_2}\}$, máx. $\{r^{L_M}, r^{H'_2}\}] \subset [$mín. $\{r^{L_M}, r^{Q_M}\}$, máx. $\{r^{L_M}, r^{Q_M}\}] = \mathcal{T}_1([$mín. $\{x_1^M, x_1^{Q_M}\}$, máx. $\{x_1^M, x_1^{Q_M}\}])$, se tiene que:

$$«r = \mathcal{T}_1(\overset{-1}{\mathcal{T}_1}(r)) = h_c(\overset{-1}{\mathcal{T}_1}(r), x_2^M)»$$

y por tanto [(11^{XII*}) del n.º 9], se verifica:

$$«x_1^{izq}(\vec{x}(r)) \leq \overset{-1}{\mathcal{T}_1}(r) \leq x_1^{der}(\vec{x}(r))»$$

se sigue de todo ello que para todo $r \in [\text{mín.}\{r^{L_M}, r^{H'_2}\}, \text{máx.}\{r^{L_M}, r^{H'_2}\}]$ son válidas las desigualdades:

$$\left.\begin{array}{l} «x_1^{izq}(\vec{x}(r)) \leq \overset{-1}{\mathcal{T}_1}(r) \leq x_1^U < x_1(r) < x_1^{der}(\vec{x}(r))» \text{ [En } (^2)^*] \\ «x_1^{izq}(\vec{x}(r)) < x_1(r) < x_1^U \leq \overset{-1}{\mathcal{T}_1}(r) \leq x_1^{der}(\vec{x}(r))» \text{ [En } (^2)^{**}] \end{array}\right\}$$

y si $r \in [\text{mín.}\{r^{L_M}, r^{H'_2}\}, \text{máx.}\{r^{L_M}, r^{H'_2}\}] - \{r^{H'_2}\}$, entonces es:

$$\left.\begin{array}{l} «x_1(r) \geq x_1(r^{L_M}) > x_1(r^{K'_2}) = x_1^U = x_1^{H_2} = \overset{-1}{\mathcal{T}_1}(r^{H'_2}) > \overset{-1}{\mathcal{T}_1}(r)» \text{ [En } (^2)^*] \\ «x_1(r) \leq x_1(r^{L_M}) < x_1(r^{K'_2}) = x_1^U = x_1^{H_2} = \overset{-1}{\mathcal{T}_1}(r^{H'_2}) < \overset{-1}{\mathcal{T}_1}(r)» \text{ [En } (^2)^{**}] \end{array}\right\}$$

lo que entraña:

$$\left.\begin{array}{l} «x_1^{izq}(\vec{x}(r)) \leq \overset{-1}{\mathcal{T}_1}(r) < x_1^U < x_1(r) < x_1^{der}(\vec{x}(r))» \text{ [En } (^2)^*] \\ «x_1^{izq}(\vec{x}(r)) < x_1(r) < x_1^U < \overset{-1}{\mathcal{T}_1}(r) \leq x_1^{der}(\vec{x}(r))» \text{ [En } (^2)^{**}] \end{array}\right\}$$

Así pues, en los dos subcasos $(^2)^*$ y $(^2)^{**}$, para todo $r \in [\text{mín.}\{r^{L_M}, r^{H'_2}\}, \text{máx.}\{r^{L_M}, r^{H'_2}\}]$, se verifica:

$$«x_1^U \in [x_1^{izq}(\vec{x}(r)), x_1^{der}(\vec{x}(r))]»$$

y para todo $r \in [\text{mín.}\{r^{L_M}, r^{H'_2}\}, \text{máx.}\{r^{L_M}, r^{H'_2}\}] - \{r^{H'_2}\}$, se tiene:

$$«x_1^U \in]x_1^{izq}(\vec{x}(r)), x_1^{der}(\vec{x}(r))[»$$

Las dos últimas relaciones obtenidas establecen la validez de las relaciones:

$$\left.\begin{array}{l} «(\forall r)(r \in [\text{mín.}\{r^{L_M}, r^{H'_2}\}, \text{máx.}\{r^{L_M}, r^{H'_2}\}] \Rightarrow (x_1^U, x_1(r), x_2(r)) \in \mathcal{A}')» \\ «(\forall r)\ (r \in [\text{mín.}\ \{r^{L_M}, r^{H'_2}\}, \text{máx.}\ \{r^{L_M}, r^{H'_2}\}] - \{r^{H'_2}\} \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow (x_1^U, x_1(r), x_2(r)) \in \mathcal{A})» \end{array}\right\} \quad (13^{VI})$$

Por otra parte, para todo $r \in [\text{mín.}\{r^{L_M}\ r^{K'_2}\}, \text{máx.}\{r^{L_M}\ r^{K'_2}\}]$ se verifica:

$$\left.\begin{array}{l} «x_1(r) \geq x_1(r^{K'_2}) = x_1^U > x_1^M» \text{ [En } (^2)^*] \\ «x_1(r) \leq x_1(r^{K'_2}) = x_1^U < x_1^M» \text{ [En } (^2)^{**}] \end{array}\right\}$$

y dado que para todo $r \in [\text{mín.}\ \{r^{L_M}, r^{K'_2}\},\ \text{máx.}\ \{r^{L_M}, r^{K'_2}\}] \subset [\text{mín.}\ \{r^{L_M}, r^{P_M}\},\ \text{máx.}\{r^{L_M}, r^{P_M}\}] = \mathcal{T}_2\,([\text{mín.}\ \{x_2{}^M, x_2{}^{P_M}\},\ \text{máx.}\{x_2{}^M\ x_2{}^{P_M}\}])$, se tiene:

$$«\, r = \mathcal{T}_2\,(\overset{-1}{\mathcal{T}_2}\,(r)) = h_c\,(x_1{}^M, \overset{-1}{\mathcal{T}_2}\,(r))\, »$$

y, consecuentemente, es válida la relación:

$$«\, x_1{}^{izq}\,(\vec{x}\,(r)) \leq x_1{}^M \leq x_1{}^{der}\,(\vec{x}\,(r))\, »$$

se deduce de todo ello, que:

$$\left.\begin{array}{l} «\, x_1{}^{izq}\,(\vec{x}\,(r)) \leq x_1{}^M < x_1{}^U \leq x_1\,(r) < x_1{}^{der}\,(\vec{x}\,(r))\, »\ [\text{En}\ (^2)^*] \\ «\, x_1{}^{izq}\,(\vec{x}\,(r)) < x_1\,(r) \leq x_1{}^U < x_1{}^M \leq x_1{}^{der}\,(\vec{x}\,(r))\, »\ [\text{En}\ (^2)^{**}] \end{array}\right\}$$

es decir, para todo $r \in [\text{mín.}\ \{r^{L_M}, r^{K'_2}\},\ \text{máx.}\ \{r^{L_M}, r^{K'_2}\}]$, se verifica en los dos subcasos:

$$«\, x_1{}^U \in]\, x_1{}^{izq}\,(\vec{x}\,(r)),\ x_1{}^{der}\,(\vec{x}\,(r))[\, »$$

lo que entraña la validez de la relación:

$$«(\forall r)\,(r \in [\text{mín.}\{r^{L_M}, r^{K'_2}\},\ \text{máx.}\{r^{L_M}, r^{K'_2}\}] \Rightarrow (x_1{}^U, x_1(r), x_2(r)) \in \mathfrak{A})» \quad (13^{VI*})$$

De (13^{VI}) y (13^{VI*}), habida cuenta (13^{V**}), se deduce que son válidas las relaciones:

$$\left.\begin{array}{l} «(\forall r)\ (r \in [\text{mín.}\ \{r^{H'_2}, r^{K'_2}\},\ \text{máx.}\ \{r^{H'_2}, r^{K'_2}\}] \Rightarrow (x_1{}^U, x_1\,(r), x_2\,(r)) \in \mathfrak{A}')» \\ «(\forall r)\ (r \in]\text{mín.}\ \{r^{H'_2}, r^{K'_2}\},\ \text{máx.}\ \{r^{H'_2}, r^{K'_2}\{[\ \Rightarrow (x_1{}^U, x_1\,(r), x_2\,(r)) \in \mathfrak{A})» \end{array}\right\}$$

por lo que está definida la aplicación compuesta:

$$r \in [\text{mín.}\ \{r^{H'_2}, r^{K'_2}\},\ \text{máx.}\ \{r^{H'_2}, r^{K'_2}\}] \to \sigma\,(r) = \mu\,(x_1{}^U, x_1\,(r), x_2\,(r)) \in \mathbf{R}»$$

la cual es derivable sobre su intervalo de definición, con derivada > 0 para todo r de dicho intervalo, y por tanto, continua y estrictamente creciente sobre $[\text{mín.}\ \{r^{H'_2}, r^{K'_2}\},\ \text{máx.}\ \{r^{H'_2}, r^{K'_2}\}]$, y verifica además, como consecuencia de la segunda de las relaciones precedentes, que:

$$«\ (\forall r)\ (r \in]\ \text{mín.}\ \{r^{H'_2}, r^{K'_2}\},\ \text{máx.}\ \{r^{H'_2}, r^{K'_2}\}[\ \Rightarrow (x_1{}^U, \sigma\,(r)) \in G)\ »$$

y puesto que:

$$«\sigma(r^{H'_2}) = x_2^{H_2} \text{ y } \sigma(r^{K'_2}) = x_2^{K'_2}»$$

y en consecuencia:

$$«\sigma([\text{mín.}\{r^{H'_2}, r^{K'_2}\}, \text{máx.}\{r^{H'_2}, r^{K'_2}\}]) = [\text{mín.}\{x_2^{H_2}, x_2^{K'_2}\}, \text{máx.}\{x_2^{H_2}, x_2^{K'_2}\}]»$$

se sigue (habida cuenta que $x_2^U \in]\text{ mín. } \{x_2^{H_2}, x_2^{K'_2}\}, \text{ máx. } \{x_2^{H_2}, x_2^{K'_2}\}[$), que existe por tanto un único $r \in]\text{ mín.}\{r^{H'_2}, r^{K'_2}\}, \text{máx.}\{r^{H'_2} r^{K'_2}\}[\subset]r^A, r^B[$, tal que:

$$«(x_1^U, x_1(r), x_2(r)) \in \mathfrak{A} \text{ y } (x_1^U, x_2^U) = (x_1^U, \sigma(r)) \in G \text{ y } x_2^U = \sigma(r) = \\ = \lambda(x_1^U, x_1(r), x_2(r))»$$

resultando ser válida la relación:

$$«U = (x_1^U, x_2^U) \in G \text{ y } (\exists r)\,(r \in]\,r^A, r^B[\text{ y } (x_1^U, x_1(r), x_2(r)) \in \mathfrak{A} \text{ y } x_2^U = \\ = \lambda(x_1^U, x_1(r), x_2(r)))»$$

o lo que es equivalente:

$$«U = (x_1^U, x_2^U) \in \mathcal{E}_c^a»$$

Así pues, en todos los subcasos en que se desdobla el caso 1.º), así como en todos los que se desdobla el caso 1'º), se ha establecido que para todo $M \in D_c - C$, se verifica que:

$$«(\forall U)\,(U \in \overset{\circ}{\widehat{\triangle MP_M Q_M}} \Rightarrow U \in \mathcal{E}_c^a)»$$

es decir:

$$«\overset{\circ}{\widehat{\triangle MP_M Q_M}} \subset \mathcal{E}_c^a» \quad (13^{VI**})$$

Análogamente, y mediante razonamiento idéntico al utilizado en los casos 1.º), 1'º), se probaría en los casos 2.º), 2'º); 3.º), 3'º); 4.º), 4'º), que para todo $M \in D_c - C$ es válida la relación (13^{VI**}).

Ahora bien, si $M \in D_c - C$, denotando para todo $U \in \overset{\circ}{\widehat{\triangle MP_M Q_M}}$ por P_U y Q_U, respectivamente, a los puntos de C: $(x_1^U, x_2(\overset{-1}{x_1}(x_1^U)))$, $(\overset{-1}{x_1}(x_2(x_2^U)), x_2^U)$, se verifica que:

$$\left.\begin{array}{c} «(\forall V)\,(V \in \overline{UP_U} - \{P_U\} \Rightarrow V \in \overset{\circ}{\widehat{\triangle MP_M Q_M}} \subset \mathcal{E}_c^a)» \\ \text{y} \\ «(\forall W)\,(W \in \overline{UQ_U} - \{Q_U\} \Rightarrow W \in \overset{\circ}{\widehat{\triangle MP_M Q_M}} \subset \mathcal{E}_c^a)» \end{array}\right\}$$

y dado que: $r^{P_U} \in \,]\text{mín.}\,\{r^{P_M}, r^{Q_M}\}, \text{máx.}\,\{r^{P_M}, r^{Q_M}\}\,[\, \subset \,]\, r^A, r^B[$ y $r^{Q_U} \in \,]\,\text{mín.}\,\{r^{P_M}, r^{Q_M}\}, \ \text{máx.}\,\{r^{P_M}, r^{Q_M}\}\,[\,\subset\,]\, r^A, r^B[$ lo que entraña:

$$\left.\begin{array}{c} «(x_1(r^{P_U}), x_2(r^{P_U})) = P_U \in C - \{A, B\} \subset \mathcal{E}_c^a» \\ \text{y} \\ «(x_1(r^{Q_U}), x_2(r^{Q_U})) = Q_U \in C - \{A, B\} \subset \mathcal{E}_c^a» \end{array}\right\}$$

se deduce de todo ello, que:

$$«\overline{UP_U} \subset \mathcal{E}_c^a \text{ y } \overline{UQ_U} \subset \mathcal{E}_c^a»$$

En resumen, poniendo para todo $U \in \overset{\circ}{\widehat{\triangle MP_MQ_M}}$: $r_1 = \overset{-1}{x_1}(x_1{}^U) \in \,]\text{mín.}\,\{r^{P_M}, r^{Q_M}\}, \text{máx.}\,\{r^{P_M}, r^{Q_M}\}[\,\subset\,]\, r^A, r^B[$ y $r_2 = \overset{-1}{x_2}(x_2{}^U) \in]\,\text{mín.}\,\{r^{P_M}, r^{Q_M}\}$, $\text{máx.}\,\{r^{P_M}, r^{Q_M}\}\,[\,\subset\,]\, r^A, r^B[$, se verifica en el supuesto $M \in D_c - C$, la relación:

$$«(\forall U)\ (U \in \overset{\circ}{\widehat{\triangle MP_MQ_M}} \Rightarrow (\exists\ (r_1, r_2))\ ((r_1, r_2) \in]\, r^A, r^B\,[\times]\, r^A, r^B\,[\text{y } x_1{}^U =$$
$$= x_1(r_1) \text{ y } x_2{}^U = x_2(r_2) \text{ y } \bigcup_{v\in[0,1]} \{(x_1{}^U, (1 - v).\, x_2{}^U + v \cdot x_2(r_1))\} \subset \mathcal{E}_c^a \text{ y}$$
$$\text{y } \bigcup_{v\in[0,1]} \{((1 - v).\, x_1{}^U + v \cdot x_1(r_2), x_2{}^U)\} \subset \mathcal{E}_c^a))»$$

es decir:

$$«(\forall U)\ (U \in \overset{\circ}{\widehat{\triangle MP_MQ_M}} \Rightarrow U \in D_c^a)»$$

relación equivalente a:

$$«\overset{\circ}{\widehat{\triangle MP_MQ_M}} \subset D_c^a»$$

Por otra parte, en el supuesto de ser como hasta ahora $M \in D_c - C$, se verifica que $\triangle MP_MQ_M$ es cerrado en $\mathbf{R}^2$, y consecuentemente:

$$«\triangle MP_MQ_M = \overset{\circ}{\widehat{\triangle MP_MQ_M}} \cup \text{Fr.}\ (\triangle MP_MQ_M) = \overset{\circ}{\widehat{\triangle MP_MQ_M}} \cup \overline{MP_M} \cup$$
$$\cup\ \widehat{P_MQ_M} \cup \overline{MQ_M}» \quad (13^{VII})$$

Pero:

$$\left.\begin{array}{c} «\overset{\circ}{\widehat{\triangle MP_MQ_M}} \subset D_c^a \subset D_c» \\ \text{y} \\ «\widehat{P_MQ_M} \subset C \subset D_c» \end{array}\right\} (13^{VII*})$$

y además, para todo $H \in \overline{MP_M}$, si denotamos por $P_H = P_M$ y Q_H, las trazas con C de las paralelas a Ox_2 y Ox_1, respectivamente, pasando por H, se tiene que:

$$\left.\begin{array}{c}
«\overline{HP_H} = \overline{HP_M} \subset \overline{MP_M} \subset \mathcal{E}_c» \\
\text{y} \\
«(\forall U)\ (U \in \overline{HQ_H} - \{H, Q_H\} \Rightarrow U \in \overset{\circ}{\widehat{\triangle MP_M Q_M}} \subset \mathcal{E}_c^a \subset \mathcal{E}_c)» \\
\text{y} \\
«H \in \mathcal{E}_c» \\
\text{y} \\
«Q_H \in C \subset \mathcal{E}_c»
\end{array}\right\}$$

por lo que:

$$«\overline{HP_H} \subset \mathcal{E}_c \text{ y } \overline{HQ_H} \subset \mathcal{E}_c»$$

es decir:

$$«H \in D_c»$$

y en consecuencia, dada, la arbitrariedad de $H \in \overline{MP_M}$, se verifica que:

$$«\overline{MP_M} \subset D_c»$$

Análogamente se probaría que:

$$«\overline{MQ_M} \subset D_c»$$

resultados que junto con (13^{VII}) y (13^{VII*}) establecen, que:

$$«\triangle MP_M Q_M \subset D_c»$$

Resulta así demostrado el TEOREMA I en todas sus partes.

Señalemos que para todo $M \in D_c - C$, se tiene como consecuencia del TEOREMA, que $M \in \overline{\overset{\circ}{\widehat{\triangle MP_M Q_M}}} \subset \overline{D_c^a}$.

Del TEOREMA I acabado de establecer se deducen los:

COROLARIO I. — «El conjunto cerrado D_c es la adherencia $\overline{D_c^a}$ del conjunto abierto D_c^a».

y

COROLARIO II. — «El interior $\mathring{D}_c$ del conjunto cerrado D_c coincide con el conjunto abierto D_c^a».

En efecto, en primer lugar se tiene:

$$«\overline{D_c^a} \subset \overline{D_c} = D_c» \quad (13^{VII**})$$

y por otra parte:

$$«(\forall M)\ (M \in D_c \Leftrightarrow (M \in C)\ \text{ó}\ (M \in D_c - C))»$$

Pero:

$$\left.\begin{array}{c} «M \in C = \overline{C - \{A, B\}} \subset \overline{D_c^a}» \\ \text{y} \\ «M \in D_c - C \Rightarrow M \in \overline{D_c^a}» \end{array}\right\}$$

por lo que es válida la relación:

$$«(\forall M)\ (M \in D_c \Rightarrow M \in \overline{D_c^a})»$$

o lo que es equivalente:

$$«D_c \subset \overline{D_c^a}»$$

relación que junto con la (13^{VII**}) establece:

$$«D_c = \overline{D_c^a}»$$

lo que demuestra la veracidad del COROLARIO I.

Para establecer la validez del COROLARIO II, observemos que primeramente se tiene:

$$«D_c^a = \mathring{D}_c^a \subset \mathring{D}_c» \quad (13^{VII***})$$

y por otro lado:

$$«(\forall M^*)(M^* \in \mathring{D}_c \Rightarrow [(M^* \in \mathring{D}_c\ \text{y}\ M^* \in C)\ \text{ó}\ (M^* \in \mathring{D}_c\ \text{y}\ M^* \in D_c - C)])» \quad (13^{VIII})$$

Pero:

$$\left.\begin{array}{c} «A \in \text{Fr.}\ (R_{AB}) = \overline{R_{AB}} \cap \overline{\complement_{\mathbf{R}^2} R_{AB}}\ \text{ y }\ B \in \text{Fr.}\ (R_{AB}) = \overline{R_{AB}} \cap \overline{\complement_{\mathbf{R}^2} R_{AB}}» \\ \text{y} \\ «(D_c \subset R_{AB}) \Leftrightarrow (\complement_{\mathbf{R}^2} R_{AB} \subset \complement_{\mathbf{R}^2} D_c)» \end{array}\right\}$$

por lo que:

$$\left.\begin{array}{c}«(\forall\varrho)\ (\varrho \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \Rightarrow \phi \neq B\varrho\,(A) \cap \underset{\mathbf{R}^2}{\complement} R_{AB} \subset B\varrho(A) \cap \underset{\mathbf{R}^2}{\complement} D_c)» \\ \text{y} \\ «(\forall\sigma)\ (\sigma \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \Rightarrow \phi \neq B\sigma\,(B) \cap \underset{\mathbf{R}^2}{\complement} R_{AB} \subset B\sigma(B) \cap \underset{\mathbf{R}^2}{\complement} D_c)»\end{array}\right\}$$

y consecuentemente:

$$«A \notin \mathring{D}_c \text{ y } B \notin \mathring{D}_c»$$

De ello se deduce que:

$$«M^* \in \mathring{D}_c \text{ y } M^* \in C \Rightarrow M^* \in C - \{A, B\} \subset D_c^a» \quad (13^{VIII*})$$

El caso $M^* = \vec{x}^{M*} = (x_1{}^{M*}, x_2{}^{M*}) \in \mathring{D}_c$ y $M^* \in D_c - C$, se desdobla en los subcasos siguientes:

$$1.^{\text{o}})\ x'_1 > 0 \text{ y } x'_2 > 0 \text{ sobre } [r^A, r^B] \text{ y } \left\{\begin{array}{c} 1.^{\text{o}})'\ \ x_1{}^{M*} > x_1{}^{Q_M*} \\ \text{ó} \\ 1.^{\text{o}})''\ \ x_1{}^{M*} < x_1{}^{Q_M*}\end{array}\right\}$$

$$2.^{\text{o}})\ x'_1 > 0 \text{ y } x'_2 < 0 \text{ sobre } [r^A, r^B] \text{ y } \left\{\begin{array}{c} 2.^{\text{o}})'\ \ x_1{}^{M*} > x_1{}^{Q_M*} \\ \text{ó} \\ 2.^{\text{o}})''\ \ x_1{}^{M*} < x_1{}^{Q_M*}\end{array}\right\}$$

$$3.^{\text{o}})\ x'_1 < 0 \text{ y } x'_2 > 0 \text{ sobre } [r^A, r^B] \text{ y } \left\{\begin{array}{c} 3.^{\text{o}})'\ \ x_1{}^{M*} > x_1{}^{Q_M*} \\ \text{ó} \\ 3.^{\text{o}})''\ \ x_1{}^{M*} < x_1{}^{Q_M*}\end{array}\right\}$$

$$4.^{\text{o}})\ x'_1 < 0 \text{ y } x'_2 < 0 \text{ sobre } [r^A, r^B] \text{ y } \left\{\begin{array}{c} 4.^{\text{o}})'\ \ x_1{}^{M*} > x_1{}^{Q_M*} \\ \text{ó} \\ 4.^{\text{o}})''\ \ x_1{}^{M*} < x_1{}^{Q_M*}\end{array}\right\}$$

Consideremos el subcaso:

$$«x'_1 > 0 \text{ y } x'_2 > 0 \text{ sobre } [r^A, r^B] \text{ y } x_1{}^{M*} > x_1{}^{Q_M*}» \quad [1.^{\text{o}}) \text{ y } 1.^{\text{o}})']$$

Puesto que:

$$\left.\begin{array}{c}«P_{M*} = (x_1{}^{P_M*}, x_2{}^{P_M*}) = (x_1{}^{M*}, x_2(\overset{-1}{x_1}(x_1{}^{M*}))) = (x_1(\overset{-1}{x_1}(x_1{}^{M*})), x_2(\overset{-1}{x_1}(x_1{}^{M*})))» \\ \text{y} \\ «Q_{M*} = (x_1{}^{Q_M*}, x_2{}^{Q_M*}) = (x_1(\overset{-1}{x_2}(x_2{}^{M*})), x_2{}^{M*}) = (x_1(\overset{-1}{x_2}(x_2{}^{M*})), x_2(\overset{-1}{x_2}(x_2{}^{M*})))»\end{array}\right\}$$

poniendo: $r^{P_{M^*}} = \overset{-1}{x_1}(x_1^{M^*}) \in [r^A, r^B]$ y $r^{Q_{M^*}} = \overset{-1}{x_2}(x_2^{M^*}) \in [r^A, r^B]$, se tiene:

$$«(r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}) \in [r^A, r^B] \times [r^A, r^B] \text{ y } P_{M^*} = (x_1^{P_{M^*}}, x_2^{P_{M^*}}) = (x_1(r^{P_{M^*}}), x_2(r^{P_{M^*}})) \text{ y}$$

$$\text{y } Q_{M^*} = (x_1^{Q_{M^*}}, x_2^{Q_{M^*}}) = (x_1(r^{Q_{M^*}}), x_2(r^{Q_{M^*}})) \text{ y } x_1^{M^*} = x_1^{P_{M^*}} =$$
$$= x_1(r^{P_{M^*}}) > x_1(r^{Q_{M^*}}) = x_1^{Q_{M^*}}»$$

de lo que, habida cuenta el crecimiento estricto de las funciones $\overset{-1}{x_1}: [x_1^A, x_1^B] \to [r^A, r^B]$ y $r \in [r^A, r^B] \to x_2(r) \in [x_2^A, x_2^B]$, se deduce sucesivamente:

$$\left.\begin{array}{c} « r^{P_{M^*}} > r^{Q_{M^*}} » \\ \text{y} \\ « x_2^{P_{M^*}} = x_2(r^{P_{M^*}}) > x_2(r^{Q_{M^*}}) = x_2^{Q_{M^*}} = x_2^{M^*} » \end{array}\right\}$$

Por otra parte, dado que $\vec{x}^{M^*} = M^* \in \overset{\circ}{D}_c$, se puede poner:

$$« (\exists \varrho') (\varrho' \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \text{ y } B_{\varrho'}(\vec{x}^{M^*}) \subset D_c) »$$

así como, teniendo en cuenta que las aplicaciones $pr_1: R_{AB} \to \mathbf{R}$, $pr_2: R_{AB} \to \mathbf{R}$, $x_1 \circ \overset{-1}{x_2} \circ pr_2: R_{AB} \to \mathbf{R}$ y $x_2 \circ \overset{-1}{x_1} \circ pr_1: R_{AB} \to \mathbf{R}$ son continuas, y además se tiene:

$$\left.\begin{array}{c} «x_1^{M^*} = pr_1(\vec{x}^{M^*}) > (x_1 \circ \overset{-1}{x_2} \circ pr_2)(\vec{x}^{M^*}) = x_1(\overset{-1}{x_2}(x_2^{M^*})) = x_1(r^{Q_{M^*}}) = x_1^{Q_{M^*}}» \\ \text{y} \\ «x_2^{P_{M^*}} = x_2(r^{P_{M^*}}) = x_2(\overset{-1}{x_1}(x_1^{M^*})) = (x_2 \circ \overset{-1}{x_1} \circ pr_1)(\vec{x}^{M^*}) > pr_2(\vec{x}^{M^*}) = x_2^{M^*}» \end{array}\right\}$$

es válida, consecuentemente, la relación:

$$«(\exists \varrho'') (\varrho'' \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \text{ y } (\forall \vec{x}^M)(\vec{x}^M \in B_{\varrho''}(\vec{x}^{M^*}) \cap R_{AB} \Rightarrow x_1^M =$$
$$= pr_1(\vec{x}^M) > (x_1 \circ \overset{-1}{x_2} \circ pr_2)(\vec{x}^M) = x_1(\overset{-1}{x_2}(x_2^M)) = x_1^{Q_M} \text{ y } x_2^{P_M} =$$
$$= x_2(\overset{-1}{x_1}(x_1^M)) = (x_2 \circ \overset{-1}{x_1} \circ pr_1)(\vec{x}^M) > pr_2(\vec{x}^M) = x_2^M))»$$

por lo que haciendo $\varrho = \text{mín.}\{\varrho', \varrho''\} \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$, [habida cuenta que se tiene $B_\varrho(\vec{x}^{M^*}) \subset B_{\varrho'}(\vec{x}^{M^*}) \subset D_c \subset R_{AB}$ y $B_\varrho(\vec{x}^{M^*}) \subset B_{\varrho''}(\vec{x}^{M^*})$], es válida, por consiguiente, la relación: $«(\exists \varrho)(\varrho \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \text{ y } B_\varrho(\vec{x}^{M^*}) \subset$
$\subset D_c \text{ y } (\forall \vec{x}^M)(\vec{x}^M \in B_\varrho(\vec{x}^{M^*}) \Rightarrow x_1^M > x_1^{Q_M} \text{ y } x_2^{P_M} > x_2^M))»$

Sea ahora, $M = \vec{x}^M = (x_1^M, x_2^M) = \left(x_1^{M^*} + \frac{\sqrt{2}}{4}\varrho,\ x_2^{M^*} - \frac{\sqrt{2}}{4}\varrho\right)$;

se verifica:

$$«\vec{x}^M \in B_{\varrho}(\vec{x}^{M*}) \text{ y } x_1^M > x_1^{M*} \text{ y } x_2^{M*} > x_2^M»$$

lo que entraña:

$$«\vec{x}^M \in D_c \text{ y } x_1^M > x_1^{Q_M} \text{ y } x_2^{P_M} > x_2^M \text{ y } x_1^M > x_1^{M*} \text{ y } x_2^{M*} > x_2^M»$$

es decir:

$$«M = \vec{x}^M \in D_c - C \text{ y } x_1^M > x_1^{M*} \text{ y } x_2^{M*} > x_2^M»$$

y puesto que el interior $\overset{\circ}{\overparen{\triangle MP_MQ_M}}$ del triángulo mixtilíneo $\triangle MP_MQ_M$ es el subconjunto de $\mathbf{R}^2$:

$$«\overset{\circ}{\overparen{\triangle MP_MQ_M}} = \{M' = (x_1^{M'}, x_2^{M'}) \in \mathbf{R}^2 / x_1^M > x_1^{M'} \text{ y } x_2^{M'} > x_2^M \text{ y}$$
$$\text{y } x_1^{M'} > x_1^{Q_{M'}} = x_1(\overset{-1}{x_2}(x_2^{M'}))\}»$$

y además, en virtud de las relaciones anteriores (así como de la hipótesis $x_1^{M*} > x_1^{Q_{M*}}$), se tiene:

$$«M \in D_c - C \text{ y } x_1^M > x_1^{M*} \text{ y } x_2^{M*} > x_2^M \text{ y } x_1^{M*} > x_1^{Q_{M*}} = x_1(\overset{-1}{x_2}(x_2^{M*}))»$$

se concluye, por tanto:

$$«M \in D_c - C \text{ y } M^* \in \overset{\circ}{\overparen{\triangle MP_MQ_M}}»$$

lo que, habida cuenta el TEOREMA precedente, entraña:

$$«M^* \in D_c^a»$$

Similarmente, se establecería en el subcaso [1.º) y 1.º)''] la validez de la relación:

$$«M^* \in D_c^a»$$

De modo enteramente análogo se demuestra, en los restantes casos 2.º), 3.º) y 4.º), la veracidad de la relación:

$$«M^* \in \overset{\circ}{D}_c \text{ y } M^* \in D_c - C \Rightarrow M^* \in D_c^a»$$

que junto con las (13^{VIII}) y (13^{VIII*}) establece la validez de la:

$$\text{«} (\forall M^*)\ (M^* \in \mathring{D}_c \Rightarrow M^* \in D_c{}^a) \text{»}$$

o lo que es equivalente:

$$\text{«} \mathring{D}_c \subset D_c{}^a \text{»}$$

relación que combinada con la (13^{VII***}) da lugar a la:

$$\text{«} \mathring{D}_c = D_c{}^a \text{»}$$

de acuerdo con lo afirmado en el COROLARIO II.

NOTA. — Si $M \in D_c - C$, el TEOREMA I asegura que $\overset{\circ}{\overparen{\triangle MP_MQ_M}} \subset \mathring{D}_c$; ahora bien en el supuesto de verificarse $M \in \mathring{D}_c - C \subset D_c - C$, son válidas (como se comprueba inmediatamente), las inclusiones $\overline{MP_M} \subset \mathring{D}_c$, $\overparen{P_MQ_M} \subset \mathring{D}_c$ y $\overline{MQ_M} \subset \mathring{D}_c$, lo que entraña, consecuentemente, que $\triangle MP_MQ_M = \overset{\circ}{\overparen{\triangle MP_MQ_M}} \cup \overline{MP_M} \cup \overparen{P_MQ_M} \cup \overline{MQ_M} \subset \mathring{D}_c$, es decir, dada la arbitrariedad de $M \in \mathring{D}_c - C$, es válida, por tanto, la relación:

$$(\forall M)\ (M \in \mathring{D}_c - C \Rightarrow \triangle MP_MQ_M \subset \mathring{D}_c).$$

Es válido, además, el:

TEOREMA II. — «Con las hipótesis y notaciones del TEOREMA I, se verifica que para todo $M \in D_c$ (resp. $M \in \mathring{D}_c = D_c{}^a$), está contenido en D_c (resp. está contenido en $\mathring{D}_c$), el arco de curva integral $\mathcal{L}(\vec{x}^M)$ de la ecuación diferencial ordinaria $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho\,(x_1, x_2)$ pasando por M y limitado por dicho punto M y el de intersección L^M del arco C con la referida curva integral $\mathcal{L}(\vec{x}^M)$», o formulado simbólicamente:

$$\text{«} (\forall M)\ (M \in D_c \Rightarrow \bigcup_{t \in [\min\{x_1{}^M, x_1(rL_M)\}, \max\{x_1{}^M, x_1(rL_M)\}]} \{(t, \mu\,(t, x_1{}^M, x_2{}^M))\} \subset D_c) \text{»} \quad (14)$$

$$[\text{resp. «} (\forall M)\ (M \in \mathring{D}_c \Rightarrow \bigcup_{t \in [\min\{x_1{}^M, x_1(rL_M)\}, \max\{x_1{}^M, x_1(rL_M)\}]} \{(t, \mu\,(t, x_1{}^M, x_2{}^M))\} \subset \mathring{D}_c) \text{»} \quad (14')]$$

Para probar dicho TEOREMA procederemos, igual que en la demostración del TEOREMA I, desdoblando el caso general en los casos 1.º), 1'º); 2.º), 2'º); 3.º), 3'º); 4.º, 4'º) allí considerados.

Previamente observemos que si $M \in C$ (resp. $M \in C - \{A, B\}$), trivialmente se verifica (14), [resp. se verifica (14')], por lo que supondremos a lo largo de la demostración $M \in D_c - C$ [resp. $M \in \mathring{D}_c - (C - \{A, B\}) = \mathring{D}_c - C$]. Además, en virtud de la propia definición de $\mathcal{E}_c$ (resp. de $\mathcal{E}_c{}^a$), se tiene $\bigcup\limits_{t \in [\text{mín}\{x_1{}^M, x_1(r^{L_M})\}, \text{máx}\}x_1{}^M, x_1(r^{L_M})\}]} \{(t, \mu\,(t, x_1{}^M, x_2{}^M))\} \subset \mathcal{E}_c$ [resp. se tiene: $\bigcup\limits_{t \in [\text{mín}\{x_1{}^M, x_1(r^{L_M})\}, \text{máx}\{x_1{}^M, x_1(r^{L_M})\}]} \{(t, \mu\,(t, x_1{}^M, x_2{}^M))\} \subset \mathcal{E}_c{}^a$].

Refiriéndonos al caso 1.º), se tiene para el subcaso 1^α), como se ha visto precedentemente, que la aplicación $x_2 \in [\text{mín.}\ \{x_2{}^M, x_2{}^{P_M}\}, \text{máx.}\ \{x_2{}^M, x_2{}^{P_M}\}] \to \mathcal{T}_2\,(x_2) = h_c\,(x_1{}^M, x_2) \in \mathbf{R}$, es continua y estrictamente monótona sobre su intervalo de definición, verificándose, además que: $\mathcal{T}_2\,([\text{mín.}\{x_2{}^M, x_2{}^{P_M}\}, \text{máx.}\{x_2{}^M, x_2{}^{P_M}\}]) = [\text{mín.}\{r^{L_M}, r^{P_M}\}, \text{máx.}\ \{r^{L_M}, r^{P_M}\}]$, es decir:

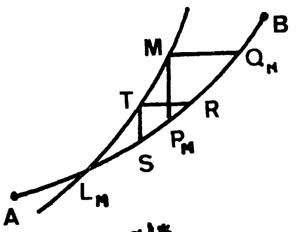
$$\text{«}(\forall r)\ (r \in [\text{mín.}\{r^{L_M}, r^{P_M}\}, \text{máx.}\{r^{L_M}, r^{P_M}\}] \Rightarrow (\exists x_2)(x_2 \in [\text{mín.}\{x_2{}^M, x_2{}^{P_M}\}, \text{máx.}\ \{x_2{}^M, x_2{}^{P_M}\}] \text{ y } r = \mathcal{T}_2\,(x_2) = h_c\,(x_1{}^M, x_2)))\text{»} \quad (14'')$$

así como:

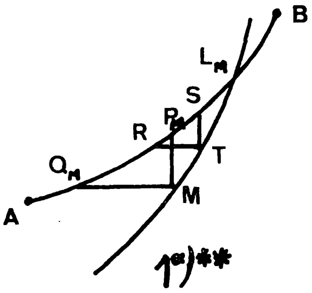
$$\left.\begin{array}{l} r^{L_M} < r^{P_M} \ [\text{En } 1^\alpha)^*] \\ r^{L_M} > r^{P_M} \ [\text{En } 1^\alpha)^{**}] \end{array}\right\} \quad (14''')$$

Ahora bien, en virtud de (11^{XII*}) del n.º 9, la relación $r = h_c\,(x_1{}^M, x_2)$, entraña: $x_1{}^{izq}\,(\vec{x}\,(r)) \leq x_1{}^M \leq x_1{}^{der}\,(\vec{x}\,(r))$», y consecuentemente, teniendo en cuenta (14''), se verifica:

$$\text{«}(\forall r)\ (r \in [\text{mín.}\ \{r^{L_M}, r^{P_M}\}, \text{máx.}\ \{r^{L_M}, r^{P_M}\}] \Rightarrow x_1{}^{izq}\,(\vec{x}\,(r)) \leq x_1{}^M \leq x_1{}^{der}\,(\vec{x}\,(r)))\text{»} \quad (14^{IV})$$



$1^\alpha)^*$



$1^\alpha)^{**}$

Sentado esto, sea $T = (x_1{}^T, x_2{}^T) = (t, \mu\,(t, x_1{}^M, x_2{}^M))$, con $t \in [\text{mín.}\ \{x_1\,(r^{L_M}), x_1{}^M\}, \text{máx.}\ \{x_1\,(r^{L_M}), x_1{}^M\}] - \{x_1{}^M\} \subset [\text{mín.}\ \{x_1\,(r^A),$

$x_1 (r^B)\}$, máx. $\{x_1 (r^A), x_1 (r^B)\}] - \{x_1^M\}$, y pongamos (Ver figuras correspondientes):

$r^S = \overset{-1}{x_1} (t)$ y $S = (x_1^S, x_2^S) = (x_1 (r^S), x_2(r^S)) = (t, x_2 (\overset{-1}{x_1} (t)))$. Se tiene, [habida cuenta (14''')]:

$$\left.\begin{array}{l} \text{«} r^{L_M} \leq r^S < r^{P_M} \text{ y } x_1^T = x_1 (r^S) < x_1 (r^{P_M}) = x_1^M \text{» [En } 1^\alpha)^*] \\ \text{«} r^{L_M} \geq r^S > r^{P_M} \text{ y } x_1^T = x_1 (r^S) > x_1 (r^{P_M}) = x_1^M \text{» [En } 1^\alpha)^{**}] \end{array}\right\} \quad (14^V)$$

Combinando (14^{IV}) y (14^V) se deduce la validez de las relaciones:

$$\left.\begin{array}{r} \text{«} (\forall r)\ (r \in [r^{L_M}, r^S] \Rightarrow x_1^{izq} (\vec{x} (r)) < x_1 (r) \leq x_1 (r^S) = x_1^T < x_1^M \leq \\ \leq x_1^{der} (\vec{x} (r))) \text{» [En } 1^\alpha)^*] \\ \text{«} (\forall r)\ (r \in [r^S, r^{L_M}] \Rightarrow x_1^{izq} (\vec{x} (r)) \leq x_1^M < x_1^T = x_1 (r^S) \leq x_1 (r) < \\ < x_1^{der} (\vec{x} (r))) \text{» [En } 1^\alpha)^{**}] \end{array}\right\}$$

las cuales entrañan que en todos los subcasos se verifique:

$$\text{«}(\forall r)\ (r \in [\text{mín.} \{r^S, r^{L_M}\}, \text{ máx.} \{r^S, r^{L_M}\}] \Rightarrow x_1^T \in]x_1^{izq} (\vec{x} (r)), x_1^{der} (\vec{x} (r))[)\text{»}$$

o lo que es equivalente:

$$\text{«}(\forall r)(r \in [\text{mín.} \{r^S, r^{L_M}\}, \text{ máx.} \{r^S, r^{L_M}\}] \Rightarrow (x_1^T, x_1 (r), x_2 (r)) \in \mathcal{A})\text{»} \quad (14^{V*})$$

y consecuentemente está definida la aplicación compuesta:

$$\text{«} r \in [\text{mín.} \{r^S, r^{L_M}\}, \text{ máx.} \{r^S, r^{L_M}\}] \to \sigma (r) = \lambda (x_1^T, x_1 (r), x_2 (r)) \in \mathbf{R} \text{»}$$

aplicación que verifica por tanto:

$$\text{«} (\forall r)\ (r \in [\text{mín.} \{r^S, r^{L_M}\}, \text{ máx.} \{r^S, r^{L_M}\}] \Rightarrow (x_1^T, \sigma (r)) \in G) \text{»} \quad (14^{V**})$$

y que además (en el supuesto $r^S \neq r^{L_M}$) es derivable sobre su intervalo de definición, con derivada (cuyo valor para cada $r \in [\text{mín.} \{r^S, r^{L_M}\}, \text{máx.} \{r^S, r^{L_M}\}]$ es igual a:

$$\exp. \left\{ \int_{x_1(r)}^{x_1^T} (D_2\, \varrho)\ (u, \lambda (u, x_1 (r), x_2 (r)))\ du \right\} . [x'_2(r) - \varrho (x_1 (r), x_2 (r))\ x'_1 (r)])$$

de signo constante, por lo que σ es continua y estrictamente mononona sobre $[\text{mín.} \{r^S, r^{L_M}\}, \text{ máx.} \{r^S, r^{L_M}\}]$.

Puesto que:

$$\left.\begin{array}{c} «\sigma(r^S) = \lambda(x_1{}^T, x_1(r^S), x_2(r^S)) = \lambda(x_1(r^S), x_1(r^S), x_2(r^S)) = x_2(r^S) = x_2{}^S» \\ \text{y} \\ «\sigma(r^{L_M}) = \lambda(x_1{}^T, x_1(r^{L_M}), x_2(r^{L_M})) = \lambda(x_1{}^T, x_1{}^M, x_2{}^M) = \mu(x_1{}^T, x_1{}^M, x_2{}^M) = x_2{}^T» \end{array}\right\}$$

se sigue que:

$$«\sigma([\text{mín}\,\{r^S, r^{L_M}\},\ \text{máx}\,\{r^S, r^{L_M}\}]) = [\text{mín}\,\{x_2{}^S, x_2{}^T\},\ \text{máx}\,\{x_2{}^S, x_2{}^T\}]»$$

y en consecuencia, (teniendo en cuenta además (14^{V*}) y (14^{V**}), es válida la relación:

$$\begin{gathered} «(\forall x_2)\ (x_2 \in]\ \text{mín}\ \{x_2{}^S, x_2{}^T\},\ \text{máx}\ \{x_2{}^S, x_2{}^T\}[\ \Rightarrow (x_1{}^T, x_2) \in G \text{ y} \\ \text{y } (\exists r)(r \in]\ \text{mín}\{r_2{}^S, r^{L_M}\},\ \text{máx}\{r^S, r^{L_M}\}[\ \subset\ ]r^A, r^B[\text{ y } (x_1{}^T, x_1(r), x_2(r)) \in \mathcal{A} \text{ y} \\ \text{y } x_2 = \sigma(r) = \lambda(x_1{}^T, x_1(r), x_2(r))))» \end{gathered}$$

la cual entraña:

$$«(\forall x_2)\ (x_2 \in]\ \text{mín}\ \{x_2{}^S, x_2{}^T\},\ \text{máx}\ \{x_2{}^S, x_2{}^T\}[\ \Rightarrow (x_1{}^T, x_2) \in \mathcal{E}_c{}^a)»$$

resultando, (dado que $(x_1{}^T, x_2{}^T) = T \in \mathcal{E}_c$ y $(x_1{}^T, x_2{}^S) = (x_1{}^S, x_2{}^S) = = S \in C \subset \mathcal{E}_c$), que es válida la relación:

$$\begin{gathered} «(\forall x_2)(x_2 \in [\text{mín}\,\{x_2{}^S, x_2{}^T\}, \text{máx}\,\{x_2{}^S, x_2{}^T\}] \Rightarrow (x_1{}^T, x_2) \in \mathcal{E}_c)», (\text{si } M \in D_c - C) \\ [\text{resp } «(\forall x_2)\ (x_2 \in [\text{mín}\ \{x_2{}^S, x_2{}^T\},\ \text{máx}\ \{x_2{}^S, x_2{}^T\}] \Rightarrow (x_1{}^T, x_2) \in \mathcal{E}_c{}^a)», \\ (\text{si } M \in \mathring{D}_c - C) \end{gathered}$$

(ya que el supuesto $M \in \mathring{D}_c - C$ se tiene que: $\bigcup\limits_{t \in [\text{mín}\{x_1(r^{L_M}), x_1{}^M\}, \text{máx}\{x_1(r^{L_M}), x_1{}^M\}]} \{(t, \mu(t, x_1{}^M, x_2{}^M))\} = \bigcup\limits_{t \in [\text{mín}\{x_1(r^{L_M}), x_1{}^M\}, \text{máx}\{x_1(r^{L_M}), x_1{}^M\}]} \{(t, \lambda(t, x_1{}^M, x_2{}^M))\} \subset \mathcal{E}_c{}^a$, y en particular, $(x_1{}^T, x_2{}^T) = T \in \mathcal{E}_c{}^a$, así como, por verificarse $(r^{L_M}, r^{P_M}) \in]r^A, r^B[\times]r^A, r^B[$, y consecuentemente $r^S \in]r^A, r^B[$, se tiene, por tanto: $(x_1(r^S), x_2(r^S)) = (x_1{}^S, x_2{}^S) = = S \in C - \{A, B\} \subset \mathcal{E}_c{}^a$)].

Poniendo $r_1 = r^S = \overset{-1}{x_1}(x_1{}^T) = \overset{-1}{x_1}(t)$, se tendrá: $r_1 \in [r^A, r^B]$, (si $M \in D_c - C$). [resp. se tendrá $r_1 \in]r^A, r^B[$, (si $M \in \mathring{D}_c - C$)], y el resultado obtenido se expresa como sigue:

$$«(\exists r_1)\ (r_1 \in [r^A, r^B] \text{ y } t = x_1(r_1) \text{ y } \bigcup_{\nu\in[0,1]} \{(t, (1-\nu)\cdot\mu(t, x_1{}^M, x_2{}^M) +$$

$$+ \nu \cdot x_2(r_1))\} \subset \mathcal{E}_c)», \text{ (si } M \in D_c - C) \quad (14^{VI})$$

$$[\text{resp. } «(\exists r_1)\ (r_1 \in]\, r^A, r^B[\text{ y } t = x_1(r_1) \text{ y } \bigcup_{\nu\in[0,1]} \{(t, (1-\nu)\cdot\mu(t, x_1{}^M, x_2{}^M) +$$

$$\nu \cdot x_2(r_1))\} \subset \mathcal{E}_c{}^a)» \text{ (si } M \in \mathring{D}_c - C)]$$

o más brevemente:

$$«\overline{TS} \subset \mathcal{E}_c», \text{ (si } M \in D_c - C) \ (14^{VI*}) \ [\text{resp. } «\overline{TS} \subset \mathcal{E}_c{}^a», \text{ (si } M \in \mathring{D}_c - C)]$$

Por otra parte, observemos previamente, que en todos los subcasos del caso 1.º), así como en el caso 1'º), supuesto como hasta ahora $M \in D_c - C$, puesto que:

$$«t \in [\text{mín. } \{x_1(r^{L_M}), x_1{}^M\}, \text{ máx. } \{x_1(r^{L_M}), x_1{}^M\}] \text{ y } t = x_1(\overset{-1}{x_2}(\mu(t, x_1{}^M, x_2{}^M))) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = x_1(\overset{-1}{x_2}(\mu(t, x_1{}^M, x_2{}^M))) \text{ y } (t, \mu(t, x_1{}^M, x_2{}^M)) \in \overline{G} \text{ y } (x_1(\overset{-1}{x_2}(\mu(t, x_1{}^M, x_2{}^M))),$$

$$x_1{}^M, x_2{}^M) \in \mathfrak{A}' \text{ y } x_2(\overset{-1}{x_2}(\mu(t, x_1{}^M, x_2{}^M))) = \mu(x_1(\overset{-1}{x_2}(\mu(t, x_1{}^M, x_2{}^M))), x_1{}^M, x_2{}^M)»$$

así como (en virtud de la propia definición de h_c) es válida la relación:

$$«t = x_1(\overset{-1}{x_2}(\mu(t, x_1{}^M, x_2{}^M))) \text{ y } (t, \mu(t, x_1{}^M, x_2{}^M)) \in \overline{G} \text{ y}$$

$$\text{y } (x_1(\overset{-1}{x_2}(\mu(t, x_1{}^M, x_2{}^M))), x_1{}^M, x_2{}^M) \in \mathfrak{A}' \text{ y } x_2(\overset{-1}{x_2}(\mu(t, x_1{}^M, x_2{}^M))) =$$

$$= \mu(x_1(\overset{-1}{x_2}(\mu(t, x_1{}^M, x_2{}^M))), x_1{}^M, x_2{}^M) \Rightarrow t = x_1(\overset{-1}{x_2}(\mu(t, x_1{}^M, x_2{}^M))) \text{ y}$$

$$\text{y } \overset{-1}{x_2}(\mu(t, x_1{}^M, x_2{}^M)) = h_c(x_1{}^M, x_2{}^M) = r^{L_M}»$$

y además:

$$«t = x_1(\overset{-1}{x_2}(\mu(t, x_1{}^M, x_2{}^M))) \text{ y } \overset{-1}{x_2}(\mu(t, x_1{}^M, x^M{}_2)) = h_c(x_1{}^M, x_2{}^M) =$$

$$= r^{L_M} \Rightarrow t = x_1(r^{L_M})»$$

se sigue, como consecuencia de todo ello, que se verifica:

$$«t \in [\text{mín. } \{x_1(r^{L_M}), x_1{}^M\}, \text{ máx. } \{x_1(r^{L_M}), x_1{}^M\}] \text{ y } t = x_1(\overset{-1}{x_2}(\mu(t, x_1{}^M, x_2{}^M))) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = x_1(r^{L_M})»$$

o lo que es equivalente:

$$«t \in [\text{mín. } \{x_1(r^{L_M}), x_1^M\}, \text{ máx. } \{x_1(r^{L_M}), x_1^M\}] - \{x_1(r^{L_M})\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t - x_1(\overset{-1}{x_2}(\mu(t, x_1^M, x_2^M))) \neq 0»$$

relación, que habida cuenta la continuidad de la aplicación:

$$«t \in [\text{mín. } \{x_1(r^{L_M}), x_1^M\}, \text{ máx. } \{x_1(r^{L_M}), x_1^M\}] - \{x_1(r^{L_M})\} \rightarrow$$
$$\rightarrow t - x_1(\overset{-1}{x_2}(\mu(t, x_1^M, x_2^M))) \in \mathbf{R}» \quad (14^{VI**})$$

así como la conexión de su conjunto de definición (intervalo semiabierto por un extremo), entraña, por tanto, que la aplicación (14^{VI**}) sea de signo constante sobre el intervalo [mín. $\{x_1(r^{L_M}), x_1^M\}$, máx. $\{x_1(r^{L_M}), x_1^M\}$] $- \{x_1(r^{L_M})\}$, y dado que:

$$\left.\begin{array}{l} «x_1^M - x_1(\overset{-1}{x_2}(\mu(x_1^M, x_1^M, x_2^M))) = x_1^M - x_1(\overset{-1}{x_2}(x_2^M)) = \\ \qquad = x_1^M - x_1(r^{Q_M}) < 0» \text{ [En 1.º)*]} \\ «x_1^M - x_1(\overset{-1}{x_2}(\mu(x_1^M, x_1^M, x_2^M))) = x_1^M - x_1(\overset{-1}{x_2}(x_2^M)) = \\ \qquad = x_1^M - x_1(r^{Q_M}) > 0» \text{ [En 1.º)**]} \end{array}\right\} (14^{VI***})$$

se concluye, que para todo $t \in$ [mín. $\{x_1(r^{L_M}), x_1^M\}$, máx. $\{x_1(r^{L_M}), x_1^M\}$], se verifica:

$$\left.\begin{array}{l} «t \leq x_1(\overset{-1}{x_2}(\mu(t, x_1^M, x_2^M)))» \text{ [En 1.º)*]} \\ «t \geq x_1(\overset{-1}{x_2}(\mu(t, x_1^M, x_2^M)))» \text{ [En 1.º)**]} \end{array}\right\} (14^{VII})$$

Establecido esto, supongamos, que igual que antes, sea:

$$«t \in [\text{mín. } \{x_1(r^{L_M}), x_1^M\}, \text{ máx. } \{x_1(r^{L_M}), x_1^M\}] \text{ y}$$
$$\text{y } T = (x_1^T, x_2^T) = (t, \mu(t, x_1^M, x_2^M))»$$

Poniendo $x^R = \overset{-1}{x_2}(x_2^T) = \overset{-1}{x_2}(\mu(t, x_1^M, x_2^M))$; $R = (x_1^R, x_2^R) = (x_1(r^R), x_2(r^R)) = (x_1(\overset{-1}{x_2}(x_1^T)), x_2^T) = (x_1(\overset{-1}{x_2}(\mu(t, x_1^M, x_2^M))), x_2^T)$, se tiene, como consecuencia de (14^{VII}), que:

$$\left.\begin{array}{l} «x_1^T \leq x_1(r^R)» \text{ [En 1.º)*]} \\ «x_1^T \geq x_1(r^R)» \text{ [En 1.º)**]} \end{array}\right\} (14^{VII*})$$

y además, en virtud del crecimiento sobre el intervalo [mín. $\{x_1(r^{L_M}), x_1^M\}$, máx. $\{x_1(r^{L_M}), x_1^M\}$] de la aplicación parcial $\mu_{(x_2^M . x_2^M)}$, [consecuencia de ser, en el caso 1.º), $\varrho_{|\mathcal{E}_c} > 0$ sobre $\mathcal{E}_c$], se verifica:

$$«x_2^T = \underset{(x_1^M, x_2^M)}{\mu}(t) \in [\text{mín. } \{\underset{(x_1^M, x_2^M)}{\mu}(x_1(r^{L_M})), \underset{(x_1^M, x_2^M)}{\mu}(x_1^M)\}, \text{ máx. } \{\underset{(x_1^M, x_2^M)}{\mu}(x_1(r^{L_M})), \underset{(x_1^M, x_2^M)}{\mu}(x_1^M)\}] =$$

$$= [\text{mín. } \{x_2(r^{L_M}), x_2^M\}, \text{ máx. } \{x_2(r^{L_M}), x_2^M\}] = [\text{mín. } \{x_2(r^{L_M}), x_2(r^{Q_M})\},$$

$$\text{máx. } \{x_2(r^{L_M}), x_2(r^{Q_M})\}]»$$

lo que entraña:

$$«r^R = \overset{-1}{x_2}(x_2^T) \in [\text{mín. } \{r^{L_M}, r^{Q_M}\}, \text{ máx. } \{r^{L_M}, r^{Q_M}\}] = [\text{mín. } \{r^{L_M}, r^{P_M}\},$$

$$\text{máx. } \{r^{L_M}, r^{P_M}\}] \cup [\text{mín. } \{r^{P_M}, r^{Q_M}\}, \text{ máx. } \{r^{P_M}, r^{Q_M}\}]»$$

y puesto que se tiene:

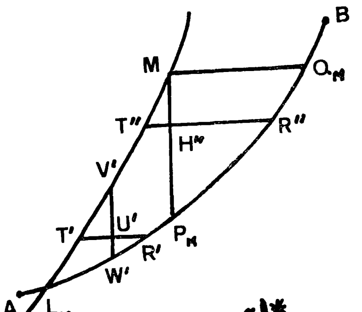
$$«[\text{mín. } \{r^{L_M}, r^{P_M}\}, \text{ máx. } \{r^{L_M}, r^{P_M}\}] \cap [\text{mín. } \{r^{P_M}, r^{Q_M}\},$$

$$\text{máx. } \{r^{P_M}, r^{Q_M}\}] = \{r^{P_M}\}»$$

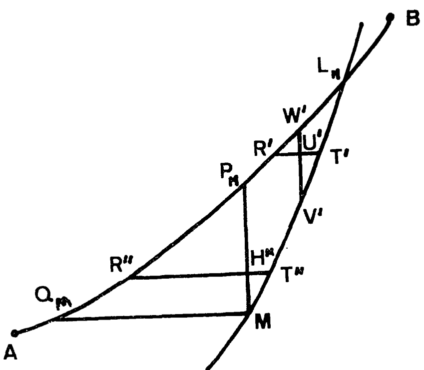
se deduce que es válida la relación disyuntiva:

$$\left.\begin{array}{ll} «r^R \in [\text{mín. } \{r^{L_M}, r^{P_M}\}, \text{ máx. } \{r^{L_M}, r^{P_M}\}]» & (') \\ \text{ó} & \\ «r^R \in [\text{mín. } \{r^{P_M}, r^{Q_M}\}, \text{ máx. } \{r^{P_M}, r^{Q_M}\}] - \{r^{P_M}\}» & ('') \end{array}\right\}$$

Supongamos se verifique ('); denotemos a R y T por R' y T', respectivamente (Ver figuras correspondientes), y sea $x_1^{U'} \in$ [mín.



1ª)*



1ª)**

$\{x_1^{T'}, x_1^{R'}\}$, máx. $\{x_1^{T'}, x_1^{R'}\}] \subset$ [mín. $\{x_1(r^{L_M}), x_1(r^{P_M})\}$, máx. $\{x_1(r^{L_M}), x_1(r^{P_M})\}] =$ [mín. $\{x_1(r^{L_M}), x_1^M\}$, máx. $\{x_1(r^{L_M}), x_1^M\}]$. (La inclusión es consecuencia de verificarse por (14^{VII*}): $x_1(r^{L_M}) \leq x_1^{T'} \leq x_1^{R'} = = x_1(r^{R'}) \leq x_1(r^{P_M}) = x^M$ [En el subcaso 1ª)*] y: $x_1(r^{L_M}) \geq x_1^{T'} \geq x_1^{R'} = = x_1(r^{R'}) \geq x_1(r^{P_M}) = x_1^M$ [En el subcaso 1ª)**]), así como $U' = (x_1^{U'}, x_2^{U'}) = (x_1^{U'}, x_2(r^{R'}))$. Pongamos: $V' = (x_1^{V'}, x_2^{V'}) = (x_1^{U'}, \mu(x_1^{U'}, x_1^M, x_2^M))$ y y $W' = (x_1^{W'}, x_2^{W'}) = (x_1^{U'}, x_2(\overset{-1}{x_1}(x_1^{U'}))) = (x_1(\overset{-1}{x_1}(x_1^{U'})), x_2(\overset{-1}{x_1}(x_1^{U'}))) = (x_1(r^{W'}), x_2(r^{W'}))$.

Se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} «x_1(r^{W'}) = x_1^{U'} \leq x_1^{R'} = x_1(r^{R'})» \text{ [En 1ª)*]} \\ «x_1(r^{W'}) = x_1^{U'} \geq x_1^{R'} = x_1(r^{R'})» \text{ [En 1ª)**]} \end{array}\right\}$$

lo que entraña (en virtud del crecimiento [en el caso 1.º), que estamos considerando], de las funciones $\overset{-1}{x_1}$: $[x_1(r^A), x_1(r^B)] \to [r^A, r^B]$ y $r \in [r^A, r^B] \to x_2(r) \in \mathbf{R}$):

$$\left.\begin{array}{l} «x_2^{W'} = x_2(r^{W'}) \leq x_2(r^{R'}) = x_2^{U'}» \text{ [En 1ª)*]} \\ «x_2^{W'} = x_2(r^{W'}) \geq x_2(r^{R'}) = x_2^{U'}» \text{ [En 1ª)**]} \end{array}\right\}$$

y puesto que, [habida cuenta (14^{VII*}) y (')], se verifica:

$$\left.\begin{array}{l} «x_1(r^{L_M}) \leq x_1^{T'} \leq x_1^{U'} = x_1^{V'} \leq x_1(r^{R'}) \leq x_1(r^{P_M}) = x_1^M» \text{ [En 1ª)*]} \\ «x_1(r^{L_M}) \geq x_1^{T'} \geq x_1^{U'} = x_1^{V'} \geq x_1(r^{R'}) \geq x_1(r^{P_M}) = x_1^M» \text{[En 1ª)**]} \end{array}\right\} (14^{VII**})$$

y consecuentemente:

$$\left.\begin{array}{l} «x_2^{U'} = x_2^{T'} = \mu(x_1^{T'}, x_1^M, x_2^M) \leq \mu(x_1^{V'}, x_1^M, x_2^M) = x_2^{V'}» \text{ [En 1ª)*]} \\ «x_2^{U'} = x_2^{T'} = \mu(x_1^{T'}, x_1^M, x_2^M) \geq \mu(x_1^{V'}, x_1^M, x_2^M) = x_2^{V'}» \text{ [En 1ª)**]} \end{array}\right\}$$

se deduce de todo ello que es válida en los dos subcasos 1ª)* y 1ª)**, la relación:

$$«x_2^{U'} \in [\text{mín. } \{x_2^{V'}, x_2^{W'}\}, \text{ máx. } \{x_2^{V'}, x_2^{W'}\}]»$$

es decir, $U' = (x_1^{U'}, x_2^{U'})$ pertenece al segmento $\overline{V'W'}$, y dado que por (14^{VII**}) se tiene $x_1^{V'} \in$ [mín. $\{x_1(r^{L_M}), x_1^M\}$, máx. $\{x_1(r^{L_M}), x_1^M\}]$, así como $x_2^{W'} = x_2(\overset{-1}{x_1}(x_1^{V'}))$, dicho segmento, según acaba de establecerse en (14^{VI*}), está, por tanto, contenido en $\mathcal{E}_c$, en el supuesto $M \in D_c - C$

[resp. está contenido en $\mathcal{E}_c^a$, en el supuesto $M \in \mathring{D}_c - C$], resultando finalmente:

$$« U' \in \mathcal{E}_c », \quad (\text{si } M \in D_c - C)$$

$$[\text{resp. } « U' \in \mathcal{E}_c^a », \quad (\text{si } M \in \mathring{D}_c - C)]$$

y como $U' \in \overline{T' R'}$, es arbitrario, se concluye que:

$$« \overline{T' R'} \subset \mathcal{E}_c », \quad (\text{si } M \in D_c - C)$$

$$[\text{resp. } \overline{T' R'} \subset \mathcal{E}_c^a, \quad (\text{si } M \in \mathring{D}_c - C)]$$

Suponiendo ahora que se verifique (″), denotemos a R y T por R'' y T'', respectivamente, (Véanse figuras correspondientes), y pongamos $H'' = (x_1^{H''}, x_2^{H''}) = (x_1^M, x_2^{T''})$.

Se tiene:

$$\left.\begin{array}{ll} « x_1^{T''} \leq x_1^M = x_1^{H''} = x_1 \, (\gamma^{P_M}) < x_1 \, (\gamma^{R''}) = x_1^{R''} » & [\text{En } 1^{\alpha})^*] \\ « x_1^{T} \geq x_1^M = x_1^{H''} = x_1 \, (\gamma^{P_M}) > x_1 \, (\gamma^{R''}) = x_1^{R''} » & [\text{En } 1^{\alpha})^{**}] \end{array}\right\}$$

por lo que en los subcasos $1^{\alpha})^*$ y $1^{\alpha})^{**}$ se verifica:

$$«[\text{mín.} \{x_1^{T''}, x_1^{R''}\}, \text{máx.} \{x_1^{T''}, x_1^{R''}\}] = [\text{mín.} \{x_1^{T''}, x_1^{H''}\}, \text{máx.} \{x_1,^{T''}, x_1^{H''}\}] \cup$$
$$\cup \, [\text{mín.} \{x_1^{H''}, x_1^{R''}\}, \text{máx.} \{x_1^{H''}, x^{R''}\}]»$$

es decir:

$$« \overline{T'' R''} = \overline{T'' H''} \cup \overline{H'' R''} »$$

y procediendo de modo idéntico a como acaba de efectuarse en el supuesto (′), se establece que es válida la relación:

$$« \overline{T'' H''} \subset \mathcal{E}_c », \quad (\text{si } M \in D_c - C)$$

$$[\text{resp. } « \overline{T'' H''} \subset \mathcal{E}_c^a », \quad (\text{si } M \in \mathring{D}_c - C)]$$

y por otra parte, puesto que:

$$« \overline{H'' R''} \subset \triangle \, M \, P_M \, Q_M »$$

y además, en virtud del TEOREMA I, se verifica:

$$« \triangle \, M P_M \, Q_M \subset D_c \subset \mathcal{E}_c », \quad (\text{si } M \in D_c - C)$$

$$[\text{resp. } « \triangle \, M P_M \, Q_M \subset \mathring{D}_c \subset \mathcal{E}_c^a », \quad (\text{si } M \in \mathring{D}_c - C)]$$

se concluye, finalmente, que:

$$«\overline{T'' R''} \subset \mathcal{E}_c», \text{ (si } M \in D_c - C)$$

$$[\text{resp. } «\overline{T'' R''} \subset \mathcal{E}^a{}_c» \text{ (si } M \in \mathring{D}_c - C)]$$

es decir, poniendo $r_2 = \overset{-1}{x_2}(x_2{}^T) = \overset{-1}{x_2}(\mu(t, x_1{}^M, x_2{}^M))$, y dado que se tiene:

$$«r_2 \in [\text{mín. } \{r^{L_M}, r^{Q_M}\}, \text{ máx. } \{r^{L_M}, r^{Q_M}\}] \subset [r^A, r^B]», \text{ (si } M \in D_c - C)$$

$$[\text{resp. } «r_2 \in [\text{mín. } \{r^{L_M}, r^{Q_M}\}, \text{ máx. } \{r^{L_M}, r^{Q_M}\}] \subset]r^A, r^B[», \text{ (si } M \in \mathring{D}_c - C)]$$

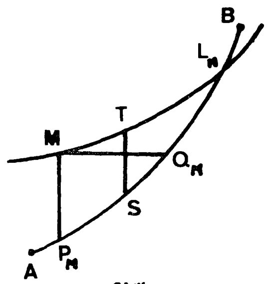
el resultado obtenido se puede expresar en la forma:

$$«(\exists\, r_2)(r_2 \in [r^A, r^B] \text{ y } \mu(t, x_1{}^M, x_2{}^M) = x_2(r_2) \text{ y } \bigcup_{v \in [0,1]} \{((1-v)\cdot t + v \cdot x_1(r_2), \mu(t, x_1{}^M, x_2{}^M))\} \subset \mathcal{E}_c)», \text{ (si } M \in D_c - C) \quad (14^{VII***})$$

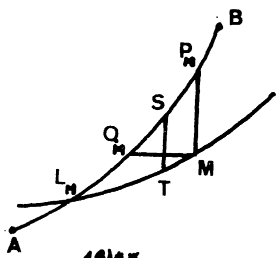
$$\text{resp. } [«(\exists\, r_2)(r_2 \in]r^A, r^B[\text{ y } \mu(t, x_1{}^M, x_2{}^M) = x_2(r_2) \text{ y } \bigcup_{v \in [0,1]} \{((1-v)\cdot t + v \cdot x_1(r_2), \mu(t, x_1{}^M, x_2{}^M))\} \subset \mathcal{E}_c{}^a)», \text{ (si } M \in \mathring{D}_c - C)]$$

En el subcaso 1^β), [según se estableció en la demostración del TEOREMA I relativa al subcaso 1^β)], la aplicación $x_2 \in [\text{mín.}\{x_2{}^M\, x_2{}^{P_M}\}, \text{máx.}\{x_2{}^M, x_2{}^{P_M}\}] \to \mathcal{T}_2(x_2) = h_c(x_1{}^M, x_2) \in \mathbf{R}$ es continua y estrictamente monótona sobre su intervalo de definición, verificándose, asimismo:

$$«\mathcal{T}_2([\text{mín. } \{x_2{}^M, x_2{}^{P_M}\}, \text{ máx. } \{x_2{}^M, x_2{}^{P_M}\}]) = [\text{mín. } \{r^{L_M}, r^{P_M}\}, \text{ máx. } \{r^{L_M}, r^{P_M}\}]»$$



$1^\beta)^*$



$1^\beta)^{**}$

es decir:

$$«(\forall r)\,(r \in [\text{mín.}\{r^{L_M}, r^{P_M}\}, \text{máx.}\{r^{L_M}, r^{P_M}\}] \Rightarrow (\exists x_2)(x_2 \in [\text{mín.}\{x_2{}^M, x_2{}^{P_M}\}, \text{máx. } \{x^M, x^{P_M}\}] \text{ y } r = \mathcal{T}_2(x_2) = h_c(x_1{}^M, x_2)))»$$

así como, [por lo establecido en la demostración del TEOREMA I relativa al subcaso 1^{β})], se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} \text{«}\, r^{L_M} > r^{P_M} \,\text{» [En } 1^{\beta})^{*}] \\ \text{«}\, r^{L_M} < r^{P_M} \,\text{» [En } 1^{\beta})^{**}] \end{array}\right\}$$

En virtud de (11^{XII*}) del n.º 9, la relación $r = h_c\,(x_1^M, x_2)$ entraña: $x_1^{izq}\,(\vec{x}\,(r)) \leq x_1^M \leq x_1^{der}\,(\vec{x}\,(r))$, por lo que, consecuentemente, se verifica:

$$\text{«}\,(\forall r)\;(r \in [\text{mín. } \{r^{L_M}, r^{P_M}\},\ \text{máx. } \{r^{L_M}, r^{P_M}\}] \Rightarrow x_1^{izq}\,(\vec{x}\,(r)) \leq x_1^M \leq$$
$$\leq x_1^{der}\,(\vec{x}\,(r)))\,\text{»} \quad (14^{VIII})$$

Sea ahora $t \in [\text{mín. } \{x_1\,(r^{L_M}), x_1^M\},\ \text{máx. } \{x_1\,(r^{L_M}), x_1^M\}] - \{x_1^M\}$ y $T = (x_1^T, x_2^T) = (t,\ \mu\,(t, x_1^M, x_2^M))$; poniendo $r^S = \overset{-1}{x_1}\,(t)$ y $S = (x_1^S, x_2^S) = (x_1\,(r^S), x_2\,(r^S)) = (t, x_2\,(\overset{-1}{x_1}\,(t)))$, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} \text{«}\, r^{L_M} \geq r^S > r^{P_M} \,\text{» [En } 1^{\beta})^{*}] \\ \text{«}\, r^{L_M} \leq r^S < r^{P_M} \,\text{» [En } 1^{\beta})^{**}] \end{array}\right\} \quad (14^{VIII*})$$

y consecuentemente:

$$\left.\begin{array}{l} \text{«}\, x_1^T = x_1\,(r^S) > x_1\,(r^{P_M}) = x_1^M \,\text{» [En } 1^{\beta})^{*}] \\ \text{«}\, x_1^T = x_1\,(r^S) < x_1\,(r^{P_M}) = x_1^M \,\text{» [En } 1^{\beta})^{**}] \end{array}\right\} \quad (14^{VIII**})$$

De (14^{VIII}), (14^{VIII*}) y (14^{VIII**}), se deduce:

$$\left.\begin{array}{l} \text{«}\,(\forall r)\;(r \in [r^S, r^{L_M}] \Rightarrow x_1^{izq}\,(\vec{x}\,(r)) \leq x_1^M < x_1^T = x_1\,(r^S) \leq x_1\,(r) < \\ \qquad < x_1^{der}\,(\vec{x}\,(r)))\,\text{» [En } 1^{\beta})^{*}] \\ \text{«}\,(\forall r)\;(r \in [r^{L_M}, r^S] \Rightarrow x_1^{izq}\,(\vec{x}\,(r)) < x_1\,(r) \leq x_1\,(r^S) = x_1^T < x_1^M \leq \\ \qquad \leq x_1^{der}\,(\vec{x}\,(r)))\,\text{» [En } 1^{\beta})^{**}] \end{array}\right\}$$

lo que entraña que en todos los subcasos se verifique:

$$\text{«}(\forall r)(r \in [\text{mín. } \{r^{L_M}, r^S\},\ \text{máx. } \{r^{L_M}, r^S\}] \Rightarrow x_1^T \in]\,x_1\,(x^{izq}\,(r)),\ x_1^{der}\,(\vec{x}(r))[\,)\text{»}$$

o lo que es equivalente:

$$\text{«}(\forall r)(r \in [\text{mín } \{r^{L_M}, r^S\},\ \text{máx } \{r^{L_M}, r^S\}] \Rightarrow (x_1^T, x_1(r), x_2(r)) \in \mathfrak{A})\text{»} \quad 14^{VIII***})$$

y consecuentemente, [análogamente al caso 1^{α}) estudiado precedentemente], está definida la aplicación compuesta:

$$\text{«}\, r \in [\text{mín. } \{r^{L_M}, r^S\},\ \text{máx. } \{r^{L_M}, r^S\}] \to \sigma\,(r) = \lambda\,(x_1^T, x_1\,(r), x_2\,(r)) \in \mathbf{R}\,\text{»}$$

la cual verifica, por tanto:

$$«(\forall r)\ (r \in [\text{mín. } \{r^{L_M}, r^S\},\ \text{máx. } \{r^{L_M}, r^S\}] \Rightarrow (x_1^T, \sigma(r)) \in G)» \quad (14^{IX})$$

y que además es derivable sobre su intervalo de definición, con derivada de signo constante sobre el mismo, por lo que σ es continua y estrictamente monótona sobre el intervalo [mín. $\{r^{L_M}, r^S\}$, máx. $\{r^{L_M}, r^S\}$].

Puesto que: $\sigma(r^{L_M}) = x_2^T$ y $\sigma(r^S) = x_2^S$, se tiene, por tanto:

$$«\sigma([\text{mín. } \{r^{L_M}, r^S\},\ \text{máx. } \{r^{L_M}, r^S\}]) = [\text{mín. } \{x_2^T, x_2^S\},\ \text{máx. } \{x_2^T, x_2^S\}]»$$

y, consecuentemente, teniendo en cuenta además $(14^{VIII***})$ y (14^{IX}), es válida la relación:

$$«(\forall x_2)\ (x_2 \in]\ \text{mín. } \{x_2^T, x_2^S\},\ \text{máx. } \{x_2^T, x_2^S\}[\ \Rightarrow (x_1^T, x_2) \in G \text{ y } (\exists r)\ (r \in$$
$$\in]\ \text{mín. } \{r^{L_M}, r^S\},\ \text{máx. } \{r^{L_M}, r^S\}[\ \subset\ ]r^A, r^B[\text{ y } (x_1^T, x_1(r), x_2(r)) \in \mathcal{A} \text{ y}$$
$$\text{y } x_2 = \sigma(r) = \lambda(x_1^T, x_1(r), x_2(r))))»$$

la cual implica:

$$«(\forall x_2)\ (x_2 \in]\ \text{mín. } \{x_2^T, x_2^S\},\ \text{máx. } \{x_2^T, x_2^S\}[\ \Rightarrow (x_1^T, x_2) \in \mathcal{E}_c^a)»$$

resultando, (dado que $(x_1^T, x_2^T) = T \in \mathcal{E}_c$ y $(x_1^T, x_1^S) = (x_1^S, x_2^S) = S \in \mathcal{E}_c$), ser válida la relación:

$$«(\forall x_2)(x_2 \in [\text{mín.}\{x_2^T, x_2^S\}, \text{máx.}\{x_2^T, x_2^S\}] \Rightarrow (x_1^T, x_2) \in \mathcal{E}_c)», (\text{si } M \in D_c - C)$$

[resp. $«(\forall x_2)\ (x_2 \in [\text{mín. } \{x_2^T, x_2^S\},\ \text{máx. } \{x_2^T, x_2^S\}] \Rightarrow (x_1^T, x_2) \in \mathcal{E}_c^a)»$, (si $M \in \mathring{D}_c - C$), (ya que, en el supuesto $M \in \mathring{D}_c - C$, se tiene que $\bigcup_{t \in [\text{mín}\{x_1(r^{L_M}), x_1^M\}, \text{máx}\{x_1(r^{L_M}), x_1^M\}]} \{(t, \mu(t, x_1^M, x_2^M))\} = \bigcup_{t \in [\text{mín}\{x_1(r^{L_M}), x_1^M\}, \text{máx}\{x_1(r^{L_M}), x_1^M\}]} \{(t, \lambda(t, x_1^M, x_2^M))\} \subset \mathcal{E}_c^a$ y en particular: $(x_1^T, x_2^T) = T \in \mathcal{E}_c^a$, así como por verificarse $(r^{L_M}, r^{P_M}) \in]\ r^A, r^B\ [\times]\ r^A, r^B[$, y consecuentemente, $r^S \in]r^A, r^B[$, se tiene también: $(x_1(r^S), x_2(r^S)) = (x_1^S, x_2^S) \in C - \{A, B\} \subset \mathcal{E}_c^a)$]

Poniendo $r_1 = r^S = \overset{-1}{x_1}(x_1^T) = \overset{-1}{x_1}(t)$, se tiene: $r_1 \in [r^A, r^B]$, si $M \in D_c - C$,

[resp. se tiene: $r_1 \in]r^A, r^B[$, si $M \in \mathring{D}_c - C$].

el resultado obtenido se expresa como sigue:

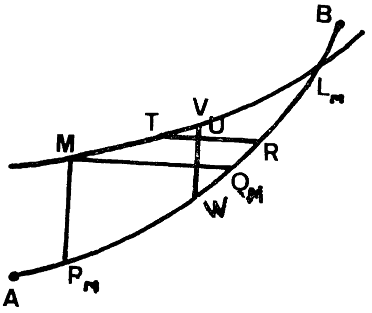
$$«(\exists r_1)\ (r_1 \in [r^A, r^B] \text{ y } t = x_1(r_1) \text{ y } \bigcup_{\nu \in [0,1]} \{(t, (1-\nu) \cdot \mu(t, x_1^M, x_2^M) +$$
$$+ \nu \cdot x_2(r_1))\} \subset \mathcal{E}_c)», (\text{si } M \in D_c - C) \quad (14^{IX*})$$

$$[\text{resp. } «(\exists r_1)(r_1 \in]r^A, r^B[\text{ y } t = x_1(r_1) \text{ y } \bigcup_{\nu \in [0,1]} \{(t, (1-\nu) \cdot \mu(t, x_1^M, x_2^M) +$$
$$+ \nu \cdot x_2(r_1))\} \subset \mathcal{E}_c^a)», (\text{si } M \in \mathring{D}_c - C)]$$

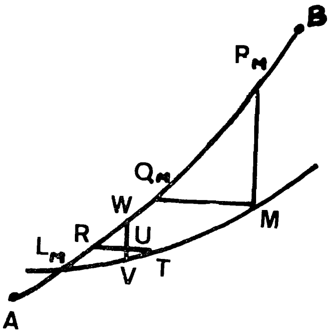
o más brevemente:

$$«\overline{TS} \subset \mathcal{E}_c», \text{ (si } M \in D_c - C) \quad (14^{IX**})$$
$$[\text{resp. } «\overline{TS} \subset \mathcal{E}_c{}^a», \text{ (sí } M \in \mathring{D}_c - C)]$$

De nuevo, sea $t \in [\text{mín. } \{x_1 (r^{L_M}), x_1{}^M\}, \text{ máx. } \{x_1 (r^{L_M}), x_1{}^M\}]$, y y $T = (x_1{}^T, x_2{}^T) = (t, \mu (t, x_1{}^M, x_2{}^M))$. Poniendo, (ver figuras correspondientes): $r^R = \overset{-1}{x_2} (x_2{}^T) = \overset{-1}{x_2} (\mu (t, x_1{}^M, x_2{}^M))$ y $R = (x_1{}^R, x_2{}^R) = (x_1 (r^R), x_2 (r^R)) = (x_1 (\overset{-1}{x_2} (x_1{}^T)), x_2{}^T) = (x_1 (\overset{-1}{x_2} (\mu (t, x_1{}^M, x_2{}^T))), x_2{}^T)$.



$1^{\beta})^*$



$1^{\beta})^{**}$

se tiene como consecuencia de (14^{VII}):

$$\left.\begin{array}{l} «x_1{}^T \leq x_1 (r^R) = x_1{}^R» \text{ [En } 1^{\beta})^*] \\ «x_1{}^T \geq x_1 (r^R) = x_1{}^R» \text{ [En } 1^{\beta})^{**}] \end{array}\right\} \quad (14^{IX***})$$

y además, en virtud del crecimiento sobre el intervalo $[\text{mín. } \{x_1 (r^{L_M}), x_1{}^M\}, \text{ máx. } \{x_1 (r^{L_M}), x_1{}^M\}]$ de la aplicación parcial $\mu_{(x_1{}^M, x_2{}^M)}$, se verifica:

$$«x_2{}^T = \mu_{(x_1{}^M, x_2{}^M)} (t) \in [\text{mín. } \{x_2 (r^{L_M}), x_2 (r^{Q_M})\}, \text{ máx. } \{x_2 (r^{L_M}), x_2 (r^{Q_M})\}]»$$

lo que entraña:

$$«r^R = \overset{-1}{x_2} (x_2{}^T) \in [\text{mín. } \{r^{L_M}, r^{Q_M}\}, \text{ máx. } \{r^{L_M}, r^{Q_M}\}]» \quad (14^X)$$

Sea ahora: $x_1{}^U \in [\text{mín.} \{x_1{}^T, x_1{}^R\}, \text{máx.} \{x_1{}^T, x_1{}^R\}] \subset [\text{mín.} \{x_1 (r^{L_M}), x_1{}^M\}, \text{ máx. } \{x_1 (r^{L_M}), x_1{}^M\}]$, (La inclusión es consecuencia de verificarse por (14^{IX***}) y (14^X): $x_1 (r^{L_M}) \geq x_1 (r^R) = x_1{}^R \geq x_1{}^T \geq x_1{}^M$ [En el subcaso $1^{\beta})^*$] y $x_1 (r^{L_M}) \leq x_1 (r^R) = x_1{}^R \leq x_1{}^T \leq x_1{}^M$ [En el subcaso $1^{\beta})^{**}$]), así como $U = (x_1^U, x_2^U) = (x_1^U, x_2(r^R))$. Pongamos $V = (x_1^V, x_2^V) = (x_1^U, \mu(x_1^U x_1^M, x_2^M))$ y $W = (x_1^W, x_2^W) = (x_1^U, x_2(\overset{-1}{x_1}(x_1^U))) = (x_1(\overset{-1}{x_1}(x_1^U)), x_2(\overset{-1}{x_1}(x_1^U))) = (x_1(r^W), x_2(r^W))$.

Se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} «x_1(r^W) = x_1^U \leq x_1^R = x_1(r^R)» \text{ [En } 1^\beta)^*] \\ «x_1(r^W) = x_1^U \geq x_1^R = x_1(r^R)» \text{ [En } 1^\beta)^{**}] \end{array}\right\}$$

lo que en virtud del crecimiento de las funciones $\overset{-1}{x_1}: [x_1(r^A), x_1(r^B)] \to [r^A, r^B]$ y $r \in [r^A, r^B] \to x_2(r) \in \mathbf{R}$, entraña:

$$\left.\begin{array}{l} «x_2^W = x_2(r^W) \leq x_2(r^R) = x_2^U» \text{ [En } 1^\beta)^*] \\ «x_2^W = x_2(r^W) \geq x_2(r^R) = x_2^U» \text{ [En } 1^\beta)^{**}] \end{array}\right\}$$

y puesto que habida cuenta (14^{IX***}) y (14^X), se verifica:

$$\left.\begin{array}{l} «x_1(r^{L_M}) \geq x_1(r^R) \geq x_1^U = x_1^V \geq x_1^T \geq x_1^M» \text{ [En } 1^\beta)^*] \\ «x_1(r^{L_M}) \leq x_1(r^R) \leq x_1^U = x_1^V \leq x_1^T \leq x_1^M» \text{ [En } 1^\beta)^{**}] \end{array}\right\} (14^{X*})$$

y consecuentemente:

$$\left.\begin{array}{l} «x_2^U = x_2^T = \mu(x_1^T, x_1^M x_2^M) \leq \mu(x_1^V, x_1^M, x_2^M) = x_2^V» \text{ [En } 1^\beta)^*] \\ «x_2^U = x_2^T = \mu(x_1^T, x_1^M, x_2^M) \geq \mu(x_1^V, x_1^M, x_2^M) = x_2^V» \text{ [En } 1^\beta)^{**}] \end{array}\right\}$$

se deduce de todo ello, que es válida en los dos subcasos, la relación:

$$«x_2^U \in [\text{mín. } \{x_2^V, x_2^W\}, \text{ máx. } \{x_2^V, x_2^W\}]»$$

es decir, $U = (x_1^U, x_2^U)$ pertenece al segmento $\overline{VW}$, y dado que por (14^{X*}) se tiene: $x_1^V \in [\text{mín. } \{x_1(r^{L_M}), x_1^M\}, \text{máx. } \{x_1(r^{L_M}), x_1^M\}]$, así como $x_2^W = x_2(\overset{-1}{x_1}(x_1^V))$, dicho segmento, según acaba de establecerse en (14^{IX**}), está, por tanto, contenido en $\mathcal{E}_c$, en el supuesto $M \in D_c - C$, [resp. está contenido en $\mathcal{E}_c^a$, en el supuesto $M \in \mathring{D}_c - C$], resultando, finalmente:

$$«U \in \mathcal{E}_c», \text{ (sí } M \in D_c - C)$$

$$\text{[resp. } «U \in \mathcal{E}_c^a», \text{ (si } M \in \mathring{D}_c - C)]$$

y como $U \in \overline{TR}$ es arbitrario, se concluye, que:

$$«\overline{TR} \subset \mathcal{E}_c», \text{ (si } M \in D_c - C)$$

$$\text{[resp. } «\overline{TR} \subset \mathcal{E}_c^a», \text{ (sí } M \in M \in \mathring{D}_c - C)]$$

es decir, poniendo $r_2 = \overset{-1}{x_2}(x_2^T) = \overset{-1}{x_2}(\mu(t, x_1^M, x_2^M))$, y dado que se tiene:

$$«r_2 \in [\text{mín. } \{r^{L_M}, r^{Q_M}\}, \text{ máx. } \{r^{L_M}, r^{Q_M}\}] \subset [r^A, r^B]» \quad (\text{sí } M \in D_c - C)$$

$$[\text{resp. } «r_2 \in [\text{mín. } \{r^{L_M}, r^{Q_M}\}, \text{ máx. } \{r^{L_M}, r^{Q_M}\}] \subset]r^A, r^B[» \; (\text{sí } M \in \mathring{D}_c - C)]$$

el resultado obtenido se puede expresar en la forma:

$$«(\exists r_2)(r_2 \in [r^A, r^B] \text{ y } \mu(t, x_1^M, x_2^M) = x_2(r_2) \text{ y } \bigcup_{\nu \in [0,1]} \{((1 - \nu) \cdot t + \nu \cdot x_1(r_2),$$
$$\mu(t, x_1^M, x_2^M))\} \subset \mathcal{E}_c)», \; (\text{sí } M \in D_c - C), \quad (14^{X**})$$

$$[\text{resp. } «(\exists r_2)(r_2 \in]r^A, r^B[\text{ y } \mu(t, x_1^M, x_2^M) = x_2(r_2) \text{ y } \bigcup_{\nu \in [0,1]} \{((1 - \nu) \cdot t +$$
$$+ \nu \cdot x_1(r_2), \mu(t, x_1^M, x_2^M))\} \subset \mathcal{E}_c^a)», \; (\text{sí } M \in \mathring{D}_c - C)]$$

Cada uno de los pares de relaciones $[(14^{VI}), (14^{VII***})]$ y $[(14^{IX*}), (14^{X**})]$ entraña la relación:

$$«(\exists (r_1, r_2))((r_1, r_2) \in [r^A, r^B] \times [r^A, r^B] \text{ y } t = x_1(r_1) \text{ y } \mu(t, x_1^M, x_2^M) =$$
$$= x_2(r_2) \text{ y } \bigcup_{\nu \in [0,1]} \{(t, (1 - \nu). \mu(t, x_1^M, x_2^M) + \nu \cdot x_2(r_1))\} \subset \mathcal{E}_c \text{ y}$$
$$\text{y } \bigcup_{\nu \in [0,1]} \{((1 - \nu) \cdot t + \nu \cdot x_1(r_2), \mu(t, x_1^M, x_2^M))\} \subset \mathcal{E}_c)» \; (\text{sí } M \in D_c - C)$$

$$[\text{resp. } «(\exists (r_1, r_2))((r_1, r_2) \in]r^A, r^B[\times]r^A, r^B[\text{ y } t = x_1(r_1) \text{ y } \mu(t, x_1^M, x_2^M) =$$
$$= x_2(r_2) \text{ y } \bigcup_{\nu \in [0,1]} \{(t, (1 - \nu) \cdot \mu(t, x_1^M, x_2^M) + \nu \cdot x_2(r_1))\} \subset \mathcal{E}_c^a \text{ y}$$
$$\text{y } \bigcup_{\nu \in [0,1]} \{((1 - \nu) \cdot t + \nu \cdot x_1(r_2), \mu(t, x_1^M, x_2^M))\} \subset \mathcal{E}_c^a)» \; (\text{sí } M \in \mathring{D}_c - C)]$$

o lo que es equivalente:

$$«(t, \mu(t, x_1^M, x_2^M)) \in D_c» \; (\text{sí } M \in D_c - C)$$
$$[\text{resp. } «(t, \mu(t, x_1^M, x_2^M)) \in \mathring{D}_c», \; (\text{sí } M \in \mathring{D}_c - C)]$$

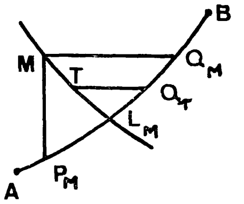
y puesto que se ha partido del supuesto $M \in D_c - C$ y $t \in [\text{mín.} \{x_1(r^{L_M}), x_1^M\}, \text{máx.} \{x_1(r^{L_M}), x_1^M\}]$, (resp. $M \in \mathring{D}_c - C$ y $t \in [\text{mín.} \{x_1(r^{L_M}), x_1^M\}, \text{máx.} \{x_1(r^{L_M}), x_1^M\}]$), y que en ambos casos $t \in [\text{mín.} \{x_1(r^{L_M}), x_1^M\}, \text{máx.} \{x_1(r^L), x_1^M\}]$ es arbitrario, se sigue que se verifica:

$$«M \in D_c - C \Rightarrow \bigcup_{t \in [\text{mín}\{x_1(r^{L_M}), x_1^M\}, \text{máx}\{x_1(r^{L_M}), x_1^M\}]} \{(t, \mu(t, x_1^M, x_2^M))\} \subset D_c»$$
$$[\text{resp. } «M \in \mathring{D} - C \Rightarrow \bigcup_{t \in [\text{mín}\{x_1(r^{L_M}), x_1^M\}, \text{máx}\{x_1(r^{L_M}), x_1^M\}]} \{(t, \mu(t, x_1^M, x_2^M))\} \subset \mathring{D}_c»]$$

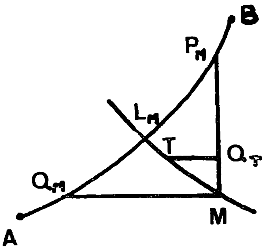
lo que demuestra el TEOREMA en los subcasos 1^α) y 1^β).

Finalmente, refiriéndonos al caso 1'°), dado que, [según se estableció en la demostración del TEOREMA I relativa al caso 1'°)], se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} « r^{P_M} < r^{L_M} » \text{ [En } 1'^{\text{o}})^*] \\ « r^{P_M} > r^{L_M} » \text{ [En } 1'^{\text{o}})^{**}] \end{array}\right\}$$



1'°)*



1'°)**

y consecuentemente:

$$\left.\begin{array}{l} « x_1 (r^{P_M}) = x_1{}^M < x_1 (r^{L_M}) » \text{ [En } 1'^{\text{o}})^*] \\ « x_1 (r^{P_M}) = x_1{}^M > x_1 (r^{L_M}) » \text{ [En } 1'^{\text{o}})^{**}] \end{array}\right\}$$

se sigue (habida cuenta que en el caso 1'°) es $\varrho_{|\mathcal{E}_c} < 0$ sobre $\mathcal{E}_c$, lo que entraña que la aplicación parcial $\mu_{(x_1{}^M, x_2{}^M)}$ sea estrictamente decreciente sobre el intervalo [mín. $\{x_1 (r^{L_M}), x_1{}^M\}$, máx. $\{x_1 (r^{L_M}), x_1{}^M\}$]), que para todo $t \in$[mín. $\{x_1 (r^{L_M}), x_1{}^M\}$, máx. $\{x_1 (r^{L_M}), x_1{}^M\}$] y poniendo $T = (x_1{}^T, x_2{}^T) = (t, \mu(t, x_1{}^M, x_2{}^M))$, se verifica:

$$\left.\begin{array}{l} « x_1{}^M \leq x_1{}^T \leq x_1 (r^{L_M}) \text{ y } x_2 (r^{L_M}) \leq x_2{}^T \leq x_2{}^M » \text{ [En } 1'^{\text{o}})^*] \\ « x_1{}^M \geq x_1{}^T \geq x_1 (r^{L_M}) \text{ y } x_2 (r^{L_M}) \geq x_2{}^T \geq x_2{}^M » \text{ [En } 1'^{\text{o}})^{**}] \end{array}\right\}$$

y puesto que se tiene:

$$« (x_1{}^T \lesseqgtr x_1 (r^{L_M})) \text{ y } (x_2 (r^{L_M}) \lesseqgtr x_2{}^T) \Rightarrow (x_1{}^T \lesseqgtr x_1 (r^{L_M}) \lesseqgtr x_1 (\overset{-1}{x_2} (x_2{}^T)) =$$

$$= x_1 (r^{Q_T}) = x_1{}^{Q_T}) »$$

se deduce de todo ello que es válida la relación:

$$\left.\begin{array}{r} «(x_1{}^M \leq x_1{}^T) \text{ y } (x_2{}^T \leq x_2{}^M) \text{ y } (x_1{}^T \leq x_1{}^{Q_T} = x_1 (\overset{-1}{x_2} (x_2{}^T)))» \\ \text{[En } 1'^{\text{o}})^*] \\ «(x_1{}^M \geq x_1{}^T) \text{ y } (x_2{}^T \geq x_2{}^M) \text{ y } (x_1{}^T \geq x_1{}^{Q_T} = x_1 (\overset{-1}{x_2} (x_2{}^T)))» \\ \text{[En } 1'^{\text{o}})^{**}] \end{array}\right\} (14^{X***})$$

y teniendo en cuenta que el triángulo mixtilíneo $\triangle M P_M Q_M$ es el subconjunto de $\mathbf{R}^2$ definido, respectivamente, por:

$$\{M' = (x_1^{M'}, x_2^{M'}) \in \mathbf{R}^2 / (x_1^{M} \leq x_1^{M'}) \text{ y } (x_2^{M'} \leq x_2^{M}) \text{ y } (x_1^{M'} \leq x_1^{Q_M{}'} = \\ = x_1 (\overset{-1}{x_2} (x_2^{M'})))\} \quad [\text{En } 1'^{\text{o}})^*]$$

$$\{M' = (x_1^{M'}, x_2^{M'}) \in \mathbf{R}^2 / (x_1^{M} \geq x_1^{M'}) \text{ y } (x_2^{M'} \geq x_2^{M}) \text{ y } (x_1^{M'} \geq x_1^{Q_M{}'} = \\ = x_1 (\overset{-1}{x_2} (x_2^{M'})))\} \quad [\text{En } 1'^{\text{o}})^{**}]$$

se sigue de (14^{X***}), que en los dos subcasos $1'^{\text{o}})^*$ y $1'^{\text{o}})^{**}$ se verifica:

$$\text{«} T \in \triangle\, M\, P_M\, Q_M \text{»}$$

Puesto que $T = (t, \mu(t, x_1^M, x_2^M))$ y además $t \in [\text{mín.}\ \{x_1 (r^{L_M}), x_1^M\}, \text{máx.}\ \{x_1 (r^{L_M}), x_1^M\}]$ es arbitrario, se concluye que es válida la relación:

$$\text{«} \bigcup_{t \in [\text{mín}\{x_1(r^{L_M}), x_1^M\}, \text{máx}\{x_1(r^{L_M}), x_1^M\}]} \{(t, \mu(t, x_1^M, x_2^M))\} \subset \triangle\, M\, P_M\, Q_M \text{»}$$

Ahora bien, en virtud del TEOREMA I, se verifica:

$$\text{«} \triangle\, M\, P_M\, Q_M \subset D_c \text{»}, \ (\text{sí } M \in D_c - C)$$

$$[\text{resp. «} \triangle\, M\, P_M\, Q_M \subset \mathring{D}_c \text{»}, \ (\text{sí } M \in \mathring{D}_c - C)]$$

por lo que se obtiene, finalmente:

$$\text{«} \bigcup_{t \in [\text{mín}\{x_1(r^{L_M}), x_1^M\}, \text{máx}\{x_1(r^{L_M}), x_1^M\}]} \{(t, \mu(t, x_1^M, x_2^M))\} \subset D_c \text{»}, \ (\text{sí } M \in D_c - C)$$

$$[\text{resp. «} \bigcup_{t \in [\text{mín}\{x_1(r^{L_M}), x_1^M\}, \text{máx}\{x_1(r^{L_M}), x_1^M\}]} \{(t, \mu(t, x_1^M, x_2^M))\} \subset \mathring{D}_c \text{»}, \ (\text{sí } M \in \mathring{D}_c - C)]$$

Análogamente, y mediante razonamiento idéntico al utilizado en los casos $1.^{\text{o}})$ y $1'^{\text{o}})$, se probaría en los casos $2.^{\text{o}})$ y $2'^{\text{o}})$; $3.^{\text{o}})$ y $3'^{\text{o}})$; $4.^{\text{o}})$ y $4'^{\text{o}})$, que para todo $M \in D_c - C$ es válida la relación $\text{«} \bigcup_{t \in [\text{mín}\{x_1(r^{L_M}), x_1^M\}, \text{máx}\{x_1(r^{L_M}), x_1^M\}]} \{(t, \mu(t, x_1^M, x_2^M))\} \subset D_c \text{»}$ [resp. para todo $M \in \mathring{D}_c - C$ es válida la relación $\text{«} \bigcup_{t \in [\text{mín}\{x_1(r^{L_M}), x_1^M\}, \text{máx}\{x_1(r^{L_M}), x_1^M\}]} \{(t, \mu(t, x_1^M, x_2^M)\} \subset \mathring{D}_c \text{»}$].

Resulta así demostrado el TEOREMA II.

11. El problema de Cauchy para la ecuacion en derivadas parciales de 3.$^{\text{er}}$ orden y de tipo hiperbolico: $D_{112}\, u\, +$

$+ \varrho(x_1, x_2)(D_{122} u) = \Phi(x_1, x_2)$. — Consideremos el Problema de Cauchy representado por el sistema:

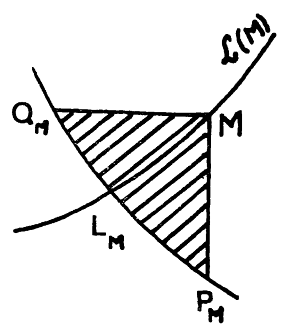
$$\left.\begin{array}{r} D_{112} u + \varrho(x_1, x_2)(D_{122} u) = \Phi(x_1, x_2) \\ \left.\begin{array}{r} u(M) = \varphi(M) \\ (D_1 u)(M) = \Psi(M) \\ (D_{12} u)(M) = \chi(M) \end{array}\right\} M \in C \end{array}\right\} \quad (15)$$

en el que $\varrho\colon G' \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ es una función numérica definida y dos veces continuamente diferenciable sobre un abierto G' de $\mathbf{R}^2$ que contiene la adherencia $\overline{G}$ de un abierto acotado G de $\mathbf{R}^2$, y el cual se supone que es regularmente convexo relativamente a la ecuación diferencial ordinaria $\dfrac{d x_2}{d x_1} = \varrho(x_1, x_2)$, ϱ además verifica que $\varrho_{|\overline{G}} \neq 0$ sobre $\overline{G}$; y $C = \bigcup\limits_{r \in [r^A, r^B]} \{(x_1(r), x_2(r))\}$ es un arco de la clase (Γ) contenido en G, relativamente a la ecuación diferencial $\dfrac{d x_2}{d x_1} = \varrho_{|G}(x_1, x_2)$; $\Phi\colon D_c \to \mathbf{R}$ es una función definida y contínua sobre el conjunto cerrado D_c (n.º 10 precedente), con restricción $\Phi_{|\mathring{D}_c}$ al abierto $\mathring{D}_c$ una vez continuamente diferenciable sobre $\mathring{D}_c$ y cuyas derivadas parciales son prolongables con continuidad a D_c, [de modo unívoco, ya que $D_c = \overline{\mathring{D}_c}$, según se demostró en el n.º 10], y finalmente, $\varphi\colon [r^A, r^B] \to \mathbf{R}$; $\Psi\colon [r^A, r^B] \to \mathbf{R}$ y $\chi\colon [r^A, r^B] \to \mathbf{R}$ son tres funciones numéricas definidas sobre el intervalo cerrado $[r^A, r^B]$, tales que φ es tres veces continuamente derivable sobre $[r^A, r^B]$, y Ψ, χ son dos veces continuamente derivables sobre $[r^A, r^B]$.

En S.P.C. (n.º 6 del Cap. I, [2]), se estableció que la función:

$$«M \in D_c \longrightarrow v^0(M) = \iint_{(\triangle M P_M Q_M)} (J(\Phi))(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2 \in \mathbf{R}»$$

[$J\colon E^{(1)}_{D_c} \longrightarrow E^{(1)}_{D_c}$, (en donde $E^{(1)}_{D_c}$ denota el espacio vectorial constituido por las funciones numéricas definidas y continuas sobre D_c cuyas restricciones al abierto $\mathring{D}_c$ son una vez contínuamente diferenciables sobre $\mathring{D}_c$, con derivadas prolongables con continuidad a D_c), es el operador lineal que asigna a cada $F \in E^{(1)}_{D_c}$, la función $J(F)$ así definida: «$(y_1, y_2) \in D_c \longrightarrow (J(F))(y_1, y_2) = \int_{x_1(h_c(y_1,y_2))}^{y_1} F(\xi_1, \mu(\xi_1,$



$y_1, y_2)) \, d\xi_1 = \int_{\mathcal{L}(y_1,y_2)} F(\xi_1, \xi_2) \, d\xi_1 \in \mathbf{R}$», es decir, la imagen de $(y_1, y_2) \in D_c$ mediante la función $J(F)$ es el valor de la integral curvilínea $\int_{\mathcal{L}(y_1,y_2)} F(\xi_1, \xi_2) \, d\xi_1$ de F a lo largo del arco $\mathcal{L}(y_1, y_2)$ de curva integral de la ecuación diferencial $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$ que pasa por $(y_1, y_2) \in D_c$ y limitado por dicho punto (y_1, y_2) y el punto $(x_1(h_c(y_1, y_2)), x_2(h_c(y_1, y_2)))$, traza de C y la curva integral considerada. La función $J(F)$ está definida y es contínua sobre D_c y su restricción $(J(F))_{|\mathring{D}_c}$ a $\mathring{D}_c$ es continuamente diferenciable sobre $\mathring{D}_c$, con derivadas prolongables con continuidad a D_c, (Véase el Apéndice que sigue a la PARTE SEGUNDA de esta Memoria)], así como la función:

$$«M \in D_c \longrightarrow w^0(M) = \varphi(Q_M) + \iint_{(\triangle M P_M Q_M)} \chi(h_c(\xi_1, \xi_2)) \, d\xi_1 \, d\xi_2 \in \mathbf{R}»$$

son contínuas sobre D_c, y sus restricciones al abierto $\mathring{D}_c$ son tres veces contínuamente diferenciables sobre $\mathring{D}_c$, verificándose que, (poniendo $u^0 = v^0 + w^0$):

$$«(\forall_{(x_1,x_2)}) \; ((x_1, x_2) \in \mathring{D}_c \Rightarrow (D_{112} u^0{}_{|\mathring{D}_c})(x_1, x_2) + $$
$$+ \varrho(x_1, x_2) \cdot (D_{122} u^0{}_{|\mathring{D}_c})(x_1, x_2) = \Phi_{|\mathring{D}_c}(x_1, x_2))»$$

y

$$«(\forall M) \; (M \in C - \{A, B\} \Rightarrow u^0{}_{|\mathring{D}_c}(M) = \varphi(M) \text{ y}$$
$$\text{y } (D_1 u^0{}_{|\mathring{D}_c})(M) = \Psi(M) \text{ y } (D_{12} u^0{}_{|\mathring{D}_c})(M) = \chi(M))»$$

siendo para todo $M \in \mathring{D}_c$, las expresiones respectivas de las derivadas primeras, segundas y terceras de v^0 y w^0, las siguientes:

$$(D_1 v^0{}_{|\mathring{D}_c})(M) = -\int_{(M P_M)} (J(\Phi))(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2$$

$$(D_2 v^0{}_{|\mathring{D}_c})(M) = -\int_{(M Q_M)} (J(\Phi))(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1$$

$$(D_{11} v^0{}_{|\mathring{D}_c})(M) = -\varrho(M)\cdot(J(\Phi))(M) - \int_{(M P_M)} ((D_2\varrho)\cdot J(\Phi))(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2 - $$
$$- \int_{(M P_M)} \Phi(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2$$

$$(D_{12} v^0{}_{|\mathring{D}_c})(M) = (J(\Phi))(M)$$

$$(D_{22} v^0{}_{|\mathring{D}_c})(M) = -\left(\frac{J(\Phi)}{\varrho}\right)(M) + \int_{(M Q_M)} \left(\frac{D_1\varrho}{\varrho^2}\cdot J(\Phi)\right)(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1 -$$
$$- \int_{(M Q_M)} \left(\frac{\Phi}{\varrho}\right)(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1$$

$$(D_{111} v^0{}_{|\mathring{D}_c})(M) = -(D_1(\varrho\cdot J(\Phi)))(M) -$$
$$- \int_{(M P_M)} (D_1((D_2\varrho)\cdot J(\Phi)))(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2 -$$
$$- \int_{(M P_M)} (D_1\Phi)(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2 - \left(\Phi\cdot\frac{x_2'}{x_1'}\right)(P_M)$$

$$(D_{112} v^0{}_{|\mathring{D}_c})(M) = \Phi(M) + \left(\Phi\cdot\frac{x'_1}{x_2' - \varrho\cdot x_1'}\right)(L_M)\cdot(\varrho\cdot\exp\{-J(D_2\varrho)\})(M) -$$
$$- (\varrho\cdot\exp\{-J(D_2\varrho)\}\cdot J((D_2\Phi)\cdot\exp\{J(D_2\varrho)\}))(M)$$

$$(D_{122} v^0{}_{|\mathring{D}_c})(M) = -\left(\Phi\cdot\frac{x_1'}{x_2' - \varrho x_1'}\right)(L_M)\cdot\exp\{-J(D_2\varrho)\}(M) +$$
$$+ (\exp\{-J(D_2\varrho)\}\cdot J((D_2\Phi)\cdot\exp\{J(D_2\varrho)\}))(M)$$

$$(D_{222} v^0{}_{|\mathring{D}_c})(M) = -\left(D_2\left(\frac{J(\Phi)}{\varrho}\right)\right)(M) +$$
$$+ \int_{(M Q_M)} \left(D_2\left(\frac{D_1\varrho}{\varrho^2}\cdot J(\Phi)\right)\right)(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1 -$$
$$- \int_{(M Q_M)} \left(D_2\left(\frac{\Phi}{\varrho}\right)\right)(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1 - \left(\frac{\Phi}{\varrho}\cdot\frac{x_1'}{x_2'}\right)(Q_M)$$

y:

$$(D_1\, w^0{}_{|\mathring{D}_c})\,(M) = \Psi\,(P_M) - \int_{(M\,P_M)} (\chi \circ h_c)\,(\xi_1,\ \xi_2)\, d\,\xi_2$$

$$(D_2\, w^0{}_{|\mathring{D}_c})\,(M) = \left(\frac{\varphi'}{x_2'}\right)(Q_M) - \left(\Psi\cdot\frac{x_1'}{x_2'}\right)(Q_M) - \int_{(M\,Q_M)} (\chi \circ h_c)\,(\xi_1,\ \xi_2)\, d\,\xi_1$$

$$(D_{11}\, w^0{}_{|\mathring{D}_c})\,(M) = \left(\frac{\Psi'}{x_1'}\right)(P_M) - \left(\chi\cdot\frac{x_2'}{x_1'}\right)(P_M) -$$

$$- \int_{(M\,P_M)} ((\chi' \circ h_c)\cdot(D_1\, h_c))\,(\xi_1,\ \xi_2)\, d\,\xi_2$$

$$(D_{12}\, w^0{}_{|\mathring{D}_c})\,(M) = (\chi \circ h_c)\,(M) = \chi\,(L_M)\ (*)$$

$$(D_{22}\, w^0{}_{|\mathring{D}_c})\,(M) = \left(\frac{1}{x_2'}\cdot\frac{d}{dr}\left(\frac{\varphi'}{x_2'}\right)\right)(Q_M) - \left(\Psi'\cdot\frac{x_1'}{x_2'}\right)(Q_M) -$$

$$- \left(\frac{\Psi}{x_2'}\cdot\frac{d}{dr}\left(\frac{x_1'}{x_2'}\right)\right)(Q_M) - \left(\chi\cdot\frac{x_1'}{x_2'}\right)(Q_M) -$$

$$- \int_{(M\,Q_M)} ((\chi' \circ h_c)\cdot(D_2\, h_c))\,(\xi_1,\ \xi_2)\, d\,\xi_1$$

$$(D_{111}\, w^0{}_{|\mathring{D}_c})\,(M) = \left(\frac{1}{x_1'}\cdot\frac{d}{dr}\left(\frac{\Psi'}{x_1'}\right)\right)(P_M) - \left(\chi'\cdot\frac{x_2'}{x_1'}\right)(P_M) -$$

$$- \left(\frac{\chi}{x_1'}\cdot\frac{d}{dr}\cdot\left(\frac{x_2'}{x_1'}\right)\right)(P_M) - \left(\chi'\cdot(D_1\, h_c)\cdot\frac{x_2'}{x_1'}\right)(P_M) -$$

$$- \int_{(M\,P_M)} (D_1\,((\chi' \circ h_c)\cdot(D_1\, h_c)))\,(\xi_1,\ \xi_2)\, d\,\xi_2$$

$$(D_{112}\, w^0{}_{|\mathring{D}_c})\,(M) = \chi'\,(L_M)\cdot(D_1\, h_c)\,(M)$$

$$(D_{122}\, w^0{}_{|\mathring{D}_c})\,(M) = \chi'\,(L_M)\cdot(D_2\, h_c)\,(M)$$

$$(D_{222}\, w^0{}_{|\mathring{D}_c})\,(M) = \left(\left(\frac{1}{x_2'}\cdot\frac{d}{dr}\right)^{(2)}\left(\frac{\varphi'}{x_2'}\right)\right)(Q_M) - \left(\frac{1}{x_2'}\cdot\frac{d}{dr}\left(\Psi'\cdot\frac{x_1'}{x_2'^2}\right)\right)(Q_M) -$$

$$- \left(\frac{1}{x_2'}\cdot\frac{d}{dr}\left(\Psi\cdot\frac{x_2'\cdot x_1'' - x_2''\cdot x_1'}{x_2'^3}\right)\right)(Q_M) -$$

(*) $h_{c|\mathcal{E}_c^a} = h_c^a$ es una integral primera de $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho\,(x_1,\ x_2)$ (n.º 7 de esta INTRODUCCION), y por tanto es constante a lo largo de la curva integral $\mathcal{L}\,(M)$ que pasa por el punto $M \in \mathring{D}_c \subset \mathcal{E}_c^a$, resultando: $(\chi \circ h_c)\,(M) = \chi\,(h_c^a\,(M)) = \chi\,(h_c^a\,(L_M)) = \chi\,(L_M)$.

$$- \left(\chi' \cdot \frac{x_1'}{x_2'^2}\right)(Q_M) - \left(\frac{\chi}{x_2'} \cdot \frac{d}{dr}\left(\frac{x_1'}{x_2'}\right)\right)(Q_M) -$$

$$- \left(\chi' \cdot (D_1 h_c) \cdot \frac{x_1'}{x_2'}\right)(Q_M) -$$

$$- \int_{(M Q_M)} (D_2 ((\chi' \circ h_c) \cdot (D_2 h_c))) (\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1$$

[Todas las integrales que figuran en las fórmulas precedentes tienen sentido, dado que según se estableció en el n.º anterior, si $M \in D_c - C$ (y trivialmente, si $M \in C$), se tiene: $\triangle M P_M Q_M \subset D_c$].

Los segundos miembros de las fórmulas anteriores definen sendas aplicaciones contínuas de D_c en $\mathbf{R}$, lo que permite prolongar con continuidad a D_c, de modo unívoco (ya que $\overline{\mathring{D}_c} = D_c$), las derivadas primeras, segundas y terceras de $u^0{}_{|\mathring{D}_c} = v^0{}_{|\mathring{D}_c} + w^0{}_{|\mathring{D}_c}$, mediante las expresiones que figuran en los segundos miembros de las fórmulas correspondientes. Denotaremos a dichas prolongaciones de las derivadas primeras, segundas y terceras de $u^0{}_{|\mathring{D}_c}$, por $D_i u^0$ $(i = 1, 2)$, $D_{jk} u^0$ $(j, k = 1, 2)$ y $D_{pqr} u^0$ $(p, q, r = 1, 2)$, respectivamente. Como consecuencia de esta prolongación por contínuidad a D_c, se verifica, que para todo $M \in D_c$, es válida la relación:

$$(D_{112} u^0)(M) + \varrho(M) \cdot (D_{122} u^0)(M) = \Phi(M)$$

así como, para todo $M \in C$, se tiene:

$$u^0(M) = \varphi(M); \quad (D_1 u^0)(M) = \Psi(M); \quad (D_{12} u^0)(M) = \chi(M)$$

por lo que $u^0 = v^0 + w^0$ es la solución al Problema de Cauchy definido por el sistema (15).

Por otro lado, dicha solución es única en el sentido de que si u^* y u^{**} son dos funciones definidas y contínuas sobre D_c, cuyas restricciones $u^*{}_{|\mathring{D}_c}$ y $u^{**}{}_{|\mathring{D}_c}$ son tres veces contínuamente diferenciables sobre $\mathring{D}_c$, con derivadas primeras, segundas y terceras prolongables con contínuidad a D_c, y tales que sean soluciones del Problema de Cauchy representado por el sistema (15), se verifica, en estas condiciones, que $u^* = u^{**}$; $\underset{(i=1,2)}{D_i u^* = D_i u^{**}}$, $\underset{(j,k=1,2)}{D_{jk} u^* = D_{jk} u^{**}}$; $\underset{(p,q,r=1,2)}{D_{pqr} u^* = D_{pqr} u^{**}}$.

En efecto, para establecer este resultado basta probar que si u es una función definida y contínua sobre D_c, cuya restricción $u_{|\mathring{D}_c}$ es tres veces contínuamente diferenciable sobre $\mathring{D}_c$, con derivadas parciales primeras, segundas y terceras prolongables con contínuidad a D_c, y que sea solución del Problema de Cauchy definido por el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} D_{112}\,u + \varrho\,(x_1,\ x_2)\cdot(D_{122}\,u) = 0 \\ \left.\begin{array}{r} u\,(M) = 0 \\ (D_1\ u)\,(M) = 0 \\ (D_{12}\,u)\,(M) = 0 \end{array}\right\}\ M \in C \end{array}\right\} \quad (15^*)$$

se verifica, en estas condiciones, que

$$u = \underset{(i=1,2)}{D_i\,u} = \underset{(j,k=1,2)}{D_{jk}\,u} = \underset{(p,q,r=1,2)}{D_{pqr}\,u} = O_{\mathcal{F}(D_c;\,\mathbf{R})}$$

[$O_{\mathcal{F}(D_c;\,\mathbf{R})}$ denota la función definida y nula idénticamente sobre D_c].

Poniendo $s = D_{12}\,u$, se sigue que s es una función definida y continua sobre D_c, cuya restricción $s_{|\mathring{D}_c}$ a $\mathring{D}_c$ es continuamente diferenciable sobre $\mathring{D}_c$, con derivadas $D_1\,(s_{|\mathring{D}_c}) = D_{112}\,(u_{|\mathring{D}_c})$ y $D_2\,(s_{|\mathring{D}_c}) = D_{122}\,(u_{|\mathring{D}_c})$ prolongables con continuidad a D_c, y que satisface al Problema de Cauchy de 1.er orden definido por:

$$\left.\begin{array}{l} D_1\,(s_{|\mathring{D}_c}) + \varrho\,(x_1,\ x_2)\cdot(D_2\,(s_{|\mathring{D}_c})) = 0 \\ \qquad\qquad (s_{|\mathring{D}_c})\,(M) = 0\}\ \ M \in C - \{A,\,B\} \end{array}\right\}$$

por lo que $s_{|\mathring{D}_c}$ es una integral primera de la ecuación diferencial ordinaria $\dfrac{d\,x_2}{d\,x_1} = \varrho\,(x_1,\ x_2)$, (15**), y en consecuencia, su valor es constante a lo largo de la porción contenida en $\mathring{D}_c$ de curva integral de (15**) pasando por un punto de $\mathring{D}_c$.

Ahora bien, en virtud del TEOREMA II del n.º precedente, para todo punto $M = (x_1{}^M,\ x_2{}^M) \in \mathring{D}_c$, y si $r^{L_M} = h_\iota\,(x_1{}^M,\ x_2{}^M)$, se verifica:

$$\text{«}(\forall t)\ (t \in [\text{mín}\ \{x_1\,(r^{L_M}),\ x_1{}^M\},\ \text{máx}\ \{x_1\,(r^{L_M}),\ x_1{}^M\}] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (t,\ \mu\,(t,\ x_1{}^M,\ x_2{}^M)) \in \mathring{D}_c)\text{»}$$

lo que entraña:

$$«(\forall t)\ (t \in [\text{mín}\ \{x_1(r^{L_M}),\ x_1{}^M\},\ \text{máx}\ \{x_1(r^{L_M}),\ x_1{}^M\}] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow s_{|\mathring{D}_c}(t,\ \mu(t,\ x_1{}^M,\ x_2{}^M)) = s_{|\mathring{D}_c}(x_1{}^M,\ x_2{}^M))»$$

y en particular; se tiene [habida cuenta que: $r^{L_M} = h_c(x_1{}^M,\ x_2{}^M) \Rightarrow$ $\Rightarrow x_2(r^{L_M}) = \mu(x_1(r^{L_M}),\ x_1{}^M, x_2{}^M)$, (n.º 9 de esta INTRODUCCIÓN)]:

$$«s_{|\mathring{D}_c}(x_1{}^M,\ x_2{}^M) = s_{|\mathring{D}_c}(x_1(r^{L_M}),\ \mu(x_1(r^{L_M}),\ x_1{}^M, x_2{}^M)) =$$
$$= s_{|\mathring{D}_c}(x_1(r^{L_M}),\ x_2(r^{L_M})) = 0»$$

y en virtud de la arbitrariedad de $M \in \mathring{D}_c$ se puede poner:

$$«(\forall M)\ (M \in \mathring{D}_c \Rightarrow s_{|\mathring{D}_c}(M) = 0)»$$

o lo que es equivalente:

$$«s_{|\mathring{D}_c} = O_{\mathcal{F}(\mathring{D}_c;\mathbf{R})}»$$

Por otra parte, suponiendo como hasta ahora $M \in \mathring{D}_c$, es válida la relación disyuntiva:

$$«M \in C \quad \text{ó} \quad M \in \mathring{D}_c - C»$$

Si $M \in C$, se tiene trivialmente $u(M) = 0$.

Si $M \in \mathring{D}_c - C \subset D_c - C$, en virtud del TEOREMA I (n.º 10), el triángulo mixtilíneo $\triangle M P_M Q_M$ está contenido en $\mathring{D}_c$, y por tanto, teniendo en cuenta que $s_{|\mathring{D}_c} = D_2(D_1 u_{|\mathring{D}_c})$, se puede aplicar la fórmula de Green, resultando:

$$«0 = \iint_{(\triangle M P_M Q_M)} s_{|\mathring{D}_c}(\xi_1,\ \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2 = \iint_{(\triangle M P_M Q_M)} (D_2(D_1 u_{|\mathring{D}_c}))\ (\xi_1,\ \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2 =$$
$$= \oint_{\widehat{M P_M Q_M}} (D_1 u_{|\mathring{D}_c})\ (\xi_1,\ \xi_2)\, d\xi_1 = \int_{(M P_M)} (D_1 u_{|\mathring{D}_c})\, d\xi_1 + \oint_{(P_M Q_M)} (D_1 u_{|\mathring{D}_c})\, d\xi_1 +$$
$$+ \int_{(Q_M M)} (D_1 u_{|\mathring{D}_c})\, d\xi_1 = \int_{(Q_M M)} (D_1 u_{|\mathring{D}_c})\, d\xi_1 = u(M) - u(Q_M) = u(M)»$$

Así pues, en todos los casos es $u(M) = 0$, y puesto que $M \in \mathring{D}_c$ es arbitrario, se concluye que:

$$«u_{|\mathring{D}_c} = O_{\mathcal{F}(\mathring{D}_c;\mathbf{R})}»$$

lo que implica:

$$«u_{|\overset{\circ}{D}_c} = \underset{(i=1,2)}{D_i} u_{|\overset{\circ}{D}_c} = \underset{(j,k=1,2)}{D_{jk}} u_{|\overset{\circ}{D}_c} = \underset{(p,q,r=1,2)}{D_{pqr}} u_{|\overset{\circ}{D}_c} = O_{\mathcal{F}(\overset{\circ}{D}_c;\mathbf{R})}»$$

y en definitiva, dado que u es continua sobre $D_c = \overline{\overset{\circ}{D}_c}$, y que $D_i u_{|\overset{\circ}{D}_c}$, $(i = 1, 2)$; $D_{jk} u_{|\overset{\circ}{D}_c}$, $(j, k = 1, 2)$ y $D_{pqr} u_{|\overset{\circ}{D}_c}$, $(p, q, r = 1, 2)$ son prolongables con continuidad a D_c, se sigue finalmente, que:

$$«u = \underset{(i=1,2)}{D_i} u = \underset{(j,k=1,2)}{D_{jk}} u = \underset{(p,q,r=1,2)}{D_{pqr}} u = O_{\mathcal{F}(D_c;\mathbf{R})}»$$

de acuerdo con lo afirmado.

Observemos que v^0, w^0 son las soluciones de los Problemas de Cauchy parcialmente homogéneos definidos, respectivamente, por los sistemas:

$$\left\{\begin{array}{l} D_{112} u + \varrho(x_1, x_2)(D_{122} u) = \Phi(x_1, x_2) \\ \left.\begin{array}{r} u(M) = 0 \\ (D_1\ u)(M) = 0 \\ (D_{12} u)(M) = 0 \end{array}\right\} M \in C \end{array}\right\} \quad (15^{***})$$

$$\left\{\begin{array}{l} D_{112} u + \varrho(x_1, x_2)(D_{122} u) = 0 \\ \left.\begin{array}{r} u(M) = \varphi(M) \\ (D_1\ u)(M) = \Psi(M) \\ (D_{12} u)(M) = \chi(M) \end{array}\right\} M \in C \end{array}\right\} \quad (15^{****})$$

Por otro lado, denotando por $E^{(3)}_{D_c}$ al subconjunto de $C(D_c;\ \mathbf{R})$ constituido por las funciones numéricas definidas y contínuas sobre D_c, cuyas restricciones a $\overset{\circ}{D}_c$ son tres veces continuamente diferenciables sobre $\overset{\circ}{D}_c$, con derivadas primeras, segundas y terceras prolongables con continuidad a D_c, se comprueba inmediatamente que $E^{(3)}_{D_c}$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial $C(D_c;\ \mathbf{R})$ de las funciones numéricas definidas y contínuas sobre D_c, y puesto que D_c es un compacto de $\mathbf{R}^2$, se verifica, consecuentemente, que para todo $u \in E^{(3)}_{D_c}$, son acotadas sobre D_c, tanto u, como las prolongaciones continuas de las derivadas primeras, segundas y terceras de $u_{|\overset{\circ}{D}_c}$. Dotemos a $E^{(3)}_c$ de la norma de la convergencia uniforme:

$$u \in E^{(3)}_c \longrightarrow \|u\|_{(D_c)} = \sup_{D_c} |u| + \max_{(i=1,2)} \{\sup_{D_c} |D_i u|\} +$$
$$+ \max_{(j,k=1,2)} \{\sup_{D_c} |D_{jk} u|\} + \max_{(p,q,r,=1,2)} \{\sup_{D_c} |D_{pqr} u|\} \in \mathbf{R}$$

$E^{(3)}_{D_c}$ dotado de esta norma es completo, es decir, $E^{(3)}_{D_c}$ es un espacio de Banach, y además, si $E^{(3)}_c \times E^{(2)}_c \times E^{(2)}_c$ es el producto de los espacios de Banach constituidos, el primero por las funciones $\varphi : [r^A, r^B] \longrightarrow \mathbf{R}$ definidas y tres veces continuamente derivables sobre $[r^A, r^B]$, y los dos últimos por las funciones $\Psi : [r^A, r^B] \longrightarrow \mathbf{R}$ y $\chi : [r^A, r^B] \longrightarrow \mathbf{R}$ definidas y dos veces continuamente derivables sobre $[r^A, r^B]$, dotados de las normas respectivas:

$$\varphi \in E^{(3)}_c \longrightarrow ||\varphi||_{(c)} = \sum_{k=0}^{3} \sup_{[r^A, r^B]} |\varphi^{(k)}| \in \mathbf{R}\,;\; \Psi \in E^{(2)}_c \longrightarrow ||\Psi||_{(c)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{2} \sup_{[r^A, r^B]} |\Psi^{(k)}| \in \mathbf{R}\,;\; \chi \in E^{(2)}_c \longrightarrow ||\chi||_{(c)} = \sum_{k=0}^{2} \sup_{[r^A, r^B]} |\chi^{(k)}| \in \mathbf{R}$$

y se provee a $E^{(3)}_c \times E^{(2)}_c \times E^{(2)}_c$ de la norma del producto topologico:

$$(\varphi, \Psi, \chi) \in E^{(3)}_c \times E^{(2)}_c \times E^{(2)}_c \longrightarrow ||(\varphi, \Psi, \chi)||_{(c)} =$$

$$= \text{máx}\,\{||\varphi||_{(c)}, ||\Psi||_{(c)}, ||\chi||_{(c)}\} \in \mathbf{R}$$

la aplicación, $\Lambda : E^{(3)}_c \times E^{(2)}_c \times E^{(2)}_c \longrightarrow E^{(3)}_{D_c}$, definida por:

$$«(\varphi, \Psi, \chi) \in E^{(3)}_c \times E^{(2)}_c \times E^{(2)}_c \longrightarrow \Lambda\,((\varphi, \Psi, \chi)) = u_{(\varphi,\Psi,\chi)} \in E^{(3)}_{D_c}»$$

[en donde $u_{(\varphi,\Psi,\chi)}$ denota la solución al Problema de Cauchy definido por el sistema (15)], es según se demostró en S.P.A. (n.^{os} 2 y 3 de PARTE SEGUNDA (pág. 264) [3]), uniformemente continua sobre $E^{(3)}_c \times E^{(2)}_c \times E^{(2)}_c$.

En particular, la aplicación lineal: $(\varphi, \Psi, \chi) \in E^{(3)}_c \times E^{(2)}_c \times E^{(2)}_c \longrightarrow$ $\longrightarrow \Lambda^0\,(\varphi, \Psi, \chi) = w^0_{(\varphi,\Psi,\chi)} \in E^{(3)}_{D_c}$, en la que $w^0_{(\varphi,\Psi,\chi)}$ denota la solución al Problema de Cauchy representado por el sistema (15****), es uniformemente contínua sobre $E^{(3)}_c \times E^{(2)}_c \times E^{(2)}_c$.

Sea ahora, $(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}) \in E^{(3)}_c \times E^{(2)}_c \times E^{(2)}_c$ y $\widetilde{w}^0$ la correspondiente solución al Problema de Cauchy definido por:

$$\left.\begin{array}{l} D_{112}\,u + \varrho\,(x_1, x_2)\cdot(D_{122}\,u) = 0 \\ \left.\begin{array}{r} u\,(M) = \widetilde{\varphi}\,(M) \\ (D_1\;u)\,(M) = \widetilde{\Psi}\,(M) \\ (D_{12}\,u)\,(M) = \widetilde{\chi}\,(M) \end{array}\right\}\; M \in C \end{array}\right\} \quad (16)$$

y sea $\mathcal{A} \subset \mathbf{R}^8$ un abierto de $\mathbf{R}^8$ conteniendo el grafo $\widetilde{\mathcal{F}}^0$ de la aplicación:

$$M \in D_c \longrightarrow (\widetilde{w}^0 (M),\ (D_1 \widetilde{w}^0) (M),\ (D_2 \widetilde{w}^0) (M),\ (D_{11} \widetilde{w}^0) (M),\\ (D_{12} \widetilde{w}^0) (M),\ (D_{22} \widetilde{w}^0) (M)) \in \mathbf{R}^6$$

[En donde se suponen prolongadas a D_c, de acuerdo con lo indicado anteriormente, las derivadas primeras y segundas de $\widetilde{w}^0{}_{|\mathring{D}_c}$], aplicación que es contínua sobre D_c, y dado que D_c, por ser cerrado y acotado en $\mathbf{R}^2$ (n.º 10 precedente), es por tanto, un compacto de $\mathbf{R}^2$, se sigue que $\widetilde{\mathcal{F}}^0$ es asimismo un compacto de $\mathbf{R}^8$ (Chap. I, § 4, n.º 1, Corol. 2 de Prop. 1, [5]), y en consecuencia, se puede determinar un $r \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$, tal que:

$$\text{«}(\forall H)\ (H \in \widetilde{\mathcal{F}}^0 \Rightarrow \bar{B}_r (H) \subset \mathcal{A})\text{»} \tag{16*}$$

El conjunto $\mathcal{H}^0 = \bigcup_{H \in \widetilde{\mathcal{F}}^0} \bar{B}_r (H)$ es un compacto de $\mathbf{R}^8$ (Demostración similar a la efectuada al principio del n.º 4 de esta INTRODUCCIÓN, para establecer la compacidad del conjunto $\bigcup_{\vec{y} \in F} \bar{B}_{r/2} (\vec{y})$ que allí se consideraba), y está contenido en $\mathcal{A}$.

Consideremos la aplicación $q : D_c \times (E_c^{(3)} \times E_c^{(2)} \times E_c^{(2)}) \longrightarrow \mathbf{R}^8$ definida por:

$$(M,\ (\varphi,\ \Psi,\ \chi)) \in D_c \times (E_c^{(3)} \times E_c^{(2)} \times E_c^{(2)}) \longrightarrow q\,(M,\ (\varphi,\ \Psi,\ \chi)) =\\ = (M,\ w^0{}_{(\varphi,\Psi,\chi)} (M),\ \underset{(i=1,2)}{(D_i\, w^0{}_{(\varphi,\Psi,\chi)})} (M),\ \underset{(j,k=1,2,j\leq k)}{(D_{jk}\, w^0{}_{(\varphi,\Psi,\chi)})} (M)) \in \mathbf{R}^8$$

en donde, $w^0{}_{(\varphi,\Psi,\chi)} = \Lambda^{(0)} (\varphi,\ \Psi,\ \chi)$ denota la solución al problema de Cauchy definido por el sistema (15****).

Dicha aplicación es tal, que la familia de aplicaciones parciales $(q_{(M)})_{M \in D_c}$, [Para todo $M \in D_c$, $q_{(M)}$ denota la aplicación parcial determinada por q relativamente al valor M del primer argumento, es decir, $q_{(M)} : E_c^{(3)} \times E_c^{(2)} \times E_c^{(2)} \longrightarrow \mathbf{R}^8$ es la aplicación así definida: $(\varphi,\ \Psi,\ \chi) \in E_c^{(3)} \times E_c^{(2)} \times E_c^{(2)} \longrightarrow q_{(M)} (\varphi,\ \Psi,\ \chi) = q\,(M,\ (\varphi,\ \Psi,\ \chi)) \in \mathbf{R}^8$] es equiuniformemente contínua sobre $E_c^{(3)} \times E_c^{(2)} \times E_c^{(2)}$. En efecto, la aplicación ya considerada, $\Lambda^{(0)} : E_c^{(3)} \times E_c^{(2)} \times E_c^{(2)} \longrightarrow E_{D_c}^{(3)}$, es uniformemente continua sobre $E_c^{(3)} \times E_c^{(2)} \times E_c^{(2)}$, por lo que, para todo $\varepsilon \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$, se puede determinar un $\eta \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$, tal que:

$$«(\forall_{((\varphi,\Psi,\chi),(\varphi^*,\Psi^*,\chi^*))})\ (((\varphi,\ \Psi,\ \chi),\ (\varphi^*,\ \Psi^*,\ \chi^*))\in(E_c^{(3)}\times E_c^{(2)}\times E_c^{(2)})\times$$
$$\times\ (E_c^{(3)}\times E_c^{(2)}\times E_c^{(2)})\ \text{y}\ ||(\varphi,\ \Psi,\ \chi)-(\varphi^*,\ \Psi^*,\ \chi^*)||<\eta\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ ||\Lambda^0(\varphi,\ \Psi,\ \chi)-\Lambda^{(0)}(\varphi^*,\ \Psi^*,\ \chi^*)||_{(D_c)}=||w^0-w^{*0}||_{(D_c)}<\frac{\varepsilon}{6}\Big)»$$

en donde, para abreviar, se ha puesto $w^0=\Lambda^{(0)}(\varphi,\ \Psi,\ \chi)$ y $w^{*0}=\Lambda^{(0)}(\varphi^*,\ \Psi^*,\ \chi^*)$. Se sigue de ello, que:

$$«(\forall M)\ (M\in D_c\Leftarrow||q_{(M)}(\varphi,\Psi,\chi)-q_{(M)}(\varphi^*,\Psi^*,\chi^*)||=||q(M,(\varphi,\Psi,\chi))-$$
$$-\ q\,(M,(\varphi^*,\ \Psi^*,\ \chi^*))||=||(M,\ w^0(M),\ \underset{(i=1,2)}{(D_i\ w^0)}(M),\ \underset{(j,k=1,2;j\leq k)}{(D_{jk}\ w^0)}(M))\ -$$
$$-\ (M,\ w^{*0}(M),\ \underset{(i=1,2)}{(D_i\ w^{*0})}(M),\ \underset{(j,k=1,2;\ j\leq k)}{(D_{jk}\ w^{*0})}(M))||=[(w^0(M)\ -$$
$$-\ w^{*0}(M))^2+\sum_{i=1,2}((D_i\ w^0)(M)-(D_i\ w^{*0})(M))^2+$$
$$+\sum_{\substack{j,k=1,2\\(j\leq k)}}((D_{jk}\ w^0)(M)-(D_{jk}\ w^{*0})(M))^2]^{1/2}\leq|w^0(M)-w^{*0}(M)|+$$
$$+\sum_{i=1,2}|(D_i\ w^0)(M)-(D_i\ w^{*0})(M)|+\sum_{\substack{j,k=1,2\\(j\leq k)}}|(D_{jk}\ w^0)(M)\ -$$
$$-\ (D_{jk}\ w^{*0})(M)|\leq 6\cdot||w^0-w^{*0}||_{(D_c)}<6\cdot\varepsilon/6=\varepsilon)»$$

Así pues, es válida la relación:

$$«(\forall\varepsilon)\ (\varepsilon\in\mathbf{R}^+-\{0\}\Rightarrow(\exists\eta)\ (\eta\in\mathbf{R}^+-\{0\}\ \text{y}\ (\forall(M,(\varphi,\Psi,\chi),(\varphi^*,\Psi^*,\chi^*)))$$
$$((M,(\varphi,\Psi,\chi),(\varphi^*,\Psi^*,\chi^*))\in D_c\times(E_c^{(3)}\times E_c^{(2)}\times E_c^{(2)})\times(E_c^{(3)}\times E_c^{(2)}\times E_c^{(2)})\ \text{y}$$
$$\text{y}\ ||(\varphi,\ \Psi,\ \chi)-(\varphi^*,\ \Psi^*,\ \chi^*)||_{(c)}<\eta\Rightarrow||q_{(M)}(\varphi,\ \Psi,\ \chi)\ -$$
$$-\ q_{(M)}(\varphi^*,\ \Psi^*,\ \chi^*)||<\varepsilon)))»$$

lo que prueba lo afirmado.

En particular, se verifica:

$$«(\exists\ \sigma_r)\ (\sigma_r\in\mathbf{R}^+-\{0\}\ \text{y}\ (\forall\ (M,\ (\varphi,\ \Psi,\ \chi)))\ ((M,\ (\varphi,\ \Psi,\ \chi))\in D_c\times$$
$$\times\ B_{\sigma_r}(\tilde{\varphi},\ \tilde{\Psi},\ \tilde{\chi})\Rightarrow||q\,(M,\ (\varphi,\ \Psi,\ \chi))-q\,(M,\ (\tilde{\varphi},\ \tilde{\Psi},\ \tilde{\chi}))||<\frac{r}{2}\Big)\Big)»$$

es decir:

$$«(\exists\ \sigma_r)\ (\sigma_r\in\mathbf{R}^+-\{0\}\ \text{y}\ (\forall\ (\varphi,\ \Psi,\ \chi))\ ((\varphi,\ \Psi,\ \chi)\in B_{\sigma_r}(\tilde{\varphi},\ \tilde{\Psi},\ \tilde{\chi})\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(\forall\ M)\ (M\in D_c\Rightarrow q\,(M,\ (\varphi,\ \Psi,\ \chi))\in B_{r/2}(\tilde{H}_M))))»$$

en donde, para abreviar, para cada $M \in D_c$, se pone:

$$\text{«}\widetilde{H}_M = (M, \widetilde{w}^0(M), \underset{(i=1,2)}{(D_i \widetilde{w}^0)}(M), \underset{(j,k=1,2;j\leq k)}{(D_{jk}\widetilde{w}^0)}(M))\text{»}$$

Si para cada $(\varphi, \Psi, \chi) \in E_c^{(3)} \times E_c^{(2)} \times E_c^{(2)}$, denotamos por $\vec{g}_{(c,\varphi,\psi,\chi)}$ a la aplicación parcial: $M \in D_c \to \vec{g}_{(c,\varphi,\psi,\chi)}(M) = q(M, (\varphi, \Psi, \chi)) \in \mathbf{R}^8$, determinada por q relativamente a los valores φ, Ψ, χ de sus tres últimos argumentos, la relación anterior se expresa en la forma:

$$\text{«}(\exists\,\sigma_r)\,(\sigma_r \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \text{ y } (\forall\,(\varphi, \Psi, \chi))\,((\varphi, \Psi, \chi) \in B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\forall\,M)\,(M \in D_c \Rightarrow \vec{g}_{(c,\varphi,\psi,\chi)}(M) \in B_{r/2}(\widetilde{H}_M))))\text{»} \quad (16^{**})$$

Sean ahora $(\nu, \varkappa) \in [\mathbf{R}^+ - \{0\}] \times [\mathbf{R}^+ - \{0\}]$, dos números reales estrictamente positivos. En virtud de la continuidad uniforme sobre $[r^A, r^B]$ de las funciones:

$$r \in [r^A, r^B] \to x_1(r) \in \mathbf{R} \text{ y } r \in [r^A, r^B] \to x_2(r) \in \mathbf{R},$$

el subconjunto de $\mathbf{R}^+ - \{0\}$:

$$\text{«}\Delta^{(\nu,\varkappa)} = \{\delta \in]\,0, r^B - r^A] / (\forall\,(r, r^*))\,((r, r^*) \in [r^A, r^B] \times [r^A, r^B] \text{ y}$$
$$|r - r^*| < \delta \Rightarrow |x_1(r) - x_1(r^*)| < \nu \text{ y } |x_2(r) - x_2(r^*)| < \varkappa)\}\text{»}$$

es no vacio, y está evidentemente mayorado, por lo que:

$$\text{«}0 < \delta^{(\nu,\varkappa)} = \sup.\ \Delta^{(\nu,\varkappa)} < +\infty\text{»}$$

Puesto que:

$$\left.\begin{array}{c}
\text{«}(\forall\,(r, r^*))\,((r, r^*) \in [r^A, r^B] \times [r^A, r^B] \text{ y } |r - r^*| < \delta^{(\nu,\varkappa)} \Rightarrow \\
\Rightarrow (\exists\,\delta)\,(\delta \in \Delta^{(\nu,\varkappa)} \text{ y } |r - r^*| < \delta \leq \delta^{(\nu,\varkappa)}))\text{»} \\
\text{y} \\
\text{«}\delta \in \Delta^{(\nu,\varkappa)} \text{ y } |r - r^*| < \delta \leq \delta^{(\nu,\varkappa)} \Rightarrow |x_1(r) - x_1(r^*)| < \nu \text{ y} \\
\text{y } |x_2(r) - x_2(r^*)| < \varkappa\text{»}
\end{array}\right\}$$

se sigue, en consecuencia, que:

$$\text{«}(\forall\,(r, r^*))\,((r, r^*) \in [r^A, r^B] \times [r^A, r^B] \text{ y } |r - r^*| < \delta^{(\nu,\varkappa)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |x_1(r) - x_1(r^*)| < \nu \text{ y } |x_2(r) - x_2(r^*)| < \varkappa)\text{»}$$

Sea $\mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)}$ la familia de subarcos de C definida por:

$$\mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)} = \{C^{(\nu,\varkappa)} \in \mathfrak{P}(C) / (\exists\, (r', r'')) \; ((r', r'') \in [r^A, r^B] \times [r^A, r^B] \text{ y } 0 < \\ < r'' - r' < \delta^{(\nu,\varkappa)} \text{ y } C^{(\nu,\varkappa)} = \bigcup_{r \in [r', r'']} \{(x_1(r), x_2(r))\})\}$$

A todo $C^{(\nu,\varkappa)} \in \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)}$, se le denominará «un sub-arco de C del tipo $(\nu, \varkappa)$», y evidentemente, cada $C^{(\nu,\varkappa)} \in \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)}$ es un arco de la clase (Γ) contenido en G relativamente a la ecuación diferencial ordinaria $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho_{|G}(x_1, x_2)$.

[Observemos que, puesto que, para todo $C^{(\nu,\varkappa)} = \bigcup_{r \in [r', r'']} \{(x_1(r), x_2(r))\} \in \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)}$ se verifica: $D_{c^{(\nu,\varkappa)}} \subset [\text{mín. } \{x_1(r'), x_1(r'')\}, \text{ máx. } \{x_1(r'), x_1(r'')\}] \times \times [\text{mín. } \{x_2(r'), x_2(r'')\}, \text{ máx. } \{x_2(r'), x_2(r'')\}]$, es válida, consecuentemente, la relación: $(\forall\, (\vec{x}, \vec{x}^*)) \; ((\vec{x}, \vec{x}^*) \in D_{c^{(\nu,\varkappa)}} \times D_{c^{(\nu,\varkappa)}} \Rightarrow \Rightarrow |x_1 - x_1^*| < \nu$ y $|x_2 - x_2^*| < \varkappa)$ y además, dado que, evidentemente, se tiene: $(\forall\, C^{(\nu,\varkappa)}) \; (C^{(\nu,\varkappa)} \in \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)} \Rightarrow D_{c^{(\nu,\varkappa)}} \subset D_c \subset \mathcal{E}_c \cap R_{AB})$, se verifica, por tanto: «$\bigcup_{C^{(\nu,\varkappa)} \in \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)}} D_{c^{(\nu,\varkappa)}} \subset D_c \subset \mathcal{E}_c \cap R_{AB}$»].

(Continuará)