SUCESION DE HOMOLOGIA EN UNA CATEGORIA HOFMANIANA

por

A. R-GRANDJEÁN L-VALCÁRCEL

F. HOFMANN [2] ha definido axiomáticamente una categoría que contiene a la de grupos. Estas categorías, llamadas hofmanianas, han sido estudiadas por Lecouturier [3].

El objeto de este trabajo es dar una construcción directa del morfismo de conexión del teorema de homología, generalizando así la construcción dada en [4] para categorías exactas.

Se utiliza la notación y algunos teoremas de esa memoria [4].

Este trabajo ha sido realizado, bajo la dirección del Dr. García-Rodeja, en el Departamento de Algebra y Fundamentos de la Universidad de Santiago de Compostela.

1. AXIOMAS DE UNA CATEGORIA HOFMANIANA

Una categoría hofmaniana, es una categoría que verifica los siguientes axiomas:

A.1. Todo morfismo f admite una factorización:

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dr, "f^I"] & \\ \bullet \arrow[ur, "f^C"] \arrow[rr, "f"'] & & \bullet \end{tikzcd} \qquad f = f^I f^C$$

(f^C coimagen de f, f^I imagen de f).

A.2. Existe objeto cero.

A.3. Para toda familia de objetos existe producto y coproducto.

A.4. Es localmente y colocalmente pequeña.

Es inmediato demostrar que una categoría con los axiomas A.1, A.2, A.3, A.4 tiene uniones, imágenes inversas (por tanto intersecciones finitas y núcleos).

Dualmente tiene cointersecciones finitas y conúcleos.

A.5. Todo epimorfismo es conormal.

A.6. Sea e un epimorfismo de A en B y m un monomorfismo de A' en A, entonces

a) Si m es normal $\Rightarrow$ $(em)^I$ normal.
b) Si $(em)^I$ es normal y $e^k < m \Rightarrow m$ es normal.

2. CUADRADOS CARTESIANOS Y COCARTESIANOS

2.1. Una sucesión vu de dos morfismos

$$\cdot \xrightarrow{u} \cdot \xrightarrow{v} \cdot$$

se llama exacta si $u^I = v^k$.

Si una sucesión vu es exacta se verifica que $u^c = v^{ck}$ (v^{ck} es la coimagen de v).

$$vo \text{ exacta} \Leftrightarrow v \text{ mónica}$$
$$ou \text{ exacta} \Leftrightarrow u \text{ épica}$$
$$ouo \text{ exacta} \Leftrightarrow u = 1.$$

Una sucesión

$$\cdots \longrightarrow \cdot \xrightarrow{u_{i-1}} \cdot \xrightarrow{u_i} \cdot \xrightarrow{u_{i+1}} \cdot \longrightarrow \cdots$$

se llama exacta si para todo i, $u_{i+1}\, u_i$ es exacta.

Utilizaremos las siguientes notaciones:

$$\xrightarrow{u} \Big| \xrightarrow{v} \quad : \Leftrightarrow vu \text{ exacta} \qquad \Leftrightarrow : v \mid u$$
$$\xrightarrow{u} \Big] \xrightarrow{v} \quad : \Leftrightarrow u = v^k \qquad \Leftrightarrow : v \;[\; u$$
$$\xrightarrow{u} \Big[\xrightarrow{v} \quad : \Leftrightarrow u^c = v \qquad \Leftrightarrow : v \;]\; u$$
$$\xrightarrow{u} [\,] \xrightarrow{v} \quad : \Leftrightarrow u = v^k,\ v = u^c \Leftrightarrow : v \;[\,]\; u$$
$$\xrightarrow{u} [\,] \xrightarrow{v} \quad \text{se llama sucesión exacta corta.}$$

2.2. Proposición 1.

a) $$\xrightarrow{u} \quad \overset{h}{\relbar\mapstochar\!\relbar\joinrel\rightarrow} \Big| \xrightarrow{v} \quad \Rightarrow \quad \xrightarrow{u} \Big| \overset{h}{\relbar\mapstochar\!\relbar\joinrel\rightarrow} \quad \xrightarrow{v}$$

b) $$\xrightarrow{u} \Big| \overset{j}{\relbar\joinrel\relbar\joinrel\mapstochar\!\rightarrow} \quad \xrightarrow{v} \quad \Rightarrow \quad \xrightarrow{u} \quad \overset{j}{\relbar\joinrel\relbar\joinrel\mapstochar\!\rightarrow} \Big| \xrightarrow{v}$$

Demostración:

a) $v^k = (hu)^I = hu^I$, por ser h mónica.
$(vh)^k = u^I$, pues $vhu^I = o$ y si $vhj = o \Rightarrow hj = v^k s = hu^I s \Rightarrow$
$\Rightarrow$ (h mónica) $j = u^I s$. (s es único por ser u^I mónico).

b) $u^I = (vj)^k \Rightarrow u^c = (vj)^{ck} = v^{ck} j$, por ser j épica.
$(ju)^c = v^{ck}$, pues $v^{ck} ju = o$ y si $hju = o \Rightarrow hj = su^c = sv^{ck} j \Rightarrow$
$\Rightarrow$ (j épica) $h = sv^{ck}$ (s es único por ser v^{ck} épico).

Así $(ju)^{kc} = v^k$. Teniendo en cuenta que $(ju)^I = (ju^I)^I$ y que u^I es normal, se deduce por A. 6 *a*) que $(ju)^I = (ju)^{kc}$, con lo que queda probada la proposición.

2.3. Proposición 2.

Si f_1 y f_2 son dos flechas del mismo rango; f_1 épica y f_2 normal, existe cuadrado cartesiano $f_2 g_2 = f_1 g_1$, siendo g_1 normal y g_2 épica.

$$\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[d, "f_1"] \\ \cdot \arrow[r, "f_2 = h^k"'] & \cdot \end{tikzcd} \quad \Longrightarrow \quad \begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "g_2"'] \arrow[dr, phantom, "\blacksquare"] & \cdot \arrow[d, "f_1"] \\ \cdot \arrow[r, "f_2"'] & \cdot \end{tikzcd} \quad \begin{array}{l} g_1 = (f_2^c f_1)^k \\ g_2 = [f_1 (f_2^c f_1)^k]^{ck} \end{array}$$

Demostración:

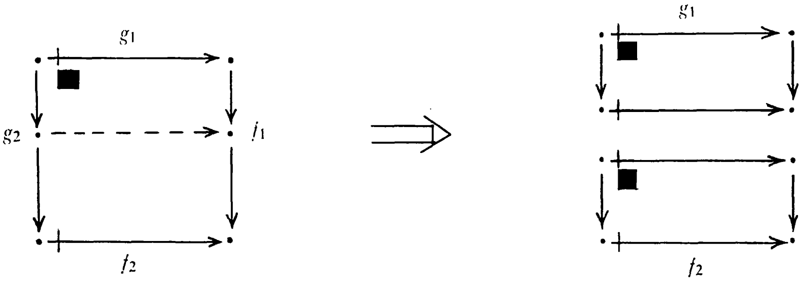
La existencia de cuadrado cartesiano y el valor de la flecha g_1 es consecuencia de [4. (2.4.1) p. 32].

$f_2^c f_1 [g_1 \Rightarrow$ (2.2. Proposición 1 b)]

$$\cdot \xrightarrow{g_1} \cdot \xrightarrow{f_1} \Big| \xrightarrow{f_2^c} \cdot \;\equiv\; \cdot \xrightarrow{g_2} \cdot \xrightarrow{f_2} \Big| \xrightarrow{f_2^c} \cdot$$

es decir, $(f_2 g_2)^I = f_2^{kc} = f_2$, por tanto $g_2 = [f_1 (f_2^c f_1)^k]^{ck}$.

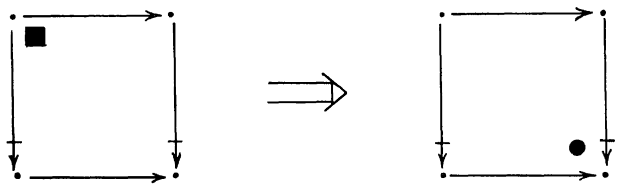
Proposicion 3. Si un cuadrado $f_1 g_1 = f_2 g_2$ es cartesiano, con f_2 normal (por tanto g_1 normal) su paralela media lo divide en dos cuadrados cartesianos.



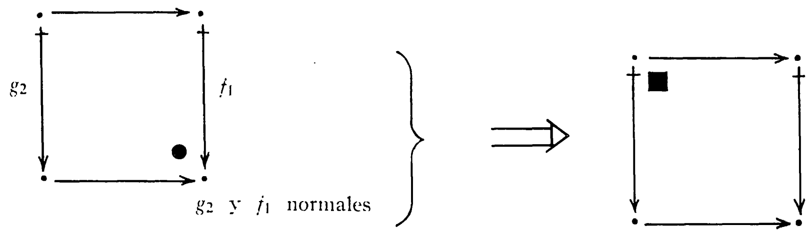
Es consecuencia de la Proposición 2 y de [4. (2.2.3) p. 23].

Proposicion 4.

a)



b)



Es consecuencia de [4. (2.2.8) p. 28 y (2.4.1) p. 32].

3. HOMOLOGIA

3.1. Lema de la cruz.

Si vu es el producto de dos flechas u normal y v épica, la cruz construida con v^k y u^c, puede encerrarse en un cuadrado de sucesiones exactas cortas.

El cuadrado de la cruz está formado por el cuadrado cartesiano de u y v^k, el cuadrado cocartesiano de v y u^c y la factorización en épica y mónica de los productos vu y $u^c v^k$.

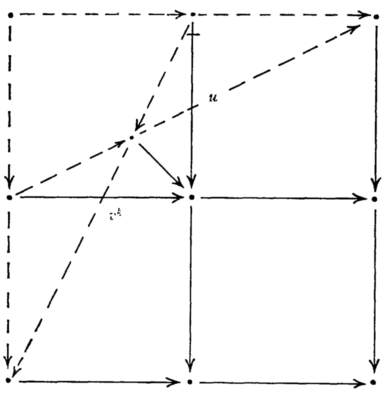
$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "(vu)^k"] \arrow[d, "(u^c v^k)^k"'] \arrow[dr, phantom, "1"] & \bullet \arrow[r, "(vu)^{ck}"] \arrow[d, "u"] \arrow[dr, phantom, "2"] & \bullet \arrow[d, "(vu)^{kc}"] \\
\bullet \arrow[r, "v^k"] \arrow[d, "(u^c v^k)^{ck}"'] \arrow[dr, phantom, "3"] & \bullet \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u^c"] \arrow[dr, phantom, "4"] & \bullet \arrow[d, "(vu)^c"] \\
\bullet \arrow[r, "(u^c v^k)^{kc}"'] & \bullet \arrow[r, "(u^c v^k)^c"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

$$\left.\begin{array}{l} (vu)^I = (vu)^{kc} \\ (u^c v^k)^I = (u^c v^k)^{kc} \end{array}\right\} \text{ como consecuencia de A. 6 a).}$$

Recíprocamente si en el cuadrado de la cruz todas las sucesiones son exactas cortas, entonces 1 es cartesiano, 4 es cocartesiano y los cuadrados 2 y 3 son respectivamente las factorizaciones de vu y $u^c v^k$ en épica y mónica.

3.2. CRUZ DE UNION.

Dadas dos flechas normales u y v^k del mismo rango, su unión es normal como consecuencia del axioma A.6 b)



Así, a toda cruz construida a partir de u y v^k, se le puede asociar una cruz que llamaremos de unión, cuyo centro es la unión de u y v^k y que se dibuja a trazos en el diagrama anterior.

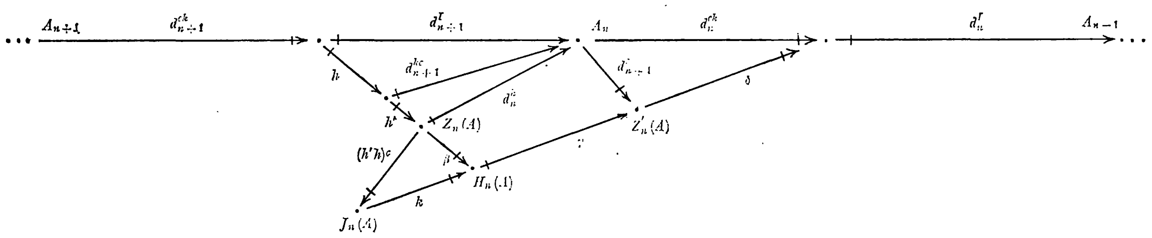
3.3. Homología de un complejo.

Un complejo $A = (A_n, d_n)$ es una sucesión infinita

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

tal que para todo n, $d_n d_{n+1} = o$.

Dividimos los morfismos d_n por su punto medio



$$d^I_{n+1}\, d^{ck}_n = o \Rightarrow \exists^{\bullet}\, \delta / \delta\, d^c_{n+1} = d^{ck}_n .$$

$$d^{ck}_n\, d^{kc}_{n+1} = o \Rightarrow \exists^{\bullet}\, h' /\, d^k_n\, h' = d^{kc}_{n+1}.$$

Construimos la cruz de $d^{ck}_n\, d^{kc}_{n+1} = o$, obteniendo que el cuadrado 3 (cuadrado de homología) es bicartesiano. La homología $H_n(A)$ es el punto medio de la flecha $d^c_{n+1}\, d^k_n$.

$$d^c_{n+1}\, d^I_{n+1} = o \Rightarrow \exists^{\bullet}\, h / d^I_{n+1} = d^{kc}_{n+1}\, h.$$

Debido a ser d^k_n mónica, la única flecha x tal que $d^I_{n+1} = d^k_n\, x$ es $x = h'h$.

$$\beta\, h'h = o \Rightarrow \exists^{\bullet}\, k / \beta = k\, (h'h)^c.$$

4. TEOREMA DE HOMOLOGIA

Si $0 \longrightarrow A \xrightarrow{j} B \xrightarrow{\pi} C \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta corta de complejos, induce las siguientes sucesiones:

$$(1) \ldots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{j_{n*}} H_n(B) \xrightarrow{\pi_{n*}} H_n(C) \xrightarrow{\theta_n} H_{n-1}(A) \longrightarrow \ldots$$

$$(2) \ldots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{j_{n*}} H_n(B) \xrightarrow{\pi_{n*}} H_n(C) \xrightarrow{\gamma_{n-1}\theta_n} Z'_{n-1}(A) \xrightarrow{u_{n-1}} Z'_{n-1}(B) \xrightarrow{v_{n-1}} Z'_{n-1}(C) \longrightarrow 0$$

$$(3)\ 0 \longrightarrow Z_n(A) \xrightarrow{r_n} Z_n(B) \xrightarrow{s_n} Z_n(C) \xrightarrow{\theta_n\beta_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{j_{n-1*}} H_{n-1}(B) \longrightarrow \ldots$$

que son de orden dos.

Las sucesiones:

$$H_n(A) \xrightarrow{j_{n*}} H_n(B) \xrightarrow{\pi_{n*}} H_n(C)$$

$$Z'_n(A) \xrightarrow{u_n} Z'_n(B) \xrightarrow{v_n} Z'_n(C) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow Z_n(A) \xrightarrow{r_n} Z_n(B) \xrightarrow{s_n} Z_n(C)$$

son exactas.

Si los complejos A y B son normales, es decir $(d_{n+1}^A)^I = (d_{n+1}^A)^{kc}$ y $(d_{n+1}^B)^I = (d_{n+1}^B)^{kc}$ para todo n, entonces las sucesiones (1), (2) y (3) son exactas.

Demostración:

Se construyen las homologías de los complejos.

$$(d_n^B)^{ck} j_n (d_n^A)^k = o \Rightarrow \begin{cases} \exists^\bullet p_n \,/\, (d_n^B)^{ck} j_n = p_n (d_n^A)^{ck}. \\ \exists^\bullet r_n \,/\, j_n (d_n^A)^k = (d_n^B)^k r_n. \end{cases}$$

$$(d_n^C)^{ck} \pi_n (d_n^B)^k = o \Rightarrow \begin{cases} \exists^\bullet q_n \,/\, (d_n^C)^{ck} \pi_n = q_n (d_n^B)^{ck}. \\ \exists^\bullet s_n \,/\, \pi_n (d_n^B)^k = (d_n^C)^k s_n. \end{cases}$$

Las flechas p son mónicas y las q épicas.

El cuadrado $j_n (d_n^A)^k = (d_n^B)^k r_n$ es cartesiano, y de la construcción por $j_n = \overset{k}{\pi_n}$, se obtiene $r_n = \overset{k}{s_n}$, es decir la exactitud de la sucesión:

$$0 \longrightarrow Z_n(A) \xrightarrow{r_n} Z_n(B) \xrightarrow{s_n} Z_n(C)$$

$$(d_{n+1}^B)^c j_n (d_{n+1}^A)^I = o \Rightarrow \exists^\bullet u_n \,/\, (d_{n+1}^B)^c j_n = u_n (d_{n+1}^A)^c$$

$$(d_{n+1}^C)^c \pi_n (d_{n+1}^B)^I = o \Rightarrow \exists^\bullet v_n \,/\, (d_{n+1}^C)^c \pi_n = v_n (d_{n+1}^B)^c$$

$$(d_{n+1}^B)^c j_n (d_{n+1}^A)^{kc} = o \Rightarrow \exists^\bullet p'_{n+1} \,/\, j_n (d_{n+1}^A)^{kc} = (d_{n+1}^B)^{kc} p'_{n+1}$$

$$(d_n^C)^c \pi_n (d_{n+1}^B)^{kc} = o \Rightarrow \exists^\bullet q'_{n+1} \,/\, \pi_n (d_{n+1}^B)^{kc} = (d_n^C)^{kc} q'_{n+1}$$

Las flechas p' son mónicas y las q' épicas.

El cuadrado $v_n\,(d_n^B)^c = (d_n^C)^c\,\pi_n$ es cocartesiano, y de la construcción por $\pi_n = j_n^c$, se obtiene $v_n = u_n^c$.

Ahora bien, por el axioma A. 6 a), utilizado sobre el cuadrado $(d_n^B)^c\,j_n = u_n\,(d_{n+1}^A)^c$, teniendo en cuenta que j_n es normal $(j_n = \pi_n^k)$ se deduce que $u_n^I = u_n^{kc}$.

Así obtenemos $v_n^k = u_n^{kc} = u_n^I$, es decir la exactitud de la sucesión:

$$Z'_n(A) \xrightarrow{u_n} Z'_n(B) \xrightarrow{v_n} Z'_n(C) \longrightarrow 0.$$

$$[(h'h)^B]^c\,r_n\,(h'h)^A = o \;\Rightarrow\; \exists^{\bullet}\, 1_n \,/\, [(h'h)^B]^c\,r_n = 1_n\,[(h'h)^A]^c.$$

$$[(h'h)^C]^c\,s_n\,(h'h)^B = o \;\Rightarrow\; \exists^{\bullet}\, t_n \,/\, [(h'h)^C]^c\,s_n = t_n\,[(h'h)^B]^c$$

$$(\delta_n^B)\,u_n\,(\gamma_n^A) = o \;\Rightarrow\; \exists^{\bullet}\, j_{n*} \,/\, u_n\,(\gamma_n^A) = (\gamma_n^B)\,j_{n*}$$

$$(\delta_n^C)\,v_n\,(\gamma_n^B) = o \;\Rightarrow\; \exists^{\bullet}\, \pi_{n*} \,/\, v_n\,(\gamma_n^B) = (\gamma_n^C)\,\pi_{n*}$$

Para demostrar que la sucesión $\cdot \xrightarrow{j_{n*}} \cdot \xrightarrow{\pi_{n*}} \cdot$ es exacta, consideramos el cuadrado cartesiano $u_n\,(\gamma_n^A) = (\gamma_n^B)\,j_{n*}$. Por la Proposición 3 al dividirlo por su paralela media se obtienen dos cuadrados cartesianos:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "(\gamma_n^A)"] \arrow[d, "j_{n*}^{ck}"'] & \bullet \arrow[d, "u_n^{ck}"] \\
\bullet \arrow[r] \arrow[d, "j_{n*}^{I}"'] \arrow[dr, phantom, "\blacksquare"] & \bullet \arrow[d, "u_n^I = u_n^{kc}"] \\
\bullet \arrow[r, "(\gamma_n^B)"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

La construcción del cuadrado cartesiano inferior por la flecha normal $u_n^I = u_n^{kc}$, nos da $j_{n*}^I = \pi_{n*}^k$.

CONSTRUCCION DEL MORFISMO DE CONEXION $\theta_n: H_n(C) \longrightarrow H_{n-1}(A)$.

Se construye el cuadrado cartesiano de las flechas (d_n^B) y $j_{n-1} = \pi_{n-1}^k$ y se obtiene: $(d_n^B)\,\mu = j_{n-1}\,v$. La flecha opuesta a j_{n-1} es $\mu = [(d_n^C)^{ck}\,\pi_n]^k$. El dominio del núcleo de v es el mismo que el de (d_n^B) [4. (2.2.8) p. 28].

Se construye el cuadrado cartesiano de π_n y $(d_n^C)^k$ y se obtiene: $\pi_n\,\mu = (d_n^C)^k\,\lambda$. La flecha λ es épica por la proposición 2.

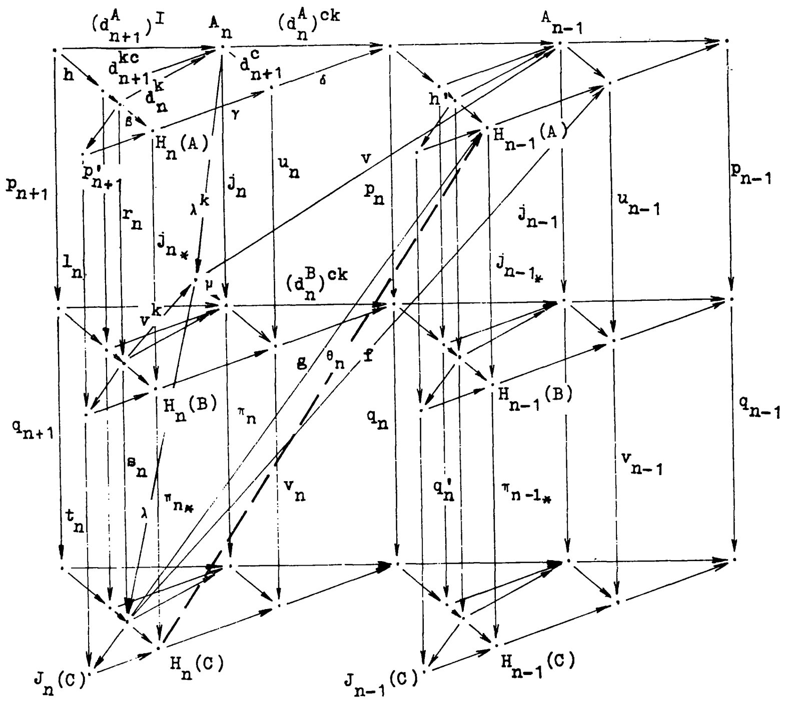
Construimos el cuadrado cocartesiano de v y λ épica. El núcleo de λ tiene el mismo dominio que el de π_n [4. (2.2.8) p. 28]. Así obtenemos $f\lambda = (d_n^A)^c\,v$.

$$(\delta_{n-1}^A)f = o, \text{ pues } p_{n-1}(\delta_{n-1}^A)f\lambda = p_{n-1}\,\delta_{n-1}^A\,(d_n^A)^c\,v = (d_{n-1}^B)^{ck}\,j_{n-1}\,v =$$
$$= (d_{n-1}^B)^{ck}\,(d_n^B)\,\mu = o, \ (\lambda \text{ épica, } p_{n-1} \text{ mónica}) \Rightarrow \exists^{\bullet}\, g \,/ f = (\gamma_{n-1}^A)\,g.$$
$$g\,(h'^C) = o, \text{ pues } (\gamma_{n-1}^A)\,g\,(h'^C)\,q'_{n+1} = (\gamma_{n-1}^A)\,g s_n\,(h'^B) = (\gamma_{n-1}^A)\,g\lambda v^k\,(h'^B) =$$
$$= f\lambda v^k\,(h'^B) = (d_n^A)^c\,v v^k\,(h'^B) = o \ (q'_{n+1} \text{ épica, } \gamma_{n-1}^A \text{ mónica}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists^{\bullet}\,\theta_n \,/ g = \theta_n\,(\beta_n^C).$$

El morfismo θ_n es único, pues: $(\gamma_{n-1}^A)\,\theta_n\,(\beta_n^C) = f$ y (β_n^C) es épica y (γ_{n-1}^A) mónica.

Demostraremos ahora que las tres sucesiones (1), (2) y (3) son de orden dos.

$$(1) \quad \theta_n\,\pi_{n*} = o, \text{ pues } (\gamma_{n-1}^A)\,\theta_n\,\pi_{n*}\,(\beta_n^B) = (\gamma_{n-1}^A)\,\theta_n\,(\beta_n^C)\,s_n =$$
$$= (\gamma_{n-1}^A)\,\theta_n\,(\beta_n^C)\,\lambda v^k = f\lambda v^k = (d_n^A)^c\,v v^k = o \ ((\gamma_{n-1}^A) \text{ mónica, } (\beta_n^B) \text{ épica}).$$
$$j_{n-1*}\,\theta_n = o, \text{ pues } (\gamma_{n-1}^B)\,j_{n-1*}\,\theta_n\,(\beta_n^C)\,\lambda = u_{n-1}\,(\gamma_{n-1}^A)\,\theta_n\,(\beta_n^C)\,\lambda =$$
$$= u_{n-1} f\lambda = u_{n-1}\,(d_n^A)^c\,v = (d_n^B)^c\,j_{n-1}\,v = (d_n^B)^c\,(d_n^B)\,\mu = o \ ((\gamma_{n-1}^B)$$
$$\text{mónica, } \lambda \text{ y } (\beta_n^C) \text{ épicas}).$$
$$(2) \quad (\gamma_{n-1}^A)\,\theta_n\,\pi_{n*} = o, \text{ pues } \theta_n\,\pi_{n*} = o.$$
$$u_{n-1}\,(\gamma_{n-1}^A)\,\theta_n = o, \text{ pues } j_{n-1*}\,\theta_n = o \text{ y } u_{n-1}\,(\gamma_{n-1}^A)\,\theta_n =$$
$$= (\gamma_{n-1}^B)\,j_{n-1*}\,\theta_n = o.$$
$$(3) \quad \theta_n\,(\beta_n^C)\,s_n = o, \text{ pues } \theta_n\,(\beta_n^C)\,s_n = \theta_n\,(\beta_n^C)\,\lambda v^k = o.$$
$$j_{n-1*}\,\theta_n\,(\beta_n^C) = o, \text{ pues } j_{n-1*}\,\theta_n = o.$$



En el caso que los complejos A y B sean normales, entonces por el axioma A. 6a) el complejo C también lo es:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "(d_n^B)^I = (d_n^B)^{kc}"] \arrow[d, "q_n"'] & \bullet \arrow[d, "\pi_{n-1}"] \\ \bullet \arrow[r, "(d_n^C)^I"'] & \bullet \end{tikzcd} \Longrightarrow (d_n^C)^I = (d_n^C)^{kc}$$

En éste caso, $h = 1$, $J_n(A) = H_n(A)$, $p'_n = p_n$, $q'_n = q_n$, $1_n = r_n$, $t_n = s_n$, y el diagrama se reduce al dado en [4. p. 101].

La demostración de la exactitud de la sucesión (1) es la dada en [4. 5.3. p. 92].

Las exactitudes de las sucesiones (2) y (3) son una inmediata consecuencia de la manera de demostrar en [4], la exactitud de (1).

BIBLIOGRAFIA

[1] ABELLANAS, P. *Geometría básica*, 2.ª ed. Ed. Romo, Madrid (1969).

[2] HOFMANN, F. *Uber eine die Kategorie der Gruppen umfassende Kategorie*, Bayer,. Akad. Wiss. Math. Nat. Kl. S. B., pp. 163-204 (1960).

[3] LECOUTURIER, P. *Quelques propriétés des catégories hofmanniennes*. Ann. de la Soc. Scient. de Bruxelles, T. 80, I, pp. 19-72 (1966).

[4] R-GRANDJEÁN L-VALCÁRCEL, A. *Homología en categorías exactas*. Alxebra 4. Depto. Algebra y Fund. Universidad de Santiago (1970).

Dep. Algebra y Fund.
Universidad de Santiago.