EL DIAGRAMA DE LA TRICRUZ
Y EL TEOREMA DE HOMOLOGIA

por

E. G-RODEJA F.

El diagrama de la «tricruz» o de los veintisiete es la generalización del diagrama de la cruz o de los nueve.

Los lemas se estudian en categorías exactas y su exposición permite, en esta nota, estudiar las traslaciones de cruces y generalizar de dos modos el teorema de homología.

El teorema clásico corresponde al caso en que las cruces trasladadas tengan ceros como vértices superior-derecho.

La notación y el lenguaje empleado son los de la tesis del Prof. A. R-GRANDJEAN L-VALCARCEL, Homología en Categorías exactas [1], y todas las referencias de esta nota se refieren a dicha memoria.

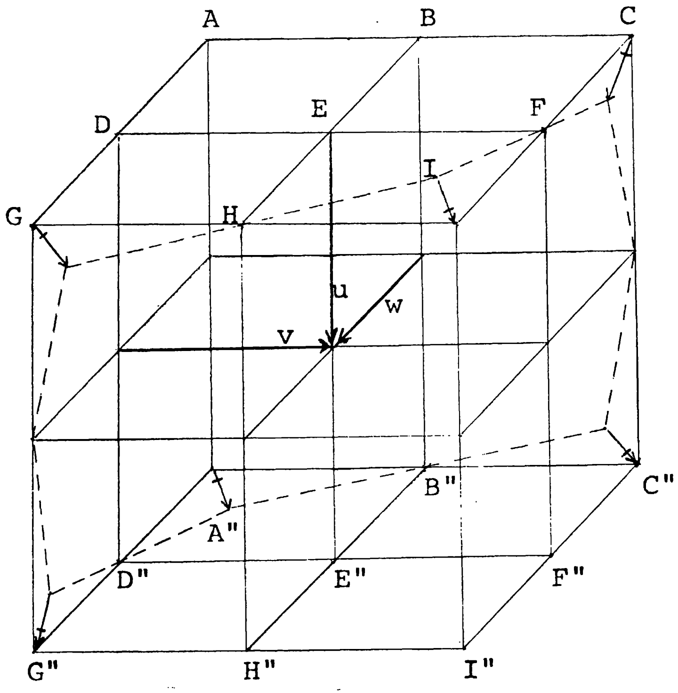
* * *

I. El diagrama de los veintisiete, de las tres cruces o abreviadamente de la «tricruz», es el diagrama que se obtiene a partir de tres flechas mónicas del mismo rango, sus conúcleos, los cuadrados cartesianos de los pares de flechas mónicas, los cuadrados cocartesianos de los pares de flechas épicas, y la descomposición de los productos de flechas mónica y épica en épica y mónica.

El diagrama que se obtiene consta de 27 objetos, 21 series exactas cortas y 6 cero-series, tres cruces de centro el centro del cubo. Con otros seis puntos se completan seis cruces en las caras del cubo.

La deducción de las propiedades del diagrama es casi inmediata utilizando el lema de la cruz (3.1.1) y, con sus duales, los teoremas de los cuadrados cartesianos, en particular (2.2.3):

1)



En el diagrama

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "1"] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "2"] & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

si el cuadrado 2 es cartesiano, el rectángulo es cartesiano si y sólo si si es cartesiano el cuadrado 1.

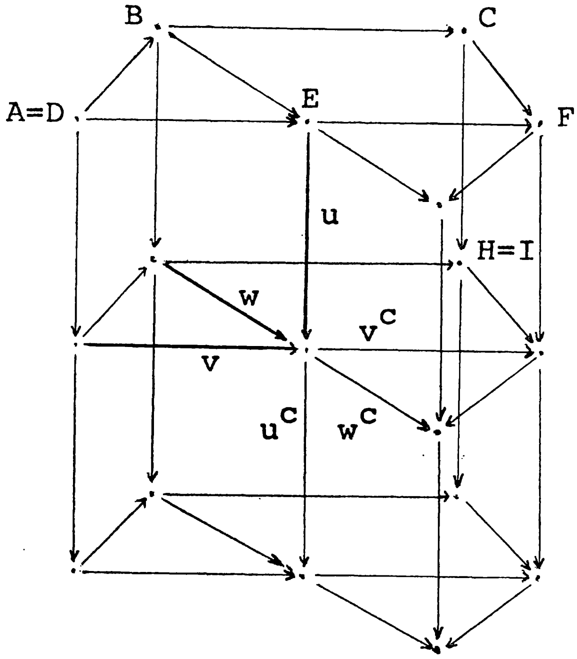
Una tricruz en que las caras del cubo sean cruces (para lo que es suficiente que lo sea una de ellas) se llamará tricruz distributiva.

* * *

II. Casos particulares de la «tricruz» corresponden a diagramas con algunos de sus vértices cero, por ejemplo, en esta nota se utilizará una «tricruz particular», en la que el subobjeto v es menor que w (v se factoriza a través de w), o lo que es equivalente w^C se factoriza a través de v^C.

La arista vertical anterior-izquierda del cubo tendrá como vértices tres ceros, lo que da lugar a que seis flechas sean 1 (isomorfismos), lo que permite identificar, como es habitual, el dominio y el rango de cada uno.

2)

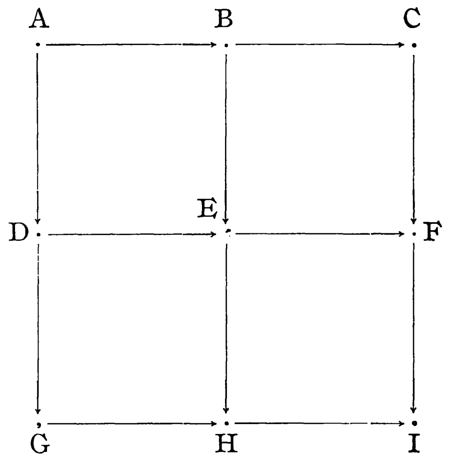


La tricruz es distributiva. Todas las series son exactas cortas.

* * *

III. Una traslación $\pi: C \to C'$ entre dos cruces C y C'

3)



está formada por nueve flechas:

$$\pi :=(a,b,c,d,e,f,g,h,i),$$

cuyos nombres corresponden a los de su dominio y rango:

$$a : A \longrightarrow A', \qquad b : B \longrightarrow B', \ldots$$

* * *

IV. Sea $\pi' : C' \longrightarrow C''$ una traslación b', e'-épica (con las flechas b' y e' épicas). La flecha b' queda determinada por la flecha e', toda vez que:

$$b' = (e'v')^{ck}.$$

Si se considera la tricruz $[e'^k, u', v']$, formada a partir de dichas flechas mónicas, sea C_0'' la cruz de la cara inferior del cubo, y

$$\pi_0' : C' \longrightarrow C'', \pi_0' := (a_0', b_0', c_0', \ldots),$$

la traslación determinada por la tricruz. Se comprueba fácilmente que además de e' las traslaciones π' y π_0' tienen comunes las flechas:

$$b' = b_0', \ h' = h_0'.$$

Las cruces C'' y C_0'' tienen el brazo:

$$\begin{array}{l} B'' = B_0'' \\ \Big\downarrow \ v'' = v_0'' \\ E'' = E_0'' \\ \Big\downarrow \\ H'' = H_0'' \end{array}$$

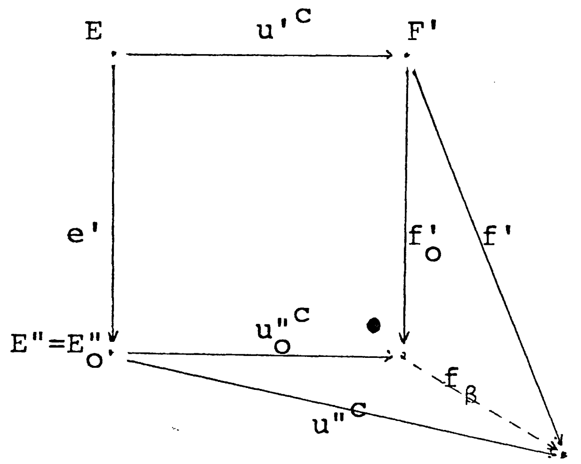
La traslación b', e'-épica queda determinada si se conoce además de la flecha e' la flecha f' necesariamente épica.

La consideración de que el cuadrado

$$f_0' \cdot u'^c = u''^c \cdot e'$$

perteneciente a la tricruz es cocartesiano conduce a

4)



que la flecha f' se factoriza a través de f_0',

$$f' = f_\beta \cdot f_0'.$$

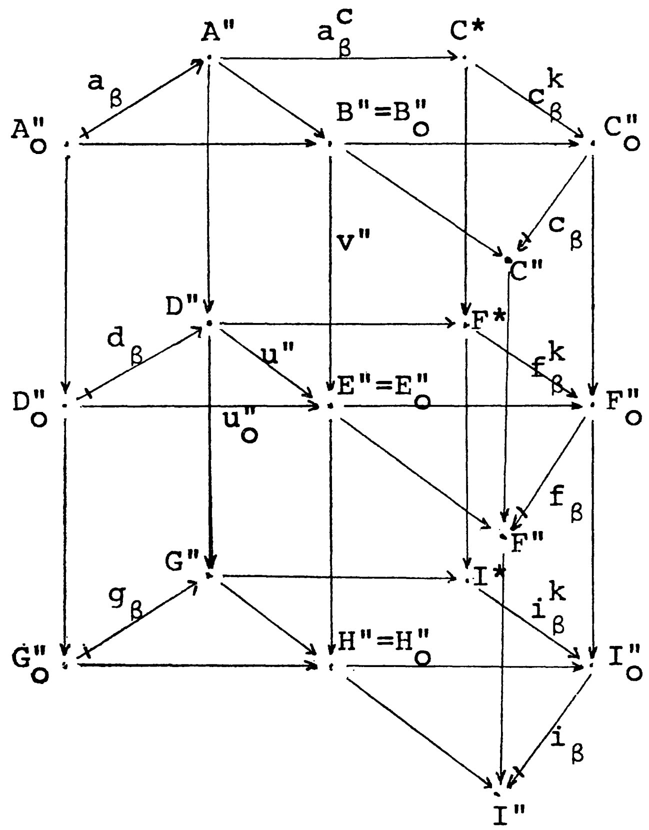
La cruz C'' queda determinada a partir de C_0'' por el conocimiento de f_β, toda vez que:

$v'' = v_0''$ y $u''^c = f_\beta \cdot u_0''^c$ son dos brazos de C''.

Las cruces C'' y C_0'' con un brazo común forman una «tricruz particular» (fig. 2), determinada por las flechas:

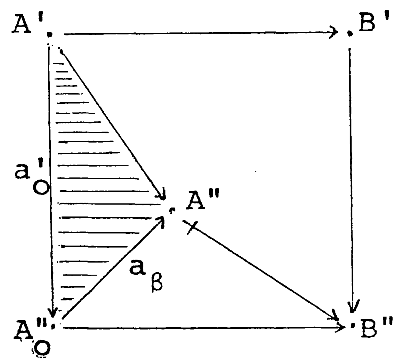
$$[v'' = v_0'', u_0'', u''].$$

5)



Se obtiene la igualdad: $a' = a_\beta a_0'$, como consecuencia de la conmutatividad

6)



de los dos cuadriláteros y el triángulo de la figura y de ser la flecha $A'' B''$ mónica.

De modo análogo se deduce:

$$d' = d_\beta \cdot d_0', \quad g' = g_\beta \cdot g_0', \quad c' = c_\beta \cdot c_0', \quad f' = f_\beta \cdot f_0', \quad i' = i_\beta \cdot i_0',$$

de donde:

$$d'^c = d^c_\beta, \quad g'^c = g^c_\beta,$$

toda vez que:

$$d_0', \; g_0'$$

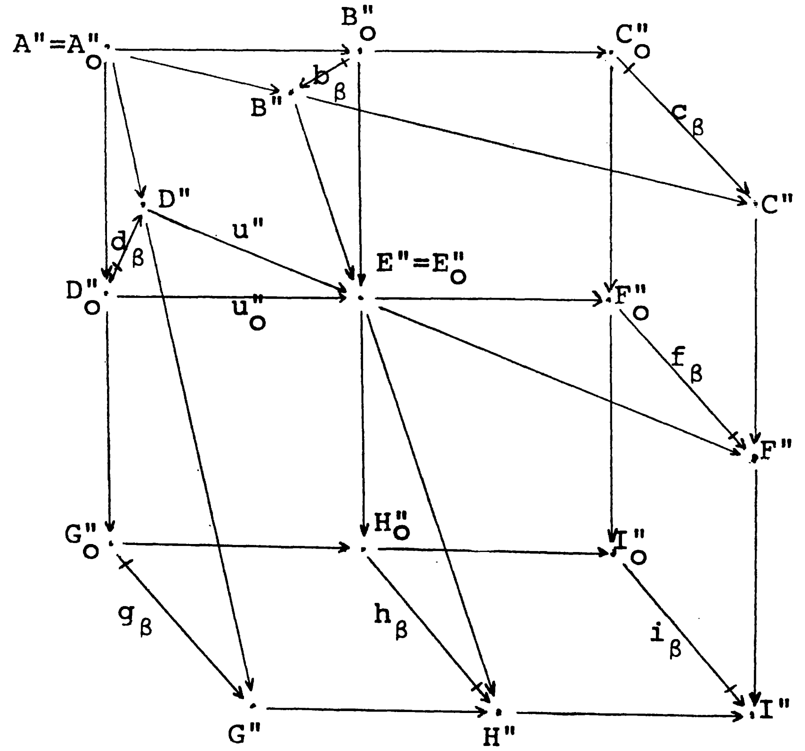
son flechas épicas de la tricruz $[e'^k, u', v']$.

En una tricruz distributiva, a_0' es épica, $a'^c = a^c_\beta$.

* * *

V. Sea $\pi' : C' \longrightarrow C''$ una traslación a', e'-épica, se obtiene $a' = a_0'$, en este caso las cruces C'' y C_0'' tiene común los puntos $A'' = A_0''$ y $E'' = E_0''$.

La tricruz $[e'^k, u', v']$ es distributiva.

7) 

$$f' = f_\beta \cdot f_0', \quad h' = h_\beta \cdot h_0', \quad i' = i_\beta \cdot i_0'.$$

Sean c_β y g_β las flechas tales que:

8)
$$\begin{tikzcd} B''_0 \arrow[r] \arrow[d, "b_\beta"'] \arrow[dr, phantom, "\blacksquare \quad \bullet"] & C''_0 \arrow[d, "c_\beta"] \\ B'' \arrow[r] & C'' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} D''_0 \arrow[r] \arrow[d, "d_\beta"'] \arrow[dr, phantom, "\blacksquare \quad \bullet"] & G''_0 \arrow[d, "g_\beta"] \\ D'' \arrow[r] & G'' \end{tikzcd}$$

son cuadrados bicartesianos.

Se deduce ($B_0'' \longrightarrow C_0''$, $D_0'' \longrightarrow G_0''$ épicas) la conmutatividad de los cuadrados:

9)
$$\begin{tikzcd} C''_0 \arrow[r, "c_\beta"] \arrow[d] & C'' \arrow[d] \\ F''_0 \arrow[r, "f_\beta"'] & F'' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G''_0 \arrow[r, "g_\beta"] \arrow[d] & G'' \arrow[d] \\ H''_0 \arrow[r, "h_\beta"'] & H'' \end{tikzcd}$$

De la construcción de la homología de la cero-serie, $D_0'' \longrightarrow E'' \longrightarrow F''$, y de ser bicartesiano el cuadrado de lados paralelos d_β y g_β, se obtiene:

$$\overline{F}'' := \ker f_\beta = \operatorname{coker} d_\beta = \operatorname{coker} g_\beta .$$

Análogamente:

$$\overline{H}'' := \ker h_\beta = \operatorname{coker} b_\beta = \operatorname{coker} c_\beta .$$

Los cuadrados épicos (de flechas épicas):

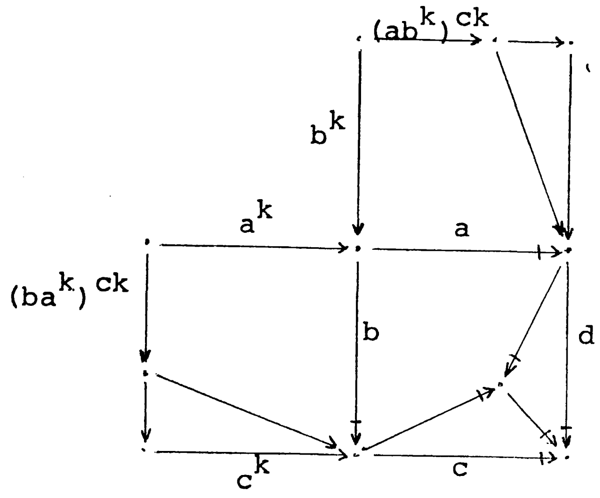
10)
$$\begin{tikzcd} F''_0 \arrow[r, "f_\beta"] \arrow[d] & F'' \arrow[d] \\ I''_0 \arrow[r, "i_\beta"'] & I'' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H''_0 \arrow[r, "h_\beta"] \arrow[d] & H'' \arrow[d] \\ I''_0 \arrow[r, "i_\beta"'] & I'' \end{tikzcd}$$

tienen la propiedad de que la flecha que une los núcleos de dos lados paralelos son mónicas (c_β y g_β son mónicas), por tanto, lo son también:

$$\begin{tikzcd} & \bar{F}'' \arrow[d, tail, "\bar{f}''"] \\ \bar{H}'' \arrow[r, tail, "\bar{h}''"'] & \bar{I}'' := \ker i_\beta \end{tikzcd}$$

Observación: La condición para que las flechas que unen los núcleos de los lados paralelos de un cuadrado épico $d.\,a = c.\,b$,

11)



sean mónicas, es equivalente a que la cruz construida con las flechas épicas a y b sea una cruz de counión (3.5.7),

12)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdot \arrow[r, "1"] \arrow[d, "b^k"] & \cdot \arrow[d, tail] \\
\cdot \arrow[r, "a^k"] \arrow[d, "1"'] & \cdot \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"] & \cdot \arrow[d] \\
\cdot \arrow[r, tail] & \cdot \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\bullet"] & \cdot
\end{tikzcd}
\qquad a^k \cap b^k = 0$$

El cuadrado épico cocartesiano

13)

$$\begin{tikzcd}
E'' \arrow[r] \arrow[d] & F''_o \arrow[r, "f_\beta"] \arrow[d] & F'' \arrow[d] \\
H''_o \arrow[r] \arrow[d, "h_\beta"'] \arrow[ur, phantom, "\bullet"] & I_o \arrow[r, "p"'] \arrow[d, "q"] \arrow[ur, phantom, "\bullet"] & \cdot \arrow[d, "n"] \\
H'' \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\bullet"] & \cdot \arrow[r, "m"'] \arrow[ur, phantom, "\bullet"] & I''
\end{tikzcd}$$

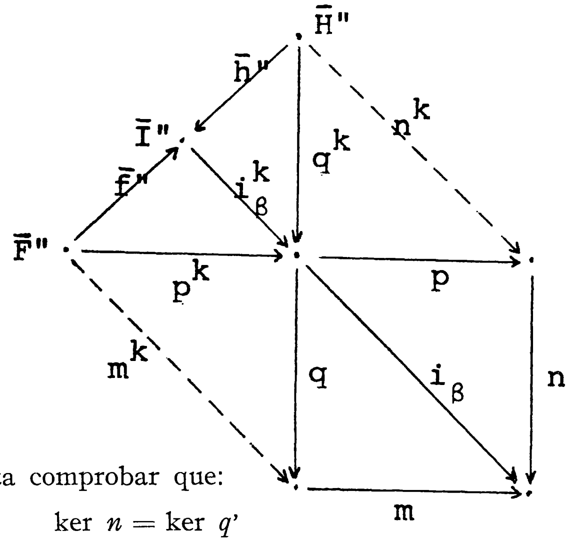
se puede descomponer en cuatro cuadrados cocartesianos. La observación anterior conduce al resultado:

$$\ker p = \ker f_\beta = : \bar{F}''$$

$$\ker q = \ker h_\beta = : \bar{H}''.$$

La cruz construida con las flechas épicas p y q es una cruz de counión

14)



Para demostrarlo basta comprobar que:

$$\ker n = \ker q'$$

$$n^k = p \,.\, q^k.$$

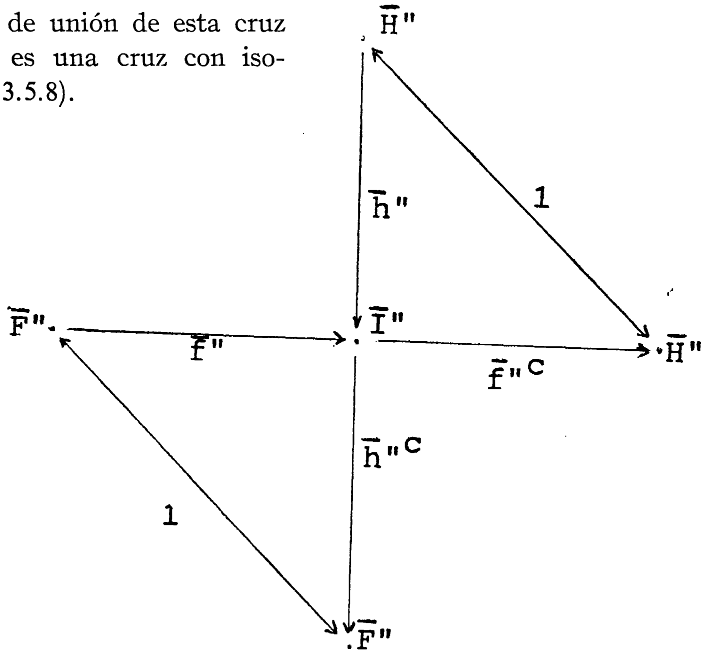
Ker n es la homología de la cero-serie

$$C_0'' \longrightarrow F'' \longrightarrow I'',$$

$$\ker n = \operatorname{coker} c_\beta = \bar{H}'' = \ker q.$$

La cruz de unión de esta cruz de counión es una cruz con isomorfismos (3.5.8).

15)



* * *

VI. Sea

$$\cdots \longrightarrow E_{n-1} \xrightarrow{\mu_n} E_n \xrightarrow{\mu_{n+1}} E_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

un complejo (no necesariamente de cero-series), $F_{n-1} = B_n$, $F_n = B_{n+1}$ los puntos medios de sus flechas,

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & E_{n-1} \arrow[r, tail, two heads] & B_n \arrow[r, tail, "v_n"] & E_n \arrow[r, two heads, "u_n^c"] & F_n \arrow[r, tail] & E_{n+1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Una serie exacta corta de complejos (no necesariamente de cero-series),

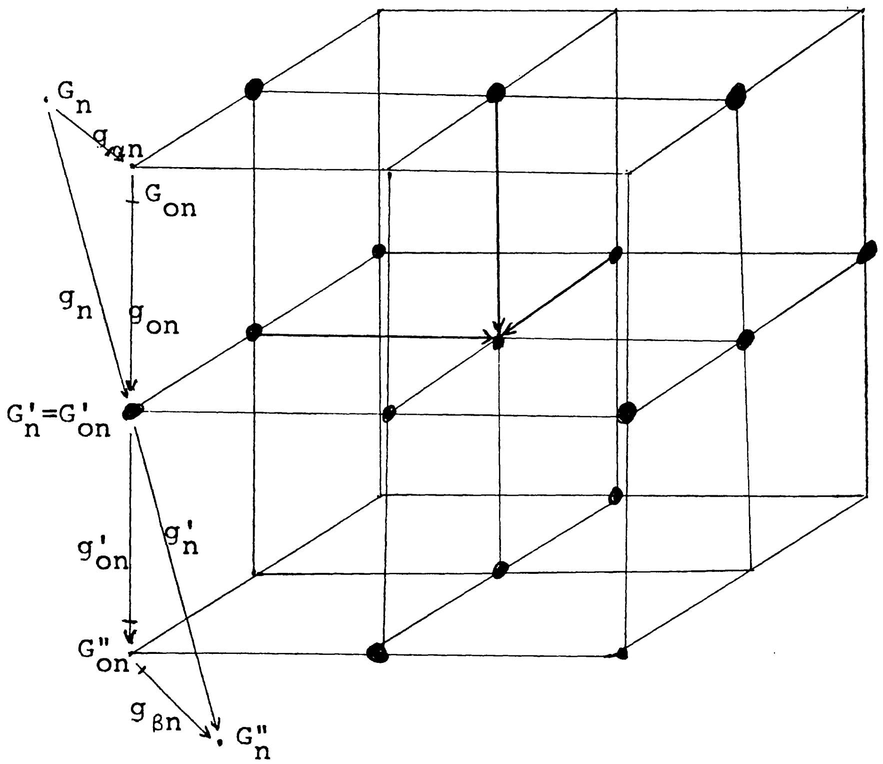
16)
$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & E_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, tail, "e_{n-1}"] & E_n \arrow[r] \arrow[d, tail, "e_n"] & E_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, tail, "e_{n+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & E'_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, two heads, "e'_{n-1}"] & E'_n \arrow[r] \arrow[d, two heads, "e'_n"] & E'_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, two heads, "e'_{n+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & E''_{n-1} \arrow[r] & E''_n \arrow[r] & E''_{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

determina traslaciones de las cruces C_n $[u_n, v_n]$, C_n' $[u_n', v_n']$, C_n'' $[u_n'', v_n'']$.

17)
$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & E_{n-1} \arrow[r] \arrow[dd] & B_n \arrow[r, "v_n"] \arrow[d, "b_n"] & E_n \arrow[r, "u_n^c"] \arrow[d, "e_n"] & F_n \arrow[r] \arrow[d, "f_n"] & E_{n+1} \arrow[r] \arrow[dd] & \cdots \\
 & & B'_n \arrow[d] & E'_n \arrow[d] & F'_n \arrow[d] & & \\
\cdots \arrow[r] & E'_{n-1} \arrow[r] \arrow[dd] & \cdot \arrow[r, "v'_n"] \arrow[dd, "b'_n"] & \cdot \arrow[r, "u'^c_n"] \arrow[dd, "e'_n"] & \cdot \arrow[r] \arrow[dd, "f'_n"] & E'_{n+1} \arrow[r] \arrow[dd] & \cdots \\
 & & & & & & \\
\cdots \arrow[r] & E''_{n-1} \arrow[r] & B''_n \arrow[r, "v''_n"] & E''_n \arrow[r, "u''_n"] & F''_n \arrow[r] & E''_{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

La traslación $\pi_n : C_n \longrightarrow C_n'$ es e_n, f_n-mónica (dual de IV). La traslación $\pi_n' : C_n' \longrightarrow C_n''$ es b_n', e_n'-épica (IV).

La tricruz $[e_n, u_n', v_n']$ coincide con las traslaciones: $\pi_n : C_n \longrightarrow C_n'$, $\pi_n' : C_n' \longrightarrow C_n''$ en los puntos indicados en la figura:



Siendo $G_n = H(v_n, u_n^c)$, $G_n' = H(v_n', u_n'^c)$, $G_n'' = H(v_n'', u_n''^c)$, (3.1.3), la serie de homología:

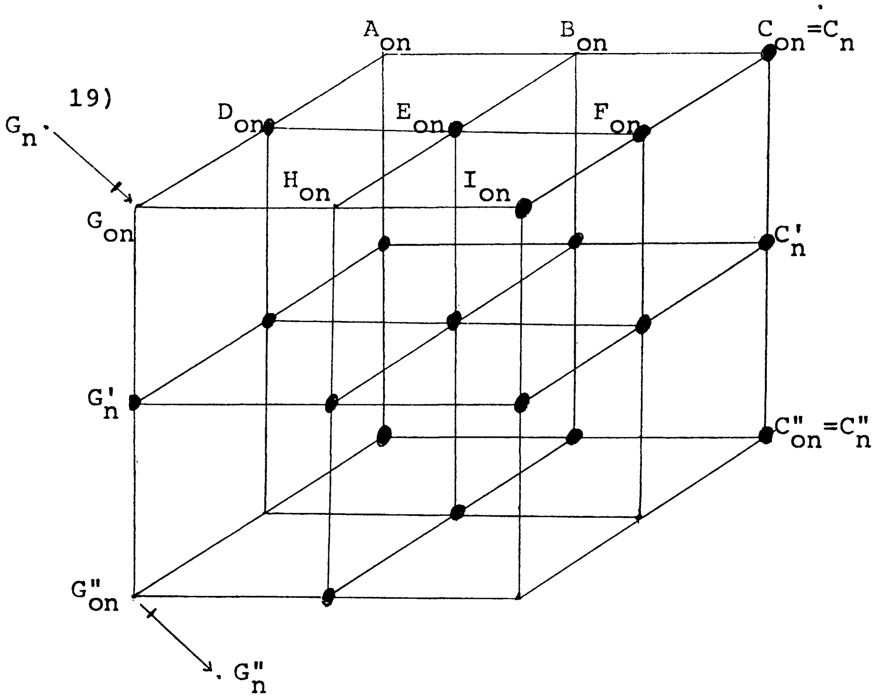
$$G_n \xrightarrow{g_{an}} \cdot \xrightarrow{g_{on}} G_n' \xrightarrow{g'_{on}} \cdot \xrightarrow{g_{\beta n}} G_n''$$

es exacta, y

$$\text{coker } g_{\beta n} = I^* = \ker i_{\beta n},$$
$$\ker g_{an} = A^* = \text{coker } a_{an}.$$

Si, todavía, las traslaciones π_n y π_n' son, respectivamente, i-mónica y a'-épica, la tricruz (que en este caso será distributiva) coincide con las traslaciones en los puntos indicados en la figura:

19)



La condición impuesta es equivalente a que la serie:

$$C_n \xrightarrow{c_n} C_n' \xrightarrow{c_n'} C_n''$$

cuyos objetos son los puntos medios de las flechas:

$$u_n^c v_n : B_n \longrightarrow F_n; \quad u_n'^c v_n' : B_n' \longrightarrow F_n'; \quad u_n''^c v_n'' : B_n'' \longrightarrow F_n''$$

es exacta corta.

(Siendo

$$\begin{tikzcd}
C_n \arrow[d, tail] \arrow[dr, tail] & & \\
C_{on} \arrow[r, tail] & C_n' \arrow[r, two heads] \arrow[dr, two heads] & C''_{on} \arrow[d, two heads] \\
& & C''_n
\end{tikzcd}$$

la serie $C_n \rightarrowtail C_n' \twoheadrightarrow C_n''$ es exacta corta si y solo si: $C_n = C_{on}$, $C_n'' = C''_{on}$).

En este caso (fig. 5 y dual), $C'' = C_0''$, $A'' = A_0''$, $C^* = 0$, $F^* = I^*$, y este último punto es la homología de la cero serie:

$$\underset{F = F_0}{\cdot} \xrightarrow[f]{} \underset{F' = F_0'}{\cdot} \xrightarrow[f']{} \cdot \xrightarrow[f_\beta]{} \underset{F''}{\cdot} \quad .$$

El teorema que se obtiene es análogo y comprende al clásico de homología.

En una serie exacta de complejos (no necesariamente cero series) si para cada n, son series exactas cortas:

$$C_n = H_n\,(u_n, v_n^c) \xrightarrow{c_n} C_n' = H_n\,(u_n', v_n'^c) \xrightarrow{c_n'} c_n'' = H_n\,(u_n'', v_n''^c)$$

se obtiene una serie exacta de homología

$$\cdots \longrightarrow G''_{n-1} \longrightarrow \underset{F^*_{n-1} = B^*_n}{\cdot} \longrightarrow G_n \longrightarrow \underset{G_{on}}{\cdot} \longrightarrow G_n' \longrightarrow \underset{G''_{on}}{\cdot} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow G_n'' \longrightarrow \underset{F^*_n = B^*_{n+1}}{\cdot} \longrightarrow G_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

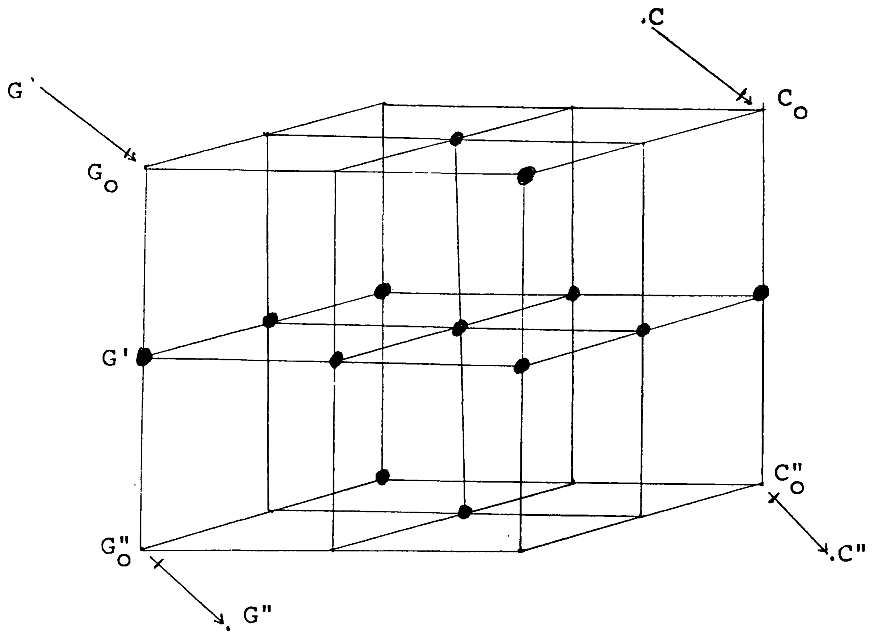
En el caso $C_n = 0$, $C_n' = 0$, $C_n'' = 0$, la condición de ser

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

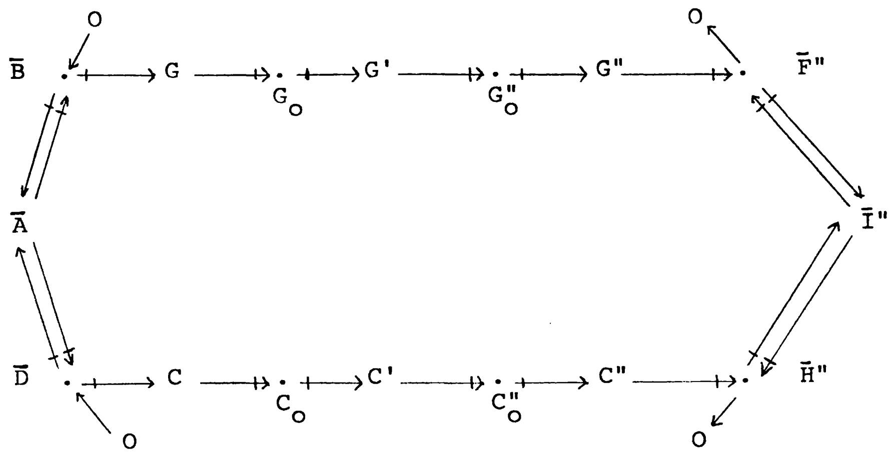
una serie exacta corta se cumple, por lo tanto, se puede aplicar el teorema anterior y se obtiene el teorema clásico.

* * *

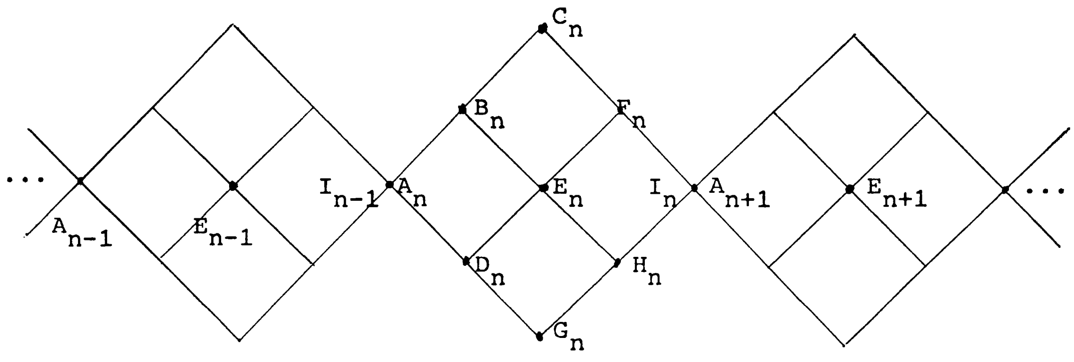
VII. Si $\pi : C \longrightarrow C'$ es una traslación e, i-mónica (dual de V) y $\pi' : C' \longrightarrow C''$ a', e'-épica (V), la tricruz $[e, u', v']$ (que en este caso será distributiva) coincide con las traslaciones en los puntos indicados en la figura



se obtienen las series exactas



Sea un complejo de cruces,



una sucesión de cruces tales que para todo n, $I_{n-1} = A_n$.

En este caso

$$\cdots \longrightarrow E_{n-1} \xrightarrow[I_{n-1} = A_n]{} E_n \xrightarrow[I_n = A_{n+1}]{} E_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

es un complejo de cero-series.

Una serie exacta corta de complejos de cruces son dos traslaciones de complejos de cruces, tales que:

$$E_n \xrightarrow{e_n} E_n' \xrightarrow{e_n'} E_n''$$

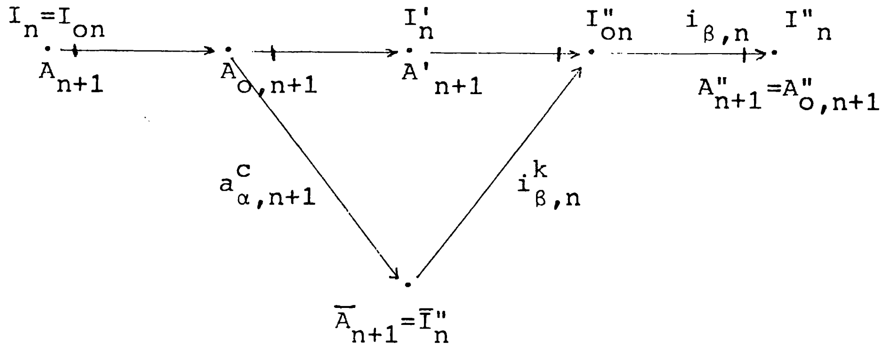
son, para todo n, series exactas cortas.

Las traslaciones π_n y π_n' son, respectivamente, e, i-mónica (dual de V), y a', e'-épica (V). Las tricruces resultan, por tanto, distributivas

Si la serie

$$C_n \xrightarrow{c_n} C_n' \xrightarrow{c_n'} C_n''$$

es, para todo n, una serie exacta corta, $C_n = C_{on}$, $C_n'' = C''_{uo}$, $\overline{D}_n = 0$, $\overline{H}_n'' = 0$, $\overline{A}_n = \overline{B}_n$, $\overline{F}_n'' = \overline{I}_n''$, *se obtiene, siendo:* $\overline{I}_n'' = \overline{A}_{n+1}$, *la homología de la cero-serie*



una serie exacta de homología:

$$\cdots \longrightarrow G''_{n-1} \longrightarrow \underset{\overline{I}''_{n-1} = \overline{A}_n}{\cdot} \longrightarrow G_n \longrightarrow \underset{G_{on}}{\cdot} \longrightarrow G_n' \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \cdot \longrightarrow G_n'' \longrightarrow \underset{\overline{I}_n'' = \overline{A}_{n+1}}{\cdot} \longrightarrow G_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

El teorema clásico de homología corresponde al caso particular en que todas las C son cero.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. R-Grandjean L-Valcárcel. *Homología en categorías exactas.* Alxebra 4. Dep. Algebra y Fund. Santiago (1.970).