«RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE CAUCHY RELATIVO A UNA CLASE DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES DE 3.er ORDEN, CUASI-LINEALES Y DE TIPO HIPERBÓLICO»

por

J. M. Cascante Dávila

5. Integral general global de una ecuación diferencial ordinaria de 1.er orden. — Construyamos una aplicación $\lambda : \mathfrak{A}_{(G;\,\varrho)} \to \mathbf{R}$ del modo que sigue:

$$«(x_1,\ x_1{}^0,\ x_2{}^0) = (x_1,\ \vec{x}^{\,0}) \in \mathfrak{A}_{(G;\,\varrho)} \to \lambda(x_1,\ x_1{}^0,\ x_2{}^0) = \Psi_{(\vec{x}^0)}(x_1) \in \mathbf{R}»$$

en la que, para todo $\vec{x}^{\,0} \in G$, denota $\Psi_{(\vec{x}^0)}$, como en el n.º 3, la solución global en G de (1) pasando por $\vec{x}^{\,0}$, la cual está definida sobre el intervalo $]x_1{}^{izq}(\vec{x}^{\,0}),\ x_1{}^{der}(\vec{x}^{\,0})[$.

Observemos, que puesto que para todo $\vec{x}^{\,0} = (x_1{}^0,\ x_2{}^0) \in G$ se verifica (ya que $\Psi_{(\vec{x}^0)}$ es la solución global en G pasando por $\vec{x}^{\,0}$) $x_2{}^0 = \Psi_{(\vec{x}^0)}(x_1{}^0)$, es válida, por consiguiente, la relación: $«(\forall\ (x_1{}^0,\ x_2{}^0))\ ((x_1{}^0,\ x_2{}^0) \in G \Rightarrow x_2{}^0 = \lambda(x_1{}^0,\ x_1{}^0,\ x_2{}^0))»$.

Dicha aplicación λ es continua sobre $\mathfrak{A}_{(G;\,\varrho)}$ y continuamente derivable parcialmente respecto a su primer argumento sobre $\mathfrak{A}_{(G;\,\varrho)}$, verificándose:

$$«(\forall\ (x_1,\ x_1{}^0,\ x_2{}^0))\ ((x_1,\ x_1{}^0,\ x_2{}^0) \in \mathfrak{A}_{(G;\,\varrho)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda_{x_1}(x_1,\ x_1{}^0,\ x_2{}^0) = (D_1\lambda)(x_1,\ x_1{}^0,\ x_2{}^0) = \varrho(x_1,\ \lambda(x_1,\ x_1{}^0,\ x_2{}^0)))»$$

En efecto, sea $(\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_1{}^0,\ \tilde{x}_2{}^0) \in \mathfrak{A}_{(G;\,\varrho)}$, es decir, $\vec{\tilde{x}}^{\,0} = (\tilde{x}_1{}^0,\ \tilde{x}_2{}^0) \in G$ y $\tilde{x}_1 \in\ ]x_1{}^{izq}(\vec{\tilde{x}}^{\,0}),\ x_1{}^{der}(\vec{\tilde{x}}^{\,0})[$, y consideremos los casos siguientes, mutuamente excluyentes:

1.º) $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_1{}^0$. Sea $Q = [\tilde{x}_1{}^0 - a,\ \tilde{x}_1{}^0 + a] \times [\tilde{x}_2{}^0 - b,\ \tilde{x}_2{}^0 + b] \subset G$, un intervalo cerrado, centrado en $\vec{\tilde{x}}^{\,0} = (\tilde{x}_1{}^0,\ \tilde{x}_2{}^0)$, y contenido en G; denotemos por M_Q a $\sup\limits_{\vec{x} \in Q} |\varrho(\vec{x})|$ y pongamos:

$$\left.\begin{array}{l} k_Q = \text{mín}\left\{a,\ \dfrac{b}{4M_Q}\right\}, \quad \text{si} \quad M_Q > 0 \\ k_Q = a, \quad \text{si} \quad M_Q = 0 \end{array}\right\}$$

Designando, para abreviar, por I al intervalo $[\tilde{x}_1^0 - k_Q,\ \tilde{x}_1^0 + k_Q] \times \times [\tilde{x}_1^0 - k_Q,\ \tilde{x}_1^0 + k_Q] \times \left[\tilde{x}_2^0 - \frac{b}{2},\ \tilde{x}_2^0 + \frac{b}{2}\right]$, se verifica [n.º 2 de esta INTRODUCCIÓN]:

$$«(\exists\ \chi^{(\vec{\tilde{x}}^0; Q)})\ (\chi^{(\vec{\tilde{x}}^0; Q)} \in \mathcal{F}(I\ ;\ \mathbf{R}) \text{ y } \chi^{(\vec{\tilde{x}}^0; Q)} \text{ es una integral general local en } G$$
$$\text{de (1) relativamente al punto } \vec{\tilde{x}}^0)»$$

y por tanto:

$$«(\forall\ (x_1^0,\ x_2^0))\ ((x_1^0,\ x_2^0) \in [\tilde{x}_1^0 - k_Q,\ \tilde{x}_1^0 + k_Q] \times$$
$$\times \left[\tilde{x}_2^0 - \frac{b}{2},\ \tilde{x}_2^0 + \frac{b}{2}\right] \Rightarrow \chi^{(\vec{\tilde{x}}^0; Q)}_{(x_1^0,\, x_2^0)} \text{ es una solución local en } G \text{ de (1) pa-}$$

sando por $\vec{x}^0$ y definida sobre el intervalo $[\tilde{x}_1^0 - k_Q,\ \tilde{x}_1^0 + k_Q])»$

Ahora bien, para todo $\vec{x}^0 = (x_1^0,\ x_2^0) \in G$, es $\Psi_{(\vec{x}^0)}$ la solución local en G de (1) pasando por $\vec{x}^0$, y definida sobre el intervalo $]x_1^{izq}(\vec{x}^0),\ x_1^{der}(\vec{x}^0)[$, que prolonga a todas las soluciones locales en G de (1) pasando por $\vec{x}^0$, por lo que, en particular, y teniendo en cuenta además la definición de la función λ, se verificará:

$$\left\{\begin{array}{c} «(\forall\ \vec{x}^0)\ (\vec{x}^0 \in [\tilde{x}_1^0 - k_Q,\ \tilde{x}_1^0 + k_Q] \times \left[\tilde{x}_2^0 - \dfrac{b}{2},\ \tilde{x}_2^0 + \dfrac{b}{2}\right] \Rightarrow \\ \Rightarrow [\tilde{x}_1^0 - k_Q,\ \tilde{x}_1^0 + k_Q] \subset\ ]x_1^{izq}(\vec{x}^0),\ x_1^{der}(\vec{x}^0)[)» \\ \text{y} \\ «(\forall\ (x_1, x_1^0, x_2^0))\ ((x_1, x_1^0, x_2^0) \in I \Rightarrow \chi^{(\vec{\tilde{x}}^0; Q)}_{(x_1^0,\, x_2^0)}(x_1) = \chi^{(\vec{\tilde{x}}^0; Q)}(x_1, x_1^0, x_2^0) = \\ = \Psi_{(\vec{x}^0)}(x_1) = \lambda(x_1,\ x_1^0,\ x_2^0))» \end{array}\right.$$

es decir:

$$«I \subset \mathfrak{A}_{(G;\,\varrho)} \text{ y } (\forall\ (x_1,\ x_1^0,\ x_2^0))\ ((x_1,\ x_1^0,\ x_2^0) \in I \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \chi^{(\vec{\tilde{x}}^0; Q)}(x_1,\ x_1^0,\ x_2^0) = \lambda(x_1,\ x_1^0,\ x_2^0))»$$

Por otra parte $\chi^{(\vec{\tilde{x}}^0;\varrho)}$ (n.º 2 de esta INTRODUCCIÓN) es continua sobre I, y dado que $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_1{}^0, \tilde{x}_2{}^0) = (\tilde{x}_1{}^0, \tilde{x}_1{}^0, \tilde{x}_2{}^0) \in \mathring{I}$, es válida, como consecuencia de todo ello, la relación:

$$
\begin{aligned}
&«(\forall\, \varepsilon)\,(\varepsilon \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \Rightarrow (\exists\, \eta)\,(\eta \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \text{ y } B_\eta((\tilde{x}_1, \tilde{x}_1{}^0, \tilde{x}_2{}^0)) \subset I \subset \mathfrak{A}_{(G;\,\varrho)} \text{ y}\\
&\text{y } (\forall\,(x_1\, x_1{}^0,\, x_2{}^0))\,((x_1, x_1{}^0, x_2{}^0) \in B_\eta((\tilde{x}_1, \tilde{x}_1{}^0, \tilde{x}_2{}^0)) \Rightarrow\\
&\Rightarrow |\chi^{(\vec{\tilde{x}}^0;\varrho)}(x_1, x_1{}^0, x_2{}^0) - \chi^{(\vec{\tilde{x}}^0;\varrho)}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_1{}^0, \tilde{x}_2{}^0)| =\\
&= |\lambda(x_1, x_1{}^0, x_2{}^0) - \lambda(\tilde{x}_1, \tilde{x}_1{}^0, \tilde{x}_2{}^0)| < \varepsilon)))»
\end{aligned}
$$

lo que prueba la continuidad de λ en el punto $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_1{}^0, \tilde{x}_2{}^0) = (\tilde{x}_1{}^0, \tilde{x}_1{}^0, \tilde{x}_2{}^0)$.

2.º) $\tilde{x}_1 \neq \tilde{x}_1{}^0$. Suponiendo sea $\tilde{x}_1{}^0 < \tilde{x}_1$ (El razonamiento, en el subcaso $\tilde{x}_1{}^0 > \tilde{x}_1$, es enteramente análogo), y refiriéndonos a la demostración del caso 2.º) del n.º 4, puesto que: $(\forall\, i)\,(i \in \{1, 2, ..., n\} \Rightarrow \vec{y}^{\,i} = (y_1{}^i, y_2{}^i) = (\tilde{x}_1{}^0 + ik,\ \Psi_{(\vec{\tilde{x}}^0)}(\tilde{x}_1{}^0 + ik)) = (y_1{}^i,\ \Psi_{(\vec{\tilde{x}}^0)}(y_1{}^i)))$, y en particular, $y_2{}^n = \Psi_{(\vec{\tilde{x}}^0)}(y_1{}^n)$, es decir, $\Psi_{(\vec{\tilde{x}}^0)}$ es una solución local en G de (1) pasando por $(y_1{}^n, y_2{}^n)$, así como se tiene además: $y_1{}^n - k < y_1{}^n = \tilde{x}_1{}^0 + nk \leq \tilde{x}_1 < y_1{}^n + k$, y consecuentemente: $\tilde{x}_1 \in\,]y_1{}^n - k,\ y_1{}^n + k[\ \subset [y_1{}^n - k,\ y_1{}^n + k]$, y dado que, por otra parte, $\chi^{(\vec{y}^n;\,\varrho(\vec{y}^n))}$ está definida sobre $[y_1{}^n - k,\ y_1{}^n + k] \times \times [y_1{}^n - k,\ y_1{}^n + k] \times \left[y_2{}^n - \frac{a}{2},\ y_2{}^n + \frac{a}{2}\right]$, lo que entraña que la aplicación parcial $\chi^{(\vec{y}^n;\,\varrho(\vec{y}^n))}_{(y_1{}^n,\, y_2{}^n)}$ determinada por $\chi^{(\vec{y}^n;\,\varrho(\vec{y}^n))}$ relativamente a los valores $y_1{}^n$, $y_2{}^n$ del segundo y tercer argumento es una solución local en G de (1) pasando por $(y_1{}^n, y_2{}^n)$, y definida sobre $[y_1{}^n - k,\ y_1{}^n + k]$, de lo precedente, y en virtud del teorema de unicidad de soluciones locales en G de (1) pasando por un punto (habida cuenta que $\tilde{x}_1 \in [y_1{}^n - k,\ y_1{}^n + k]\ \cap\ ]x_1{}^{izq}(\vec{\tilde{x}}^0),\ x_1{}^{der}(\vec{\tilde{x}}^0)[$), se deduce que:

$$
«\chi^{(\vec{y}^n;\,\varrho(\vec{y}^n))}(\tilde{x}_1, y_1{}^n, y_2{}^n) = \chi^{(\vec{y}^n;\,\varrho(\vec{y}^n))}_{(y_1{}^n,\, y_2{}^n)}(\tilde{x}_1) = \Psi_{(\vec{\tilde{x}}^0)}(\tilde{x}_1) = \lambda(\tilde{x}_1, \tilde{x}_1{}^0, \tilde{x}_2{}^0)»
$$

Pero en virtud de la continuidad de $\chi^{(\vec{y}^n;\,\varrho(\vec{y}^n))}$ sobre $[y_1{}^n - k,\ y_2{}^n + k] \times \times [y_1{}^n - k,\ y_1{}^n + k] \times \left[y_2{}^n - \frac{a}{2},\ y_2{}^n + \frac{a}{2}\right]$, y dado que $\tilde{x}_1 \in\,]y_1{}^n - k,$

$y_1{}^n + k[$ e $y_2{}^n \in \left]y_2{}^n - \frac{a}{2}, y_2{}^n + \frac{a}{2}\right[$, existen, para todo $\varepsilon \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$, sendos intervalos abiertos $]\widetilde{x}_1 - l, \widetilde{x}_1 + l[$ y $\mathcal{J}^n =]y_2{}^n - r, y_2{}^n + r[$ de $\mathbf{R}$, centrados respectivamente en $\widetilde{x}_1$ e $y_2{}^n$, y contenidos respectivamente en $[y_1{}^n - k, y_1{}^n + k]$ y $\left[y_2{}^n - \frac{a}{2}, y_2{}^n + \frac{a}{2}\right]$, tales que:

$$«(\forall_{(x_1, y_2)}) \left((x_1, y_2) \in]\widetilde{x}_1 - l, \widetilde{x}_1 + l[\times \mathcal{J}^n \Rightarrow |\chi^{(\vec{y^n}; Q(\vec{y^n}))}(x_1, y_1{}^n, y_2) - \lambda(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_1{}^0, \widetilde{x}_2{}^0)| = |\chi^{(\vec{y^n}; Q(\vec{y^n}))}(x_1, y_1{}^n, y_2) - \chi^{(\vec{y^n}; Q(\vec{y^n}))}(\widetilde{x}_1, y_1{}^n, y_2{}^n)| < \varepsilon\right)» \tag{5}$$

Asimismo, en virtud de la continuidad de $\chi^{(\vec{y^{n-1}}; Q(\vec{y^{n-1}}))}$ sobre $[y_1{}^{n-1} - k, y_1{}^{n-1} + k] \times [y_1{}^{n-1} - k, y_1{}^{n-1} + k] \times \left[y_2{}^{n-1} - \frac{a}{2}, y_2{}^{n-1} + \frac{a}{2}\right]$, y dado que $(y_1{}^n, y_1{}^{n-1}, y_2{}^{n-1}) \in [y_1{}^{n-1} - k, y_1{}^{n-1} + k] \times [y_1{}^{n-1} - k, y_1{}^{n-1} + k] \times \left]y_2{}^{n-1} - \frac{a}{2}, y_2{}^{n-1} + \frac{a}{2}\right[$, así como $\chi^{(\vec{y^{n-1}}; Q(\vec{y^{n-1}}))}(y_1{}^n, y_1{}^{n-1}, y_2{}^{n-1}) = y_2{}^n$, se puede determinar un intervalo abierto $\mathcal{J}^{n-1}$ de $\mathbf{R}$, centrado en $y_2{}^{n-1}$, y contenido en $\left[y_2{}^{n-1} - \frac{a}{2}, y_2{}^{n-1} + \frac{a}{2}\right]$, tal que:

$$«(\forall y_2)\ (y_2 \in \mathcal{J}^{n-1} \Rightarrow \chi^{(\vec{y^{n-1}}; Q(\vec{y^{n-1}}))}(y_1{}^n, y_1{}^{n-1}, y_2) \in \mathcal{J}^n)»$$

es decir:

$$«\chi^{(\vec{y^{n-1}}; Q(\vec{y^{n-1}}))}(\{y_1{}^n\} \times \{y_1{}^{n-1}\} \times \mathcal{J}^{n-1}) \subset \mathcal{J}^n»$$

y procediendo recurrentemente, se construirá una secuencia de intervalos abiertos de $\mathbf{R}$:

$$\mathcal{J}^{n-1}, \mathcal{J}^{n-2}, \dots, \mathcal{J}^1$$

centrados respectivamente en:

$$y_2{}^{n-1}, y_2{}^{n-2}, \dots, y_2{}^1$$

y contenidos respectivamente en:

$$\left[y_2{}^{n-1} - \frac{a}{2}, y_2{}^{n-1} + \frac{a}{2}\right], \left[y_2{}^{n-2} - \frac{a}{2}, y_2{}^{n-2} + \frac{a}{2}\right], \dots, \left[y_2{}^1 - \frac{a}{2}, y_2{}^1 + \frac{a}{2}\right]$$

tales que:

$$«(\forall i)\ (i \in \{1, 2, \ldots, n-1\} \Rightarrow \chi^{(\vec{y^i};\, Q(\vec{y^i}))}(\{y_1^{i+1}\} \times \{y_1^i\} \times \mathfrak{J}^i) \subset \mathfrak{J}^{i+1})»$$

Finalmente, en virtud de la continuidad de $\chi^{(\vec{y^0};\, Q(\vec{y^0}))}$ sobre $[y_1^0 - k,\ y_1^0 + k] \times [y_1^0 - k,\ y_1^0 + k] \times \left[y_2^0 - \frac{a}{2},\ y_2^0 + \frac{a}{2}\right] = [y_1^0 - k,\ y_1^0 + k] \times \widetilde{Q}(\vec{y^0})$, y dado que $(y_1^1,\ y_1^0,\ y_2^0) \in [y_1^0 - k,\ y_1^0 + k] \times \mathring{\widetilde{Q}}(\vec{y^0})$, así como $\chi^{(\vec{y^0};\, Q(\vec{y^0}))}(y_1^1,\ y_1^0,\ y_2^0) = y_2^1$, se puede determinar un intervalo abierto $Q^*(\vec{y^0})$ de $\mathbf{R}^2$, centrado en $\vec{y^0}$, y contenido en $\widetilde{Q}(\vec{y^0})$, tal que:

$$«\chi^{(\vec{y^0};\, Q(\vec{y^0}))}(\{y_1^1\} \times Q^*(\vec{y^0})) \subset \mathfrak{J}^1»$$

Sea ahora, $\vec{x^0} = (x_1^0,\ x_2^0) \in Q^*(\vec{y^0})$. La aplicación parcial $\chi^{(\vec{y^0};\, Q(\vec{y^0}))}_{(x_1^0,\, x_2^0)}$ determinada por $\chi^{(\vec{y^0};\, Q(\vec{y^0}))}$ relativamente a los valores x_1^0, x_2^0 del segundo y tercer argumento, es una solución local en G de (1) pasando por $\vec{x^0}$, y definida sobre el intervalo $[y_1^0 - k,\ y_1^0 + k] = [y_1^0 - k,\ y_1^1]$, que verifica por lo precedente:

$$«\chi^{(\vec{y^0};\, Q(\vec{y^0}))}_{(x_1^0,\, x_2^0)}(y_1^1) \in \mathfrak{J}^1»$$

Pongamos como en el n.º 4:

$$«\alpha^0 = \chi^{(\vec{y^0};\, Q(\vec{y^0}))}_{(x_1^0,\, x_2^0)}»$$

α^0 es una solución local en G de (1) pasando por $\vec{x^0}$, definida sobre el intervalo $[y_1^0 - k,\ y_1^1]$, que verifica:

$$«(y_1^1,\ \alpha^0(y_1^1)) \in \{y_1^1\} \times \mathfrak{J}^1»$$

Del mismo modo la aplicación parcial $\chi^{(\vec{y^1};\, Q(\vec{y^1}))}_{(y_1^1,\, \alpha^0(y_1^1))}$ determinada por $\chi^{(\vec{y^1};\, Q(\vec{y^1}))}$ relativamente a los valores y_1^1, $\alpha^0(y_1^1)$ del segundo y tercer argumento, es una solución local en G de (1) pasando por $(y_1^1,\ \alpha^0(y_1^1))$, y definida sobre el intervalo $[y_1^1 - k,\ y_1^1 + k] = [y_1^1 - k,\ y_1^2]$, que verifica:

$$«\chi^{(\vec{y^1};\, Q(\vec{y^1}))}_{(y_1^1,\, \alpha^0(y_1^1))}(y_1^2) \in \mathfrak{J}^2»$$

Pongamos:

$$«\alpha^1 = \chi^{(\vec{y^1};\, Q\,(\vec{y^1}))}_{(y_1{}^1,\, \alpha^0\,(y_1{}^1))\,|\,[y_1{}^1,\, y_1{}^2]}»$$

α^1 es una solución local en G por la derecha de (1) pasando por $(y_1{}^1,\ \alpha^0\,(y_1{}^1))$, y tal que:

$$«(y_1{}^2,\ \alpha^1\,(y_1{}^2)) \in \{y_1{}^2\} \times \mathcal{J}^2»$$

Así determinaríamos una secuencia $(\alpha^i)_{0 \leq i \leq n}$ de funciones, tal que:

«α^0 es una solución local en G de (1) pasando por $(x_1{}^0,\ x_2{}^0)$, definida sobre $[y_1{}^0 - k,\ y_1{}^1]$ y verificando $(y_1{}^1,\ \alpha^0\,(y_1{}^1)) \in \{y_1{}^1\} \times \mathcal{J}^1$» (5′)

y

«$(\forall\ i)\ (i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n - 1\} \Rightarrow \alpha^i$ es una solución local por la derecha en G de (1) pasando por $(y_1{}^i,\ \alpha^{i-1}\,(y_1{}^i))$, definida sobre $[y_1{}^i,\ y_1{}^{i+1}]$ y verificando $(y_1{}^{i+1},\ \alpha^i\,(y_1{}^{i+1})) \in \{y_1{}^{i+1}\} \times \mathcal{J}^{i+1})$» (5″)

y

$$«(\forall\ i)\ (i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n - 1\} \Rightarrow \alpha^i\,(y_1{}^i) = \alpha^{i-1}\,(y_1{}^i)\ \ y\ \ (\alpha^i)'\,(y_1{}^i) = \varrho\,(y_1{}^i,\ \alpha^i\,(y_1{}^i)) = \varrho\,(y_1{}^i,\ \alpha^{i-1}\,(y_1{}^i)) = (\alpha^{i-1})'\,(y_1{}^i))» \qquad (5''')$$

Finalmente, hagamos:

$$«\chi^{(\vec{y^n};\, Q\,(\vec{y^n}))}_{(y_1{}^n,\, \alpha^{n-1}\,(y_1{}^n))\,|\,[y_1{}^n,\, y_1{}^n + k]} = \alpha^n»$$

Se tiene, habida cuenta (5), dado que además $(y_1{}^n,\ \alpha^{n-1}\,(y_1{}^n)) \in \in \{y_1{}^n\} \times \mathcal{J}^n$ y $\widetilde{x_1} \in [y_1{}^n,\ y_1{}^n + k]$:

«α^n es una solución local por la derecha en G de (1), pasando por $(y_1{}^n,\ \alpha^{n-1}\,(y_1{}^n))$, definida sobre $[y_1{}^n,\ y_1{}^n + k]$ y verificando:

$$(\forall\ x_1)\ (x_1 \in]\widetilde{x_1} - l,\ \widetilde{x_1} + l[\cap [y_1{}^n,\ y_1{}^n + k] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |\,\alpha^n\,(x_1) - \lambda\,(\widetilde{x_1},\ \widetilde{x_1}^0,\ \widetilde{x_2}^0)\,| < \varepsilon)» \qquad (5^{\mathrm{IV}})$$

y

$$«\alpha^n\,(y_1{}^n) = \alpha^{n-1}\,(y_1{}^n)\ \ y\ \ (\alpha^n)'\,(y_1{}^n) = \varrho\,(y_1{}^n,\ \alpha^n\,(y_1{}^n)) =$$
$$= \varrho\,(y_1{}^n,\ \alpha^{n-1}\,(y_1{}^n)) = (\alpha^{n-1})'\,(y_1{}^n)»$$

Se obtiene, pues, una secuencia de funciones $(\alpha^i)_{0 \leq i \leq n}$ que verifica (5′), (5″), (5‴) y (5^{IV}).

Observemos, que puesto que: $[y_1{}^{n-1} - k, y_1{}^{n-1} + k] \cap [y_1{}^n - k, y_1{}^n + k] = [y_1{}^{n-1}, y_1{}^n]$ y $\alpha^{n-1} = \chi^{(\vec{y}^{n-1};\, Q(\vec{y}^{n-1}))}_{(y_1{}^{n-1},\, \alpha^{n-2}(y_1{}^{n-1}))\,|\,[y_1{}^{n-1},\, y_1{}^n]} =$

$$= \chi^{(\vec{y}^{n-1};\, Q(\vec{y}^{n-1}))}_{(y_1{}^{n-1},\, \alpha^{n-2}(y_1{}^{n-1}))\,|\,[y_1{}^{n-1}-k,\, y_1{}^{n-1}+k]\cap[y_1{}^n-k,\, y_1{}^n+k]} =$$

$$= \chi^{(\vec{y}^{n};\, Q(\vec{y}^{n}))}_{(y_1{}^{n},\, \alpha^{n-1}(y_1{}^{n}))\,|\,[y_1{}^{n-1}-k,\, y_1{}^{n-1}+k]\cap[y_1{}^n-k,\, y_1{}^n+k]} = \chi^{(\vec{y}^{n};\, Q(\vec{y}^{n}))}_{(y_1{}^{n},\, \alpha^{n-1}(y_1{}^{n}))\,|\,[y_1{}^{n-1},\, y_1{}^n]} \text{ y}$$

y $\alpha^n = \chi^{(\vec{y}^{n};\, Q(\vec{y}^{n}))}_{(y_1{}^{n},\, \alpha^{n-1}(y_1{}^{n}))\,|\,[y_1{}^{n},\, y_1{}^n+k]}$ son válidas en virtud de (5), las relaciones:

$$\left.\begin{array}{l} «(\forall x_1)\ (x_1 \in]\tilde{x}_1 - l,\ \tilde{x}_1 + l[\ \cap [y_1{}^{n-1},\ y_1{}^n] \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow |\alpha^{n-1}(x_1) - \lambda(\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_1{}^0,\ \tilde{x}_2{}^0)| < \varepsilon)» \\ «(\forall x_1)\ (x_1 \in]\tilde{x}_1 - l,\ \tilde{x}_1 + l[\ \cap [y_1{}^n,\ y_1{}^n + k] \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow |\alpha^n(x_1) - \lambda(\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_1{}^0,\ \tilde{x}_2{}^0)| < \varepsilon)» \end{array}\right\} \quad (6)$$

Sea, como en el número precedente, $f : [y_1{}^0 - k, y_1{}^n + k] \longrightarrow \mathbf{R}$, la función que para todo $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ prolonga α^i a $[y_1{}^0 - k, y_1{}^n + k]$, la cual es por tanto solución local en G de (1) pasando por $\vec{x}^0 = (x_1{}^0, x_2{}^0)$, y definida sobre el intervalo $[y_1{}^0 - k, y_1{}^n + k]$, teniéndose, por consiguiente, que:

$$«x_1{}^{izq}(\vec{x}^0) < y_1{}^0 - k < y_1{}^n - k \leq \tilde{x}_1 - l < \tilde{x}_1 + l \leq y_1{}^n + k < x_1{}^{der}(\vec{x}^0)»$$

así como y en virtud de (6), dado que: $]\tilde{x}_1 - l, \tilde{x}_1 + l[=]\tilde{x}_1 - l, \tilde{x}_1 + l[\cap [y_1{}^n - k, y_1{}^n + k] = (]\tilde{x}_1 - l, \tilde{x}_1 + l[\cap [y_1{}^{n-1}, y_1{}^n]) \cup (]\tilde{x}_1 - l, \tilde{x}_1 + l[\cap [y_1{}^n, y_1{}^n + k])$ y $f_{|[y_1{}^{n-1}, y_1{}^n]} = \alpha^{n-1}$ y $f_{|[y_1{}^n, y_1{}^n + k]} = \alpha^n$, se verifica que:

$$«(\forall x_1)\ (x_1 \in]\tilde{x}_1 - l,\ \tilde{x}_1 + l[\Rightarrow |f(x_1) - \lambda(\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_1{}^0,\ \tilde{x}_2{}^0)| < \varepsilon)»$$

todo lo cual entraña:

$$\begin{array}{c} «]\tilde{x}_1 - l,\ \tilde{x}_1 + l[\ \times \{\vec{x}^0\} \subset \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \text{ y } (\forall x_1)\ (x_1 \in]\tilde{x}_1 - l,\ \tilde{x}_1 + l[\Rightarrow \\ \Rightarrow |\Psi_{(\vec{x}^0)}(x_1) - \lambda(\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_1{}^0,\ \tilde{x}_2{}^0)| = |\Psi_{(\vec{x}^0)\,|\,[y_1{}^0 - k,\, y_1{}^0 + k]}(x_1) - \lambda(\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_1{}^0,\ \tilde{x}_2{}^0)| = \\ = |f(x_1) - \lambda(\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_1{}^0,\ \tilde{x}_2{}^0)| < \varepsilon)» \end{array}$$

es decir, teniendo en cuenta la definición de λ: $\mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \longrightarrow \mathbf{R}$, se verifica que:

$$\begin{array}{c} «]\tilde{x}_1 - l,\ \tilde{x}_1 + l[\ \times \{\vec{x}^0\} \subset \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \text{ y } (\forall x_1)\ (x_1 \in]\tilde{x}_1 - l,\ \tilde{x}_1 + l[\Rightarrow \\ \Rightarrow |\lambda(x_1,\ x_1{}^0,\ x_2{}^0) - \lambda(\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_1{}^0,\ \tilde{x}_2{}^0)| < \varepsilon)» \end{array}$$

y dada la arbitrariedad de $\vec{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) \in Q^*(\tilde{\vec{x}}^0)$, se puede poner:

$$\left\{\begin{array}{c} «]\tilde{x}_1 - l,\ \tilde{x}_1 + l[\ \times Q^*(\tilde{\vec{x}}^0) \subset \mathfrak{A}_{(G;\varrho)}» \\ \text{y} \\ «(\forall_{(x_1, x_1^0, x_2^0)})\ ((x_1,\ x_1^0,\ x_2^0) \in]\tilde{x}_1 - l,\ \tilde{x}_1 + l[\ \times Q^*(\tilde{\vec{x}}^0) \Rightarrow \\ \Rightarrow |\lambda(x_1,\ x_1^0,\ x_2^0) - \lambda(\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_1^0,\ \tilde{x}_2^0)| < \varepsilon)» \end{array}\right.$$

Denotando por J al intervalo abierto $]\tilde{x}_1 - l,\ \tilde{x}_1 + l[\ \times Q^*(\tilde{\vec{x}}^0)$ de $\mathbf{R}^3$ centrado en $(\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_1^0,\ \tilde{x}_2^0)$, se tiene así:

$$«(\forall\,\varepsilon)\ (\varepsilon \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \Rightarrow (\exists\,J)\ (J \subset \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \text{ es un intervalo abierto}$$
$$\text{de } \mathbf{R}^3 \text{ centrado en } (\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_1^0,\ \tilde{x}_2^0) \text{ y } (\forall_{(x_1, x_1^0, x_2^0)})\ ((x_1,\ x_1^0,\ x_2^0) \in J \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |\lambda(x_1,\ x_1^0,\ x_2^0) - \lambda(\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_1^0,\ \tilde{x}_2^0)| < \varepsilon)))»$$

Resultado que establece la continuidad de λ en $(\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_1^0,\ \tilde{x}_2^0)$ en el caso 2.º), y que combinado con el resultado que se estableció en el caso 1.º), demuestran la continuidad de λ en todo punto $(\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_1^0,\ \tilde{x}_2^0) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)}$, y en definitiva, la continuidad de λ sobre $\mathfrak{A}_{(G;\varrho)}$.

Sentado esto, observemos que puesto que en virtud de la misma definición de $\mathfrak{A}_{(G;\varrho)}$, se verifica:

$$«(\forall\,\vec{x}^0)\ (\vec{x}^0 \in G = pr_{23}\,\mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \Rightarrow [(x_1,\ \vec{x}^0) = (x_1,\ x_1^0,\ x_2^0) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow x_1 \in]x_1^{izq}(\vec{x}^0),\ x_1^{der}(\vec{x}^0)[\,])»$$

o lo que es equivalente:

$$«(\forall\,\vec{x}^0)\ (\vec{x}^0 \in G = pr_{23}\,\mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \Rightarrow \{x_1 \in \mathbf{R} / (x_1,\ x_1^0,\ x_2^0) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)}\} =$$
$$=]x_1^{izq}(\vec{x}^0),\ x_1^{der}(\vec{x}^0)[\,)»$$

es decir, para todo $\vec{x}^0 = (x_1^0,\ x_2^0) \in G$, la aplicación parcial $\lambda_{(x_1^0, x_2^0)}$ determinada por λ relativamente a los valores x_1^0, x_2^0 del segundo y tercer argumento, está definida sobre el intervalo abierto $]x_1^{izq}(\vec{x}^0),\ x_1^{der}(\vec{x}^0)[$, y por otra parte, dado que:

$$«(\forall_{(x_1, x_1^0, x_2^0)})\ (x_1,\ x_1^0,\ x_2^0) = (x_1,\ \vec{x}^0) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda_{(x_1^0, x_2^0)}(x_1) = \lambda(x_1,\ x_1^0,\ x_2^0) = \Psi_{(\vec{x}^0)}(x_1))»$$

relación equivalente a la:

$$«(\forall \vec{x}^0)\ (\vec{x}^0 \in G \Rightarrow (\forall x_1)\ (x_1 \in]x_1^{izq}(\vec{x}^0),\ x_1^{der}(\vec{x}^0)[\Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda_{(x_1^0, x_2^0)}(x_1) = \Psi_{(\vec{x}^0)}(x_1)))»$$

se sigue de todo ello la validez de la relación:

$$«(\forall \vec{x}^0)\ (\vec{x}^0 \in G \Rightarrow \lambda_{(x_1^0, x_2^0)} = \Psi_{(\vec{x}^0)})»$$

la cual entraña:

$$«(\forall \vec{x}^0)\ (\vec{x}^0 \in G \Rightarrow \lambda_{(x_1^0, x_2^0)} \text{ es derivable sobre }]x_1^{izq}(\vec{x}^0),\ x_1^{der}(\vec{x}^0)[\text{ y} \\ \text{y } \lambda'_{(x_1^0, x_2^0)} = \Psi'_{(\vec{x}^0)})»$$

por lo que, [habida cuenta que: $(x_1, x_1^0, x_2^0) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \Leftrightarrow (x_1^0, x_2^0) = \vec{x}^0 \in G$ y $x_1 \in]x_1^{izq}(\vec{x}^0),\ x_1^{der}(\vec{x}^0)[$], se tiene que:

$$«(\forall_{(x_1, x_1^0, x_2^0)})((x_1, x_1^0, x_2^0) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \Rightarrow \lambda \text{ es derivable parcialmente respecto a su primer argumento en } (x_1, x_1^0, x_2^0) \text{ y } (D_1 \lambda)(x_1, x_1^0, x_2^0) = \\ = \lambda'_{(x_1^0, x_2^0)}(x_1) = \Psi'_{(\vec{x}^0)}(x_1) = \varrho(x_1, \Psi_{(\vec{x}^0)}(x_1)) = \varrho(x_1, \lambda(x_1, x_1^0, x_2^0)))»$$

es decir, se verifica que:

$$«\lambda \text{ es derivable parcialmente respecto a su primer argumento sobre } \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \text{ y } (\forall_{(x_1, x_1^0, x_2^0)})\ ((x_1, x_1^0, x_2^0) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \Rightarrow (D_1 \lambda)(x_1, x_1^0, x_2^0) = \\ = \varrho(x_1, \lambda(x_1, x_1^0, x_2^0)))»$$

y como acaba de demostrarme que λ es continua sobre $\mathfrak{A}_{(G;\varrho)}$, se tiene finalmente:

$$«\lambda \text{ es derivable parcialmente respecto a su primer argumento sobre } \\ \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \text{ y } D_1 \lambda \text{ es continua sobre } \mathfrak{A}_{(G;\varrho)}»$$

de acuerdo con lo afirmado al principio de este número.

A la función $\lambda : \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \subset \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ considerada se le denominará «integral general global en G de la ecuación diferencial ordinaria (1)».

OBSERVACIÓN 1.ª. — Consideremos un punto $(x_1, x_1^0, x_2^0) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)}$; se tiene que: $x_1^{izq}(\vec{x}^0) < x_1 < x_1^{der}(\vec{x}^0)$. Pongamos $x_2 = \lambda(x_1, x_1^0, x_2^0)$ y $\vec{x} = (x_1, x_2)$. Puesto que la aplicación parcial $\lambda_{(x_1^0, x_2^0)}$ determinada por λ relativamente a los valores x_1^0, x_2^0 del segundo y tercer argumento, es una solución local en G de (1) definida sobre el intervalo abierto $]x_1^{izq}(\vec{x}^0),\ x_1^{der}(\vec{x}^0)[$ y que pasa por el punto $\vec{x}$, se sigue:

$$«x_1^{izq}(\vec{x}) \leq x_1^{izq}(\vec{x}^0) < x_1^0 < x_1^{der}(\vec{x}^0) \leq x_1^{der}(\vec{x})» \ (*)$$

es decir, se tiene:

$$«x_1^{izq}(\vec{x}) < x_1^0 < x_1^{der}(\vec{x})»$$

lo que entraña:

$$«(x_1^0,\ x_1,\ x_2) \in \mathfrak{a}_{(G;\varrho)}»$$

y además, en virtud del teorema de unicidad de soluciones locales en G de (1) pasando por un punto, dado que la aplicación parcial $\lambda_{(x_1,x_2)}$ determinada por λ relativamente a los valores x_1, x_2 del segundo y tercer argumento, es asimismo una solución local en G de (1) pasando por $\vec{x}$, y habida cuenta (*), se verifica que:

$$«\lambda_{(x_1,x_2)|]x_1^{izq}(\vec{x}^0),\, x_1^{der}(\vec{x}^0)[} = \lambda_{(x_1^0,x_2^0)}»$$

lo que implica:

$$«\lambda_{(x_1,x_2)}(x_1^0) = \lambda(x_1^0,\ x_1,\ x_2) = x_2^0 = \lambda(x_1^0,\ x_1^0,\ x_2^0) = \lambda_{(x_1^0,x_2^0)}(x_1^0)»$$

es decir, la aplicación $\lambda_{(x_1,x_2)}$ determinada por λ relativamente a los valores x_1, x_2 del segundo y tercer argumento, es además de la solución global en G de (1) pasando por $\vec{x} = (x_1,\ x_2)$, una solución local en G de (1) pasando por $\vec{x}^0$, la cual está definida sobre el intervalo abierto $]x_1^{izq}(\vec{x}),\ x_1^{der}(\vec{x})[$, por lo que, en consecuencia, se tiene que:

$$«x_1^{izq}(\vec{x}^0) \leq x_1^{izq}(\vec{x}) < x_1^{der}(\vec{x}) \leq x_1^{der}(\vec{x}^0)»$$

relación que junto con la (*) establece la:

$$«x_1^{izq}(\vec{x}^0) = x_1^{izq}(\vec{x}) < x_1^{der}(\vec{x}) = x_1^{der}(\vec{x}^0)»$$

así como la relación:

$$«\lambda_{(x_1,x_2)} = \lambda_{(x_1^0,x_1^0)}»$$

En resumen, se verifica que:

$$«(\forall_{(x_1, x_1^0, x_2^0)})((x_1,\ x_1^0,\ x_2^0) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \text{ y } x_2 = \lambda(x_1,\ x_1^0,\ x_2^0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x_1^0,\ x_1,\ x_2) \in \mathfrak{I}_{(G;\varrho)} \text{ y } x_2^0 = \lambda(x_1^0,\ x_1,\ x_2) \text{ y } x_1^{izq}(\vec{x}) = x_1^{izq}(\vec{x}^0) \text{ y}$$
$$\text{y } x_1^{der}(\vec{x}) = x_1^{der}(\vec{x}^0) \text{ y } \lambda_{(x_1, x_2)} = \lambda_{(x_1^0, x_2^0)})»$$

Así pues, para todo $(x_1,\ x_1^0,\ x_2^0) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)}$, el valor del primer argumento de λ y el valor $x_2 = \lambda(x_1,\ x_1^0,\ x_2^0)$ de λ correspondiente a $(x_1,\ x_1^0,\ x_2^0)$ son intercambiables, respectivamente, con los valores x_1^0, x_2^0 del segundo y tercer argumento de λ, y las soluciones globales en G de la ecuación diferencial (1) pasando por $\vec{x}^0$ y pasando por $\vec{x}$, coinciden.

6. Continua diferenciabilidad sobre $\mathfrak{A}_{(G;\varrho)}$ de la integral global en G de la ecuación diferencial ordinaria $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1,\ x_2)$, en el supuesto de ser ϱ continua y continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre el abierto de definición G. — Supongamos ahora, que $\varrho : G \subset \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ además de ser continua sobre G, es continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre G, y sea $(\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_1^0,\ \tilde{x}_2^0) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)}$. Igual que anteriormente consideraremos los casos:

1.º) $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_1^0$. Si $Q(\vec{\tilde{x}}^0) = [\tilde{x}_1^0 - a,\ \tilde{x}_1^0 + a] \times [\tilde{x}_2^0 - b,\ \tilde{x}_2^0 + b] \subset G$ es un intervalo cerrado, centrado en $\vec{\tilde{x}}^0$ y contenido en G, y $M_{Q(\vec{\tilde{x}}^0)} = \sup\limits_{\vec{x} \in Q(\vec{\tilde{x}}^0)} |\varrho(\vec{x})|$, poniendo $k_Q = \text{mín}\left\{a,\ \dfrac{b}{4\,M_{Q(\vec{\tilde{x}}^0)}}\right\}$ si $M_{Q(\vec{\tilde{x}}^0)} > 0$, y $k_Q = a$ si $M_{Q(\vec{\tilde{x}}^0)} = 0$, así como $Q'(\vec{\tilde{x}}^0) = [\tilde{x}_1^0 - k_Q,\ \tilde{x}_1^0 + k_Q] \times \left[\tilde{x}_2^0 - \dfrac{b}{2},\ \tilde{x}_2^0 + \dfrac{b}{2}\right]$ y $I = [\tilde{x}_1^0 - k_Q,\ \tilde{x}_1^0 + k_Q] \times [x_1^0 - k_Q,\ x_1^0 + k_Q] \times \left[\tilde{x}_2^0 - \dfrac{b}{2},\ \tilde{x}_2^0 + \dfrac{b}{2}\right] = [\tilde{x}_1^0 - k_Q,\ \tilde{x}_1^0 + k_Q] \times Q'(\vec{\tilde{x}}^0)$, el teorema de existencia, unicidad y dependencia continua de soluciones [n.º 2 de esta INTRODUCCIÓN], permite poner:

$$«(\exists\, \chi^{(\vec{\tilde{x}}^0;\, Q(\vec{\tilde{x}}^0))})\,(\chi^{(\vec{\tilde{x}}^0;\, Q(\vec{\tilde{x}}^0))} \in C^1(I;\ \mathbf{R}) \text{ y } \chi^{(\vec{\tilde{x}}^0;\, Q(\vec{\tilde{x}}^0))} \text{ es una integral general local en } G \text{ de (1) relativamente a } \vec{\tilde{x}}^0)»$$

y puesto que, además:

«$(\forall\, \vec{x}^{\,0})\ (\vec{x}^{\,0} \in Q'(\vec{\tilde{x}}^{0}) \Rightarrow \chi^{(\vec{\tilde{x}}^{0};\, Q(\vec{\tilde{x}}^{0}))}_{(x_1{}^0,\, x_2{}^0)}$ es una solución local en G de (1) pasando por $\vec{x}^{\,0}$, definida sobre $]x_1{}^0 - k_Q,\ x_1{}^0 + k_Q[$ y $\lambda_{(x_1{}^0,\, x_2{}^0)} = \Psi'_{(\vec{x}^{\,0})}$ es la solución global en G de (1) pasando por $\vec{x}^{\,0})$»,

lo que entraña:

$$«(\forall\, \vec{x}^{\,0})\ (\vec{x}^{\,0} \in Q'(\vec{\tilde{x}}^{0}) \Rightarrow \lambda_{(x_1{}^0,\, x_2{}^0)\,|\,]\tilde{x}_1{}^0 - k_Q,\, \tilde{x}_1{}^0 + k_Q[} = \chi^{(\vec{\tilde{x}}^{0};\, Q(\vec{\tilde{x}}^{0}))}_{(x_1{}^0,\, x_2{}^0)})»$$

o lo que es equivalente:

$$«\lambda_{\,]\tilde{x}_1{}^0 - k_Q,\, \tilde{x}_1{}^0 + k_Q[\, \times\, Q'(\vec{\tilde{x}}^{0})} = \lambda_{|I} = \chi^{(\vec{\tilde{x}}^{0};\, Q(\vec{\tilde{x}}^{0}))}»$$

se deduce de todo ello que:

«$(\forall_{(x_1,\, x_1{}^0,\, x_2{}^0)})\ (x_1,\ x_1{}^0,\ x_2{}^0) \in \mathring{I} \Rightarrow \lambda$ es derivable parcialmente en $(x_1,\ x_1{}^0,\ x_2{}^0)$ respecto a todos sus argumentos y $(D_2\,\lambda)(x_1,\ x_1{}^0,\ x_2{}^0) =$

$$= (D_2\, \chi^{(\vec{\tilde{x}}^{0};\, Q(\vec{\tilde{x}}^{0}))})\,(x_1,\ x_1{}^0,\ x_2{}^0) =$$

$$= -\,\varrho\,(x_1{}^0,\ x_2{}^0) \cdot e^{\int_{x_1{}^0}^{x_1} (D_2\,\varrho)\,[t,\ \chi^{(\vec{\tilde{x}}^{0};\, Q(\vec{\tilde{x}}^{0}))}_{(t,\, x_1{}^0,\, x_2{}^0)}]\, dt} =$$

$$= -\,\varrho\,(x_1{}^0,\ x_2{}^0) \cdot e^{\int_{x_1{}^0}^{x_1} (D_2\,\varrho)\,[t,\ \lambda\,(t,\ x_1{}^0,\ x_2{}^0)]\, dt}$$ y $(D_3\,\lambda)(x_1,\ x_1{}^0,\ x_2{}^0) =$

$$= (D_3\, \chi^{(\vec{\tilde{x}}^{0};\, Q(\vec{\tilde{x}}^{0}))})\,(x_1,\ x_1{}^0,\ x_2{}^0) = e^{\int_{x_1{}^0}^{x_1} (D_2\,\varrho)\,[t,\ \chi^{(\vec{\tilde{x}}^{0};\, Q(\vec{\tilde{x}}^{0}))}_{(t,\, x_1{}^0,\, x_2{}^0)}]\, dt} =$$

$$= e^{\int_{x_1{}^0}^{x_1} (D_2\,\varrho)\,[t,\ \lambda\,(t,\ x_1{}^0,\ x_2{}^0)]\, dt})»$$

y en particular, dado que $(\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_1{}^0,\ \tilde{x}_2{}^0) = (\tilde{x}_1{}^0,\ \tilde{x}_1{}^0,\ \tilde{x}_2{}^0) \in\,]\tilde{x}_1{}^0 - k_Q,\ \tilde{x}_1{}^0 + k_Q[\, \times\, \mathring{Q}'(\vec{\tilde{x}}^{0}) = \mathring{I}$, se verifica:

«λ es derivable parcialmente respecto al segundo y al tercer argumento en $(\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_1{}^0,\ \tilde{x}_2{}^0)$ y $(D_2\,\lambda)(\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_1{}^0,\ \tilde{x}_2{}^0) =$

$$= -\,\varrho\,(\tilde{x}_1{}^0,\ \tilde{x}_2{}^0) \cdot e^{\int_{\tilde{x}_1{}^0}^{\tilde{x}_1} (D_2\,\varrho)\,[t,\ \lambda\,(t,\ \tilde{x}_1{}^0,\ \tilde{x}_2{}^0)]\, dt}$$ y

$$y\ (D_3\,\lambda)(\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_1{}^0,\ \tilde{x}_2{}^0) = e^{\int_{\tilde{x}_1{}^0}^{\tilde{x}_1} (D_2\,\varrho)\,[t,\ \lambda\,(t,\ \tilde{x}_1{}^0,\ \tilde{x}_2{}^0)]\, dt}»$$

2.º) $\widetilde{x}_1 \neq \widetilde{x}_1{}^0$. Supongamos sea $\widetilde{x}_1{}^0 < \widetilde{x}_1$ (Idéntico razonamiento se seguiría en el subcaso $\widetilde{x}_1 < \widetilde{x}_1{}^0$). Refiriéndonos nuevamente a la demostración del caso 2.º), del n.º 4, y determinada recurrentemente como allí la secuencia de intervalos abiertos de $\mathbf{R}$:

$$«J^{n-1};\ J^{n-2};\ \dots;\ J^1»$$

centrados respectivamente en:

$$«y_2{}^{n-1};\ y_2{}^{n-2};\ \dots;\ y_2{}^1»$$

y contenidos respectivamente en:

$$«\left[y_2{}^{n-1} - \frac{a}{2},\ y_2{}^{n-1} + \frac{a}{2}\right];\ \left[y_2{}^{n-2} - \frac{a}{2},\ y_2{}^{n-2} + \frac{a}{2}\right];\ \dots;\ \left[y_2{}^1 - \frac{a}{2},\ y_2{}^1 + \frac{a}{2}\right]»$$

con la condición:

$$«\chi^{(\vec{y}^{n-1};\, Q(\vec{y}^{n-1}))}\left(\{y_1{}^n\} \times \{y_1{}^{n-1}\} \times J^{n-1}\right) \subset \left[y_2{}^n - \frac{a}{2},\ y_2{}^n + \frac{a}{2}\right]» \qquad (6')$$

y (si $n - 2 \geq 1$):

$$«(\forall i)\ (i \in \{1,\ 2, \dots, n-2\} \rightarrow \chi^{(\vec{y}^i;\, Q(\vec{y}^i))}\left(\{y_1{}^{i+1}\} \times \{y_1{}^i\} \times J^i\right) \subset J^{i+1}» \qquad (6'')$$

así como el intervalo abierto $Q^*(\vec{y}^0)$ de $\mathbf{R}^2$, centrado en $\vec{y}^0 = \vec{\widetilde{x}}^0$ y contenido en $\widetilde{Q}(\vec{y}^0) =]y_1{}^0 - k,\ y_1{}^0 + k[\times \left[y_2{}^0 - \frac{a}{2},\ y_2{}^0 + \frac{a}{2}\right]$, que verifica:

$$«\chi^{(\vec{y}^0;\, Q(\vec{y}^0))}\left(\{y_1{}^1\} \times Q^*(\vec{y}^0)\right) \subset J^1» \qquad (6''')$$

[Si $n - 2 < 1$, y consecuentemente $n = 2$ (pues, por (4**) es $n - 2 \geq 0$), se consideraría únicamente la relación (6') y la (6'')], puesto que (n.º 2 de esta INTRODUCCIÓN), son válidas las relaciones:

$$«\chi^{(\vec{y}^0;\, Q(\vec{y}^0))}_{(y_1{}^1)|Q^*(\vec{y}^0)} : Q^*(\vec{y}^0)) \longrightarrow \mathbf{R} \text{ es diferenciable en } (x_1{}^0,\ x_2{}^0) = (\widetilde{x}_1{}^0,\ \widetilde{x}_2{}^0) \text{ y}$$

$$\text{y} \quad \left(\frac{\partial\, \chi^{(\vec{y}^0;\, Q(\vec{y}^0))}_{(y_1{}^1)|Q^*(\vec{y}^0)}}{\partial\, x_1{}^0}\right)\left\{\begin{matrix} x_1{}^0 = \widetilde{x}_1{}^0 \\ x_2{}^0 = \widetilde{x}_2{}^0 \end{matrix}\right\} = \left(D_2\, \chi^{(\vec{y}^0;\, Q(\vec{y}^0))}\right)(y_1{}^1,\ \widetilde{x}_1{}^0,\ \widetilde{x}_2{}^0) =$$

$$= -\varrho(\widetilde{x}_1{}^0,\ \widetilde{x}_2{}^0) \cdot e^{\int_{\widetilde{x}_1{}^0}^{y_1{}^1} (D_2\, \varrho)\left[t,\ \chi^{(\vec{y}^0;\, Q(\vec{y}^0))}(t,\ \widetilde{x}_1{}^0,\ \widetilde{x}_2{}^0)\right] dt} =$$

$$= -\varrho(\widetilde{x}_1{}^0, \widetilde{x}_2{}^0) \cdot e^{\int_{\widetilde{x}_1{}^0}^{y_1{}^1} (D_2\varrho)[t,\ \lambda(t,\ \widetilde{x}_1{}^0,\ \widetilde{x}_2{}^0)]\,dt} \quad \text{y}$$

$$\text{y}\ \left(\frac{\partial \chi^{(\vec{y}^0;\,Q(\vec{y}^0))}_{(y_1{}^1)|Q^*(\vec{y}^0)}}{\partial x^0{}_2}\right)_{\left\{\begin{smallmatrix} x_1{}^0 = \widetilde{x}_1{}^0 \\ x_2{}^0 = \widetilde{x}_2{}^0\end{smallmatrix}\right\}} = (D_3\chi^{(\vec{y}^0;\,Q(\vec{y}^0))})(y_1{}^1,\ \widetilde{x}_1{}^0,\ \widetilde{x}_2{}^0) =$$

$$= e^{\int_{\widetilde{x}_1{}^0}^{y_1{}^1} (D_2\varrho)[t,\ \lambda(t,\ \widetilde{x}_1{}^0,\ \widetilde{x}_2{}^0)]\,dt} \quad \text{y} \quad \chi^{(\vec{y}^0;\,Q(\vec{y}^0))}_{(y_1{}^1)|Q^*(\vec{y}^0)}(Q^*(\vec{y}^0)) \subset J^1\text{»} \qquad (7)$$

[Se ha tenido en cuenta que $\chi^{(\vec{y}^0;\,Q(\vec{y}^0))}_{(\widetilde{x}_1{}^0,\,\widetilde{x}_2{}^0)}$ es una solución local en G de (1), pasando por $(\widetilde{x}_1{}^0,\ \widetilde{x}_2{}^0)$, y definida sobre el intervalo $[\widetilde{x}_1{}^0 - k,\ \widetilde{x}_1{}^0 + k] = [\widetilde{x}_1{}^0 - k,\ y_1{}^1]$, y consecuentemente: $(\forall\, t)\ (t \in [\widetilde{x}_1{}^0,\ y_1{}^1] \Rightarrow \chi^{(\vec{y}^0;\,Q(\vec{y}^0))}_{(\widetilde{x}_1{}^0,\,\widetilde{x}_2{}^0)}(t) = \chi^{(\vec{y}^0;\,Q(\vec{y}^0))}(t,\ \widetilde{x}_1{}^0,\ \widetilde{x}_2{}^0) = \Psi_{(\widetilde{x}^0)}(t) = \lambda(t,\ \widetilde{x}_1{}^0,\ \widetilde{x}_2{}^0))$, lo que justifica la sustitución que en el integrando de la integral se ha efectuado] y si $n - 2 \geq 1$:

$$\text{«}\chi^{(\vec{y}^1;\,Q(\vec{y}^1))}_{(y_1{}^2,\,y_1{}^1)|J^1} : J^1 \longrightarrow \mathbf{R} \text{ es derivable en } x_2{}^0 = y_2{}^1 = \chi^{(\vec{y}^0;\,Q(\vec{y}^0))}_{(y_1{}^1)|Q^*(\vec{y}^0)}(\widetilde{x}_1{}^0,\ \widetilde{x}_2{}^0) \text{ y}$$

$$\text{y}\ \left(\frac{d\chi^{(\vec{y}^1;\,Q(\vec{y}^1))}_{(y_1{}^2,\,y_1{}^1)|J^1}}{dx_2{}^0}\right)_{x_2{}^0 = y_2{}^1} = (D_3\chi^{(\vec{y}^1;\,Q(\vec{y}^1))})(y_1{}^2,\ y_1{}^1,\ y_2{}^1) =$$

$$= e^{\int_{y_1{}^1}^{y_1{}^2} (D_2\varrho)[t,\ \chi^{(\vec{y}^1;\,Q(\vec{y}^1))}_{(t,\,y_1{}^1,\,y_2{}^1)}]\,dt} = e^{\int_{y_1{}^1}^{y_1{}^2} (D_2\varrho)[t,\ \lambda(t,\ y_1{}^1,\ y_2{}^1)]\,dt} \quad \text{y}$$

$$\text{y}\ \chi^{(\vec{y}^1;\,Q(\vec{y}^1))}_{(y_1{}^2,\,y_1{}^1)|J^1}(J^1) \subset J^2\text{»} \qquad (7')$$

y además (si $n - 2 \geq 2$):

$$\text{«}(\forall\, i)\ (i \in \{2,\ 3,\ \dots,\ n-2\} \Rightarrow \chi^{(\vec{y}^i;\,Q(\vec{y}^i))}_{(y_1{}^{i+1},\,y_1{}^i)|J^i} : J^i \longrightarrow \mathbf{R} \text{ es derivable en}$$

$$x_2{}^0 = y_2{}^i = \chi^{(\vec{y}^{i-1};\,Q(\vec{y}^{i-1}))}_{(y_1{}^i,\,y_1{}^{i-1})|J^{i-1}}(y_2{}^{i-1}) \text{ y } \left(\frac{d\chi^{(\vec{y}^i,\,Q(\vec{y}^i))}_{(y_1{}^{i+1},\,y_1{}^i)|J^i}}{dx_2{}^0}\right)_{x_2{}^0 = y_2{}^i} =$$

$$= (D_3\chi^{(\vec{y}^i;\,Q(\vec{y}^i))})(y_1{}^{i+1},\ y_1{}^i,\ y_2{}^i) = e^{\int_{y_1{}^i}^{y_1{}^{i+1}} (D_2\varrho)[t,\ \chi^{(\vec{y}^i;\,Q(\vec{y}^i))}_{(t,\,y_1{}^i,\,y_2{}^i)}]\,dt} =$$

$$= e^{\int_{y_1{}^i}^{y_1{}^{i+1}} (D_2\varrho)[t,\ \lambda(t,\ \widetilde{x}_1{}^0,\ \widetilde{x}_2{}^0)]\,dt} \quad \text{y} \quad \chi^{(\vec{y}^i;\,Q(\vec{y}^i))}_{(y_1{}^i,\,y_2{}^i)|J^i}(J^i) \subset J^{i+1}\text{»} \qquad (7'')$$

así como:

$$«\chi^{(\vec{y}^{n-1};\, Q(\vec{y}^{n-1}))}_{(y_1^n,\, y_1^{n-1})|J^{n-1}} : J^{n-1} \longrightarrow \mathbf{R} \text{ es derivable en } x_2^0 = y_2^{n-1} =$$

$$= \chi^{(\vec{y}^{n-2};\, Q(\vec{y}^{n-2}))}_{(y_1^{n-1},\, y_1^{n-2})|J^{n-2}} (y_2^{n-2}) \text{ y } \left(\frac{d\,\chi^{(\vec{y}^{n-1};\, Q(\vec{y}^{n-1}))}_{(y_1^n,\, y_1^{n-1})|J^{n-1}}}{d x_2^0} \right)_{x_2^0 = y_2^{n-1}} =$$

$$= (D_3\, \chi^{(\vec{y}^{n-1};\, Q(\vec{y}^{n-1}))}) (y_1^n, y_1^{n-1}, y_2^{n-1}) = e^{\int_{y_1^{n-1}}^{y_1^n} (D_2\, \varrho)\, [t,\, \chi^{(\vec{y}^{n-1};\, Q(\vec{y}^{n-1}))}_{(t,\, y_1^{n-1},\, y_2^{n-1})}]\, dt} =$$

$$= e^{\int_{y_1^{n-1}}^{y_1^n} (D_2\, \varrho)\, [t,\, \lambda(t,\, \widetilde{x}_1^0,\, \widetilde{x}_2^0)]\, dt} \quad \text{y}$$

$$\text{y} \quad \chi^{(\vec{y}^{n-1};\, Q(\vec{y}^{n-1}))}_{(y_1^n,\, y_1^{n-1})|J^{n-1}} (J^{n-1}) \subset \left[y_2^n - \frac{a}{2},\, y_2^n + \frac{a}{2} \right]» \tag{7'''}$$

y finalmente:

$$«\chi^{(\vec{y}^n;\, Q(\vec{y}^n))}_{(\widetilde{x}_1,\, y_1^n)} : \left] y_2^n - \frac{a}{2},\, y_2^n + \frac{a}{2} \right[\longrightarrow \mathbf{R} \text{ es derivable en } x_2^0 = y_2^n =$$

$$= \chi^{(\vec{y}^{n-1};\, Q(\vec{y}^{n-1}))}_{(y_1^n,\, y_1^{n-1})|J^{n-1}} (y_2^{n-1}) \text{ y } \left(\frac{d\,\chi^{(\vec{y}^n;\, Q(\vec{y}^n))}_{(\widetilde{x}_1,\, y_1^n)}}{d x_2^0} \right)_{x_2^0 = y_2^n} =$$

$$= (D_3\, \chi^{(\vec{y}^n;\, Q(\vec{y}^n))}) (\widetilde{x}_1, y_1^n, y_2^n) = e^{\int_{y_1^n}^{\widetilde{x}_1} (D_2\, \varrho)\, [t,\, \chi^{(\vec{y}^n;\, Q(\vec{y}^n))}_{(t,\, y_1^n,\, y_2^n)}]\, dt} =$$

$$= e^{\int_{y_1^n}^{\widetilde{x}_1} (D_2\, \varrho)\, [t,\, \lambda(t,\, \widetilde{x}_1^0,\, \widetilde{x}_2^0)]\, dt} » \tag{7^{IV}}$$

Si $n - 2 < 1$, y por tanto $n = 2$, consideraríamos únicamente las relaciones (7), (7‴) y (7^{IV}). Si $1 \leq n - 2 < 2$ (y consecuentemente $n = 3$), se considerarían tan solo las relaciones (7), (7′), (7‴) y (7^{IV}).

[Observemos que en virtud de la misma construcción de la secuencia $(\vec{y}^r)_{1 \leq r \leq n}$ (Véase (4***) del n.º 4), se tiene que: $(\forall r)\ (r \in \{1\ 2, \ldots, n\} \Rightarrow y_2^r = \Psi_{(\vec{\widetilde{x}}^0)} (y_1^r))$ (°), o lo que es equivalente: $(\forall r)\ (r \in \{1, 2, \ldots n\} \Rightarrow y_2^r = \lambda(y_1^r, \widetilde{x}_1^0, \widetilde{x}_2^0))$. Por otra parte, según se demostró en la OBSERVACIÓN 1.ª, $y_2^r = \lambda(y_1^r, \widetilde{x}_1^0, \widetilde{x}_2^0)$ entraña: $]x_1^{izq}(\vec{\widetilde{x}}^0), x_1^{der}(\vec{\widetilde{x}}^0)[=]x_1^{izq}(\vec{y}^r), x_1^{der}(\vec{y}^r)[$, y consecuentemente, en virtud del teorema de unicidad de soluciones locales pasando por un punto (en este caso por (°), para todo $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ es $\Psi_{(\vec{\widetilde{x}}^0)}$ una solución local en G

de (1) pasando por $\vec{y}^r$), es válida la relación $\Psi_{(\widetilde{\vec{x}}^0)} = \Psi_{(\vec{y}^r)}$. Ahora bien, se verifica que:

$(\forall\, r)\ (r \in \{1, 2, \ldots, n\} \Rightarrow \chi^{(\vec{y}^r;\, Q(\vec{y}^r))}_{(y_1{}^r,\, y_2{}^r)}$ es una solución local en G de (1) pasando por $\vec{y}^r$, definida sobre $[y_1{}^r - k,\ y_1{}^r + k]$), por lo que se sigue:

$(\forall\, r)\ (r \in \{1, 2, \ldots, n\} \Rightarrow (\forall\, t)\ (t \in [y_1{}^r - k,\ y_1{}^r + k] \Rightarrow \chi^{(\vec{y}^r;\, Q(\vec{y}^r))}_{(y_1{}^r,\, y_2{}^r)}(t) = \chi^{(\vec{y}^r;\, Q(\vec{y}^r))}(t,\ y_1{}^r,\ y_2{}^r) = \Psi_{(\vec{y}^r)}(t) = \Psi_{(\widetilde{\vec{x}}^0)}(t) = \lambda(t,\ \widetilde{x}_1{}^0,\ \widetilde{x}_2{}^0)))$. Este resultado justifica la sustitución que en los integrandos de las integrales que figuran en (7′), (7″), (7‴) y (7^{IV}) se ha efectuado], relaciones, que en virtud del teorema de diferenciación de funciones compuestas, y poniendo para abreviar:

$$\Theta = \chi^{(\vec{y}^n;\, Q(\vec{y}^n))}_{(\widetilde{x}_1,\, y_1{}^n)} \circ \chi^{(\vec{y}^{n-1};\, Q(\vec{y}^{n-1}))}_{(y_1{}^n,\, y_1{}^{n-1})|J^{n-1}} \circ \ldots \circ \chi^{(\vec{y}^1;\, Q(\vec{y}^1))}_{(y_1{}^2,\, y_1{}^1)|J^1} \circ \chi^{(\vec{y}^0;\, Q(\vec{y}^0))}_{(y_1{}^1)|Q^*(\vec{y}^0)}$$

entrañan a su vez la validez de la relación:

«la función compuesta Θ es diferenciable en $(x_1{}^0,\ x_2{}^0) = (\widetilde{x}_1{}^0,\ \widetilde{x}_2{}^0)$ y

$$\text{y}\ (D_1\,\Theta)(\widetilde{x}_1{}^0,\ \widetilde{x}_2{}^0) = -\varrho(\widetilde{x}_1{}^0,\ \widetilde{x}_2{}^0)\cdot e^{\int_{\widetilde{x}_1{}^0}^{y_1{}^1}(D_2\,\varrho)\,[t,\ \lambda(t,\ \widetilde{x}_1{}^0,\ \widetilde{x}_2{}^0)]\,dt}\cdot$$

$$\cdot\left(\prod_{1\leq i\leq n-1} e^{\int_{y_1{}^i}^{y_1{}^{i+1}}(D_2\,\varrho)\,[t,\lambda(t,\ \widetilde{x}_1{}^0,\ \widetilde{x}_2{}^0)]\,dt}\right)\cdot e^{\int_{y_1{}^n}^{\widetilde{x}_1}(D_2\varrho)\,[t,\ \lambda(t,\ \widetilde{x}_1{}^0,\ \widetilde{x}_2{}^0)]\,dt} =$$

$$= -\varrho(\widetilde{x}_1{}^0,\ \widetilde{x}_2{}^0)\cdot e^{\int_{\widetilde{x}_1{}^0}^{\widetilde{x}_1}(D_2\,\varrho)\,[t,\ \lambda(t,\ \widetilde{x}_1{}^0,\ \widetilde{x}_2{}^0)]\,dt}\quad \text{y}\ (D_2\,\Theta)(\widetilde{x}_1{}^0,\ \widetilde{x}_2{}^0) =$$

$$= e^{\int_{\widetilde{x}_1{}^0}^{y_1{}^1}(D_2\varrho)\,[t,\ \lambda(t,\ \widetilde{x}_1{}^0,\ \widetilde{x}_2{}^0)]\,dt}\cdot\left(\prod_{1\leq i\leq n-1} e^{\int_{y_1{}^i}^{y_1{}^{i+1}}(D_2\varrho)\,[t,\ \lambda(t,\ \widetilde{x}_1{}^0,\ \widetilde{x}_2{}^0)]\,dt}\right)\cdot$$

$$\cdot\, e^{\int_{y^n}^{\widetilde{x}_1}(D_2\varrho)\,[t,\ \lambda(t,\ \widetilde{x}_1{}^0,\ \widetilde{x}_2{}^0)]\,dt} = e^{\int_{\widetilde{x}_1{}^0}^{\widetilde{x}_1}(D_2\,\varrho)\,[t,\ \lambda(t,\ \widetilde{x}_1{}^0,\ \widetilde{x}_2{}^0)]\,dt}\text{»} \qquad (8)$$

Establecido esto, consideremos, como en el n.º 4, para todo punto $(x_1{}^0,\ x_2{}^0) = \vec{x}^0 \in Q^*(\vec{y}^0)$, la aplicación parcial $\chi^{(\vec{y}^0;\, Q(\vec{y}^0))}_{(x_1{}^0,\, x_2{}^0)}$ determinada por $\chi^{(\vec{y}^0;\, Q(\vec{y}^0))}$ relativamente a los valores $x_1{}^0$, $x_2{}^0$ del segundo y tercer argumento, la cual es una solución local en G de (1) pasando por $\vec{x}^0$, y definida sobre el intervalo $[y_1^0 - k, y_1^0 + k] = [y_1^0 - k, y_1^1]$. Pongamos $\alpha^0 = \chi^{(\vec{y}^0; Q(\vec{y}^0))}_{(x_1^0, x_2^0)}$. Se verifica:

«α^0 es una solución local en G de (1) pasando por $\vec{x}^0$, definida sobre

$$[y_1^0 - k, y_1^1] \text{ y } \alpha^0(y_1^1) = \chi^{(\vec{y}^0; Q(\vec{y}^0))}_{(y_1^1)|Q^*(\vec{y}^0)}(x_1^0, x_2^0) \in J^1 \text{ y}$$

$$\text{y } (y_1^1, \alpha^0(y_1^1)) \in [y_1^1 - k, y_1^1 + k] \times J^1 \subset$$

$$\subset [y_1^1 - k, y_1^1 + k] \times \left[y_2^1 - \frac{a}{2}, y_2^1 + \frac{a}{2}\right] = pr_2 I^1 \times pr_3 I^1\text{»}$$

Asimismo, la aplicación parcial $\chi^{(\vec{y}^1; Q(\vec{y}^1))}_{(y_1^1, \alpha^0(y_1^1))}$ determinada por $\chi^{(\vec{y}^1; Q(\vec{y}^1))}$ relativamente a los valores $y_1^1 \in pr_2 I^1$, $\alpha^0(y_1^1) \in pr_3 I^1$ del segundo y tercer argumento, es una solución local en G de (1) pasando por $(y_1^1, \alpha^0(y_1^1))$, y definida sobre el intervalo $[y_1^1 - k, y_1^1 + k]$. Poniendo $\alpha^1 = \chi^{(\vec{y}^1; Q(\vec{y}^1))}_{(y_1^1, \alpha^0(y_1^1))|[y_1^1, y_1^2]}$ se verifica, en virtud de lo precedente:

$$\text{«}\alpha^1(y_1^2) = \chi^{(\vec{y}^1; Q(\vec{y}^1))}_{(y_1^1, \alpha^0(y_1^1))|[y_1^1, y_1^2]}(y_1^2) = \chi^{(\vec{y}^1; Q(\vec{y}^1))}(y_1^2, y_1^1, \alpha^0(y_1^1)) =$$

$$= \chi^{(\vec{y}^1; Q(\vec{y}^1))}_{(y_1^2, y_1^1)|J^1}(\alpha^0(y^1_1)) = \chi^{(\vec{y}^1; Q(\vec{y}^1))}_{(y_1^2, y_1^1|J^1}(\chi^{(\vec{y}^0; Q(\vec{y}^0))}_{(y_1^1)|Q^*(\vec{y}^0)}(x_1^0, x_2^0)) =$$

$$= (\chi^{(\vec{y}^1; Q(\vec{y}^1))}_{(y_1^2, y_1^1)|J^1} \circ \chi^{(\vec{y}^0; Q(\vec{y}^0))}_{(y_1^1)|Q^*\vec{y}^0)})(x_1^0, x_2^0) \in J^2 \text{ y}$$

$$\text{y } (y_1^2, \alpha^1(y_1^2)) \in [y_1^2 - k, y_1^2 + k] \times J^2 \subset$$

$$\subset [y_1^2 - k, y_1^2 + k] \times \left[y_2^2 - \frac{a}{2}, y_2^2 + \frac{a}{2}\right] = pr_2 I^2 \times pr_3 I^2\text{»}$$

Por vía recurrente se obtendría una secuencia de funciones $(\alpha^i)_{0 \leq i \leq n}$, tal que:

«α^0 es una solución local en G de (1) pasando por $\vec{x}^0$, definida sobre

$$[y_1^0 - k, y_1^0 + k] \text{ y } \alpha^0(y_1^1) = \chi^{(\vec{y}^0; Q(\vec{y}^0))}_{(y_1^1)|Q^*(\vec{y}^0)}(x_1^0, x_2^0) \in J^1 \text{ y}$$

$$\text{y } (y_1^1, \alpha^0(y_1^1)) \in pr_2 I^1 \times pr_3 I^1\text{»} \tag{8'}$$

y (si $n - 2 \geq 1$):

«$(\forall i)(i \in \{1, 2, ..., n - 2\} \Rightarrow \alpha^i$ es una solución local por la derecha en G de (1), pasando por $(y_1^i, \alpha^{i-1}(y_1^i))$ y definida sobre $[y_1^i, y_1^{i+1}]$ y

$$\text{y } \alpha^i(y_1^{i+1}) = (\chi^{(\vec{y}^i; Q(\vec{y}^i))}_{(y_1^{i+1}, y_1^i)|J^i} \circ \ldots \circ \chi^{(\vec{y}^1; Q(\vec{y}^1))}_{(y_1^2, y_1^1)|J^1} \circ \chi^{(\vec{y}^0; Q(\vec{y}^0))}_{(y_1^1)|Q^*(\vec{y}^0)})(x_1^0, x_2^0) \in J^{i+1} \text{ y}$$

$$\text{y } (y_1^{i+1}, \alpha^i(y_1^{i+1})) \in pr_2 I^{i+1} \times pr_3 I^{i+1} \text{ y } \alpha^i(y_1^i) = \alpha^{i-1}(y_1^i) \text{ y}$$

$$\text{y } (\alpha^i)'(y_1^i) = \varrho(y_1^i, \alpha(y_1^i)) = \varrho(y_1^i, \alpha^{i-1}(y_1^i)) = (\alpha^{i-1})'(y_1^i))\text{»} \quad (8'')$$

y:

«α^{n-1} es una solución local por la derecha en G de (1) pasando por $(y_1^{n-1}, \alpha^{n-2}(y_1^{n-1}))$, definida sobre $[y_1^{n-1}, y_1^n]$ y $\alpha^{n-1}(y_1^n) =$

$$= (\chi^{(\vec{y}^{n-1}; Q(\vec{y}^{n-1}))}_{(y_1^n, y^{n-1})|J^{n-1}} \circ \ldots \circ \chi^{(\vec{y}^1; Q(\vec{y}^1))}_{(y_1^2, y_1^1)|J^1} \circ \chi^{(\vec{y}^0; Q(\vec{y}^0))}_{(y_1^1)|Q^*(\vec{y}^0)})(x_1^0, x_2^0) \in \left[y_2^n - \frac{a}{2}, y_2^n + \frac{a}{2}\right] \text{ y}$$

$$\text{y } (y_1^n, \alpha^{n-1}(y_1^n)) \in pr_2 I^n \times pr_3 I^n \text{ y } \alpha^{n-1}(y_1^{n-1}) = \alpha^{n-2}(y_1^{n-1}) \text{ y}$$

$$\text{y } (\alpha^{n-1})'(y_1^{n-1}) = \varrho(y_1^{n-1}, \alpha^{n-1}(y_1^{n-1})) =$$

$$= \varrho(y_1^{n-1}, \alpha^{n-2}(y_1^{n-1})) = (\alpha^{n-2})'(y_1^{n-1})\text{»} \quad (8''')$$

y:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{«}\alpha^n \text{ es una solución local por la derecha en } G \text{ de (1) pasando por} \\
\quad (y_1^n, \alpha^{n-1}(y_1^n)), \text{ definida sobre } [y_1^n, y_1^n + k] \text{ y } \alpha^n(\tilde{x}_1) = \\
= (\chi^{(\vec{y}^n; Q(\vec{y}^n))}_{(\tilde{x}_1, y_1^n)} \circ \chi^{(\vec{y}^{n-1}; Q(\vec{y}^{n-1}))}_{(y_1^n, y^{n-1})|J^{n-1}} \circ \ldots \circ \chi^{(\vec{y}^1; Q(\vec{y}^1))}_{(y_1^2, y_1^1)|J^1} \circ \chi^{(\vec{y}^0; Q(\vec{y}^0))}_{(y_1^1)|Q^*(\vec{y}^0)})(x_1^0, x_2^0) = \\
\quad = \Theta(x_1^0, x_2^0) \text{ y } \alpha^n(y_1^n) = \alpha^{n-1}(y_1^n) \text{ y } (\alpha^n)'(y_1^n) = \\
= \varrho(y_1^n, \alpha^n(y_1^n)) = \varrho(y_1^n, \alpha^{n-1}(y_1^n)) = (\alpha^{n-1})'(y_1^n)\text{»} \qquad (8^{\mathrm{IV}})
\end{array}\right\} (*)$$

Si $n - 2 < 1$, se considerarían únicamente las relaciones (8'), (8''') y (8^{IV}).

Igual que en el n.º 4 sea $f: [y_1^0 - k, y_1^n + k] \longrightarrow \mathbf{R}$ la solución local en G de (1) pasando por $(x_1^0, x_2^0) = \vec{x}^0$ que para todo $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ prolonga α^i a $[y_1^0 - k, y_1^n + k] = [y_1^0 - k, y_1^0 + k] \cup (\bigcup_{1 \le i \le n-1} [y_1^i, y_1^{i+1}]) \cup \cup [y_1^n, y_1^n + k]$.

(*) En virtud de la propia definición de la secuencia $(\alpha^i)_{0 \le i \le n}$ se tiene $\alpha^n = \chi^{(\vec{y}^n; Q(\vec{y}^n))}_{(y_1^n, \alpha^{n-1}(y_1^n))|[y_1^n, y_1^n + k]}$ y en consecuencia (dado que $\tilde{x}_1 \in [y_1^n, y_1^n + k]$ y habida cuenta la relación precedente), se verifica:

$$\alpha^n(\tilde{x}_1) = \chi^{(\vec{y}^n; Q(\vec{y}^n))}_{(y_1^n, \alpha^{n-1}(y_1^n))|[y_1^n, y_1^n + k]}(\tilde{x}_1) =$$

$$= \chi^{(\vec{y}^n; Q(\vec{y}^n))}(\tilde{x}_1, y_1^n, \alpha^{n-1}(y_1^n)) = \chi^{(\vec{y}^n; Q(\vec{y}^n))}_{(\tilde{x}_1, y_1^n)}(\alpha^{n-1}(y_1^n)) =$$

$$= \chi^{(\vec{y}^n; Q(\vec{y}^n))}_{(\tilde{x}_1, y_1^n)}((\chi^{(\vec{y}^{n-1}; Q(\vec{y}^{n-1}))}_{(y_1^n; y_1^{n-1})|J^{n-1}} \circ \ldots \circ \chi^{(\vec{y}^1; Q(\vec{y}^1))}_{(y_1^2, y_1^1)|J^1} \circ \chi^{(\vec{y}^0; Q(\vec{y}^0))}_{(y_1^1)|Q^*(\vec{y}^0)})(x_1^0, x_2^0)) =$$

$$= (\chi^{(\vec{y}^n; Q(\vec{y}^n))}_{(\tilde{x}_1, y_1^n)} \circ \chi^{(\vec{y}^{n-1}; Q(\vec{y}^{n-1}))}_{(y_1^n; y_1^{n-1})|J^{n-1}} \circ \ldots \circ \chi^{(\vec{y}^1; Q(\vec{y}^1))}_{(y_1^2, y_1^1)|J^1} \circ \chi^{(\vec{y}^0; Q(\vec{y}^0))}_{(y_1^1)|Q^*(\vec{y}^0)})(x_1^0, x_2^0)$$

Se tiene:

$$«\widetilde{x}_1 \in [y_1{}^n, y_1{}^n + k] \text{ y } f_{|[y_1{}^n, y_1{}^n + k]} = \alpha^n \text{ y } f = \Psi_{(\vec{x}^0)|[y_1{}^0 - k, y_1{}^n + k]}»$$

y consecuentemente:

$$«\Theta(x_1{}^0, x_2{}^0) = \alpha^n(\widetilde{x}_1) = f_{|[y_1{}^n, y_1{}^n + k]}(\widetilde{x}_1) = f(\widetilde{x}_1) =$$
$$= \Psi_{(\vec{x}^0)|[y_1{}^0 - k, y_1{}^n + k]}(\widetilde{x}_1) = \Psi_{(\vec{x}^0)}(\widetilde{x}_1) = \lambda(\widetilde{x}_1, x_1{}^0, x_2{}^0) = \lambda_{(\widetilde{x}_1)|Q^*(\vec{y}^0)}(x_1{}^0, x_2{}^0)»$$

Así pues, y dada la arbitrariedad de $(x_1{}^0, x_2{}^0) \in Q^*(\vec{y}^0)$, se verifica que:

$$«\Theta : Q^*(\vec{y}^0) \longrightarrow \mathbf{R} \text{ y } \lambda_{(\widetilde{x}_1)|Q^*(\vec{y}^0)} : Q^*(\vec{y}^0) \longrightarrow \mathbf{R} \text{ y}$$
$$\text{y } (\forall_{(x_1{}^0, x_2{}^0)})\left((x_1{}^0, x_2{}^0) \in Q^*(\vec{y}^0) \Rightarrow \Theta(x_1{}^0, x_2{}^0) = \lambda_{(\widetilde{x}_1)|Q^*(\vec{y}^0)}(x_1{}^0, x_2{}^0)\right)»$$

lo que entraña:

$$«\Theta = \lambda_{(\widetilde{x}_1)|Q^*(\vec{y}_0)}»$$

Teniendo en cuenta el resultado establecido en (8), [así como, que según se demostró en el n.º 4, se verifica que: $\{\widetilde{x}_1\} \times Q^*(\vec{y}^0) \subset \mathfrak{A}_{(G;\varrho)}$], y puesto que $(\widetilde{x}_1{}^0, \widetilde{x}_2{}^0) \in Q^*(\vec{y}^0) = \mathring{Q}^*(\vec{y}^0) \subset \mathfrak{A}_{(G;\varrho)}\langle \widetilde{x}_1 \rangle = \{(x_1{}^0, x_2{}^0) \in \mathbf{R}^2 / (\widetilde{x}_1, x_1{}^0, x_2{}^0) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)}\}$, se puede poner, por tanto:

«La aplicación parcial $\lambda_{(\widetilde{x}_1)}$ determinada por λ, relativamente al valor $\widetilde{x}_1$ del primer argumento, es derivable respecto a su primer argumento y respecto a su segundo argumento en $(\widetilde{x}_1{}^0, \widetilde{x}_2{}^0)$ y

$$\text{y } \left(\frac{\partial \lambda_{(\widetilde{x}_1)}}{\partial x_1{}^0}\right)_{\left\{ \substack{x_1{}^0 = \widetilde{x}_1{}^0 \\ x_2{}^0 = \widetilde{x}_2{}^0} \right\}} = -\varrho(\widetilde{x}_1{}^0, \widetilde{x}_2{}^0) \cdot e^{\int_{\widetilde{x}_1{}^0}^{\widetilde{x}_1} (D_2 \varrho)[t, \lambda(t, \widetilde{x}_1{}^0, \widetilde{x}_2{}^0)]\, dt} \quad \text{y}$$

$$\text{y } \left(\frac{\partial \lambda_{(\widetilde{x}_1)}}{\partial x_2{}^0}\right)_{\left\{ \substack{x_1{}^0 = \widetilde{x}_1{}^0 \\ x_2{}^0 = \widetilde{x}_2{}^0} \right\}} = e^{\int_{\widetilde{x}_1{}^0}^{\widetilde{x}_1} (D_2 \varrho)[t, \lambda(t, \widetilde{x}_1{}^0, \widetilde{x}_2{}^0)]\, dt} »$$

es decir:

«λ es derivable parcialmente respecto a su segundo argumento y respecto a su tercer argumento en $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_1{}^0, \widetilde{x}_2{}^0)$ y $(D_2 \lambda)(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_1{}^0, \widetilde{x}_2{}^0) =$

$$= -\varrho(\widetilde{x}_1{}^0, \widetilde{x}_2{}^0) \cdot e^{\int_{\widetilde{x}_1{}^0}^{\widetilde{x}_1} (D_2 \varrho)[t, \lambda(t, \widetilde{x}_1{}^0, \widetilde{x}_2{}^0)]\, dt} \quad \text{y}$$

$$\text{y } (D_3 \lambda)(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_1{}^0, \widetilde{x}_2{}^0) = e^{\int_{\widetilde{x}_1{}^0}^{\widetilde{x}_1} (D_3 \varrho)[t, \lambda(t, \widetilde{x}_1{}^0, \widetilde{x}_2{}^0)]\, dt} »$$

Resulta así, en el caso 2.º), demostrada la derivabilidad parcial de λ respecto a su segundo y tercer argumento en el punto $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_1{}^0, \widetilde{x}_2{}^0)$, así como establecido el valor de las derivadas parciales $(D_2\lambda)(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_1{}^0, \widetilde{x}_2{}^0)$ y $(D_3\lambda)(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_1{}^0, \widetilde{x}_2{}^0)$ de acuerdo con lo afirmado.

Combinando los casos 1.º) y 2.º), junto con la propiedad que se ha establecido en el número anterior relativa a la continua derivabilidad parcial de λ sobre $\mathfrak{A}_{(G;\varrho)}$ respecto a su primer argumento, y dado que $D_2\varrho$ se ha supuesto continua sobre G, así como que $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_1{}^0, \widetilde{x}_2{}^0) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)}$ es completamente arbitrario, se puede formular:

«λ es continuamente diferenciable sobre $\mathfrak{A}_{(G;\varrho)}$ y $(\forall_{(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_1{}^0, \widetilde{x}_2{}^0)})\ ((\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_1{}^0, \widetilde{x}_2{}^0) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \Rightarrow (D_1\lambda)(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_1{}^0, \widetilde{x}_2{}^0) = \varrho(\widetilde{x}_1, \lambda(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_1{}^0, \widetilde{x}_2{}^0))$ y

$$\text{y } (D_2\lambda)(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_1{}^0, \widetilde{x}_2{}^0) = -\varrho(\widetilde{x}_1{}^0, \widetilde{x}_2{}^0)\cdot e^{\int_{\widetilde{x}_1{}^0}^{\widetilde{x}_1} (D_2\varrho)[t,\ \lambda(t, \widetilde{x}_1{}^0, \widetilde{x}_2{}^0)]\,dt} \quad \text{y}$$

$$\text{y } (D_3\lambda)(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_1{}^0, \widetilde{x}_2{}^0) = e^{\int_{\widetilde{x}_1{}^0}^{\widetilde{x}_1} (D_2\varrho)[t,\ \lambda(t, \widetilde{x}_1{}^0, \widetilde{x}_2{}^0)]\,dt} \quad)\text{»}$$

Observación 2.ª. — Supongamos que el abierto G (sobre el cual es ϱ continua y localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento) es acotado (y consecuentemente, lo es asimismo el subconjunto abierto $pr_1 G \subset \mathbf{R}$), y que ϱ es, además, acotada sobre G. Si $\vec{x}^0 \in G$, puesto que:

$$\text{«}(\forall x_1)\ (x_1 \in]x_1{}^{izq}(\vec{x}^0),\ x_1{}^{der}(\vec{x}^0)[\Rightarrow (x_1,\ \Psi_{(\vec{x}^0)}(x_1)) \in G)\text{»}$$

y en consecuencia:

$$\text{«}(\forall x_1)\ (x_1 \in]x_1{}^{izq}(\vec{x}^0),\ x_1{}^{der}(\vec{x}^0)[\Rightarrow x_1 \in pr_1 G)\text{»}$$

se sigue:

$$\text{«}]x_1{}^{izq}(\vec{x}^0),\ x_1{}^{der}(\vec{x}^0)[\subset pr_1 G\text{»}$$

lo que entraña:

$$\text{«} -\infty < x_1{}^{izq}(\vec{x}^0) < x_1{}^{der}(\vec{x}^0) < +\infty \text{»}$$

Sea $M = \sup\limits_{(x_1, x_2) \in G} |\varrho(x_1, x_2)| < +\infty$. Para todo $\varepsilon \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$, pongamos: $\eta = \dfrac{\varepsilon}{M+1} \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$, así como y para abreviar: $I_{(\vec{x}^0)} =$

$=]x_1^{izq}(\vec{x}^0), x_1^{der}(\vec{x}^0)[$. Si $(x_1, x_1^*) \in (]x_1^{der}(\vec{x}^0) - \eta, x_1^{der}(\vec{x}^0)[\cap I_{(\vec{x}^0)}) \times \times (]x_1^{der}(\vec{x}^0) - \eta, x_1^{der}(\vec{x}^0)[\cap I_{(\vec{x}^0)})$, se verifica que existe un $\xi_1 \in \in [\text{mín } \{x_1, x_1^*\}, \text{ máx } \{x_1, x_1^*\}] \subset I_{(\vec{x}^0)}$ tal que:

$$«\Psi_{(\vec{x}^0)}(x_1) - \Psi_{(\vec{x}^0)}(x_1^*) = (x_1 - x_1^*) \cdot \Psi'_{(\vec{x}^0)}(\xi_1) = \\ = (x_1 - x_1^*) \cdot \varrho(\xi_1, \Psi_{(\vec{x}^0)}(\xi_1))»$$

y por tanto:

$$«|\Psi_{(\vec{x}^0)}(x_1) - \Psi_{(\vec{x}^0)}(x_1^*)| = |x_1 - x_1^*| \cdot |\varrho(\xi_1, \Psi_{(\vec{x}^0)}(\xi_1))| < \eta \cdot M = \\ = \frac{M}{M+1} \cdot \varepsilon \leq \varepsilon»$$

es decir, se cumple la condición de CAUCHY, por lo que:

$$«\text{Existe } \Psi_{(\vec{x}^0)}(x_1^{der}(\vec{x}^0) - 0)»$$

y análogamente se demostraría que:

$$«\text{Existe } \Psi_{(\vec{x}^0)}(x_1^{izq}(\vec{x}^0) + 0)»$$

Es inmediato verificar que:

$$«(x_1^{izq}(\vec{x}^0), \Psi_{(\vec{x}^0)}(x_1^{izq}(\vec{x}^0) + 0)) \in \overline{G} \text{ y } (x_1^{der}(\vec{x}^0), \Psi_{(\vec{x}^0)}(x_1^{der}(\vec{x}^0) - 0)) \in \overline{G}»$$

así como, mediante un razonamiento enteramente similar al utilizado en el n.º 3 (para demostrar que para toda solución local en G de (1) pasando por $\vec{x}^0$, y definida sobre el intervalo cerrado $[x_1', x_1'']$, es válida la inclusión: $[x_1', x_1''] \subset]x_1^{izq}(\vec{x}^0), x_1^{der}(\vec{x}^0)[$), se prueba que:

$$«(x_1^{izq}(\vec{x}^0), \Psi_{(\vec{x}^0)}(x_1^{izq}(\vec{x}^0) + 0)) \notin G \text{ y } (x_1^{der}(\vec{x}^0), \Psi_{(\vec{x}^0)}(x_1^{der}(\vec{x}^0) - 0)) \notin G»$$

por lo que:

$$«(x_1^{izq}(\vec{x}^0), \Psi_{(\vec{x}^0)}(x_1^{izq}(\vec{x}^0) + 0)) \in \text{Fr } G \text{ y} \\ \text{y } (x_1^{der}(\vec{x}^0), \Psi_{(\vec{x}^0)}(x_1^{der}(\vec{x}^0) - 0)) \in \text{Fr } G» \ (*)$$

Sea ahora $\widehat{\varrho} : \widehat{G} \subset \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ una función continua y localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre el abierto $\widehat{G}$, y

(*) Mediante Fr G denotamos la frontera del abierto G, es decir el conjunto $\overline{G} \cap \complement_{\mathbf{R}^2} G$.

sea G, otro abierto de $\mathbf{R}^2$, acotado y tal que $\overline{G} \subset \widehat{G}$; poniendo $\varrho = \widehat{\varrho}_{|G}$, es $\varrho : G \longrightarrow \mathbf{R}^2$ continua, localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento y acotada sobre G, ($\overline{G}$ es un compacto de $\mathbf{R}^2$, lo que entraña $\sup\limits_{(x_1, x_2) \in \overline{G}} |\widehat{\varrho}(x_1, x_2)| < +\infty$, y consecuentemente, $\sup\limits_{(x_1, x_2) \in G} |\varrho(x_1, x_2)| < < +\infty$), por lo que en virtud de lo precedente, para todo $\vec{x}^0 \in G$, se tiene que:

$$\left.\begin{array}{c} \text{«Existe } \Psi_{(\vec{x}^0)}(x_1^{izq}(\vec{x}^0) + 0) \text{ y existe } \Psi_{(\vec{x}^0)}(x_1^{der}(\vec{x}^0) - 0)\text{»} \\ \text{y} \\ \text{«}(x_1^{izq}(\vec{x}^0),\ \Psi_{(\vec{x}^0)}(x_1^{izq}(\vec{x}^0) + 0)) \in \operatorname{Fr} G \subset \widehat{G} \text{ y} \\ \text{y } (x_1^{der}(\vec{x}^0),\ \Psi_{(\vec{x}^0)}(x_1^{der}(\vec{x}^0) - 0)) \in \operatorname{Fr} G \subset \widehat{G}\text{»} \end{array}\right.$$

Puesto que:

$$\text{«}(\forall x_1)\ (x_1 \in]x_1^{izq}(\vec{x}^0),\ x_1^{der}(\vec{x}^0)[\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Psi'_{(\vec{x}^0)}(x_1) = \varrho(x_1, \Psi_{(\vec{x}^0)}(x_1)) = \widehat{\varrho}(x_1, \Psi_{(\vec{x}^0)}(x_1)))\text{»}$$

se sigue en consecuencia que:

$$\begin{array}{c} \text{«existe } \Psi'_{(\vec{x}^0)}(x_1^{izq}(\vec{x}^0) + 0) \text{ y existe } \Psi'_{(\vec{x}^0)}(x_1^{der}(\vec{x}^0) - 0)\text{»} \\ \text{y} \\ \text{«}\Psi'_{(\vec{x}^0)}(x_1^{izq}(\vec{x}^0) + 0) = \widehat{\varrho}(x_1^{izq}(\vec{x}^0),\ \Psi_{(\vec{x}^0)}(x_1^{izq}(\vec{x}^0) + 0)) \text{ y} \\ \text{y } \Psi'_{(\vec{x}^0)}(x_1^{der}(\vec{x}^0) - 0) = \widehat{\varrho}(x_1^{der}(\vec{x}^0),\ \Psi_{(\vec{x}^0)}(x_1^{der}(\vec{x}^0) - 0))\text{»} \end{array}$$

Consideremos la aplicación $f : [x_1^{izq}(\vec{x}^0),\ x_1^{der}(\vec{x}^0)] \longrightarrow \mathbf{R}$ así definida:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 \in]x_1^{izq}(\vec{x}^0),\ x_1^{der}(\vec{x}^0)[\longrightarrow f(x_1) = \Psi_{(\vec{x}^0)}(x_1) \in \mathbf{R} \\ x_1 \in \{x_1^{izq}(\vec{x}^0)\} \longrightarrow f(x_1) = \Psi_{(\vec{x}^0)}(x_1^{izq} + 0) \in \mathbf{R} \\ x_1 \in \{x_1^{der}(\vec{x}^0)\} \longrightarrow f(x_1) = \Psi_{(\vec{x}^0)}(x_1^{der} - 0) \in \mathbf{R} \end{array}\right\}$$

Se verifica que:

$$\begin{array}{c} \text{«}x_2^0 = f(x_1^0) \text{ y } f \text{ es continua sobre } [x_1^{izq}(\vec{x}^0),\ x_1^{der}(\vec{x}^0)] \text{ y} \\ \text{y } f_{|]x_1^{izq}(\vec{x}^0),\ x_1^{der}(\vec{x}^0)[} = \Psi_{(\vec{x}^0)} \text{ es derivable sobre }]x_1^{izq}(\vec{x}^0),\ x_1^{der}(\vec{x}^0)[\text{ y} \\ \text{y } (\forall x_1)\ (x_1 \in]x_1^{izq}(\vec{x}^0),\ x_1^{der}(\vec{x}^0)[\Rightarrow (x_1, f(x_1)) \in G \subset \widehat{G} \text{ y} \\ \text{y } f'(x_1) = \widehat{\varrho}(x_1, f(x_1))) \text{ y } (x_1^{izq}(\vec{x}^0),\ f(x_1^{izq}(\vec{x}^0))) \in \operatorname{Fr} G \subset \widehat{G} \text{ y} \end{array}$$

$$\text{y} \quad (x_1^{der}(\vec{x}^0),\ f(x_1^{der}(\vec{x}^0))) \in \text{Fr } G \subset \widehat{G} \quad \text{y} \quad \text{existe} \quad f'(x_1^{izq}(\vec{x}^0)+0) \quad \text{y}$$

$$\text{y } f'(x_1^{izq}(\vec{x}^0)+0) = \Psi'_{(\vec{x}^0)}(x_1^{izq}(\vec{x}^0)+0) =$$

$$= \widehat{\varrho}(x_1^{izq}(\vec{x}^0),\ \Psi_{(\vec{x}^0)}(x_1^{izq}(\vec{x}^0)+0)) \text{ y existe } f'(x_1^{der}(\vec{x}^0)-0) =$$

$$= \Psi'_{(\vec{x}^0)}(x_1^{der}(\vec{x}^0)-0) = \widehat{\varrho}(x_1^{der}(\vec{x}^0),\ \Psi_{(\vec{x}^0)}(x_1^{der}(\vec{x}^0)-0))\text{»}$$

y consecuentemente:

$$\text{«}f: [x_1^{izq}(\vec{x}^0),\ x_1^{der}(\vec{x}^0)] \longrightarrow \mathbf{R} \text{ es derivable sobre } [x_1^{izq}(\vec{x}^0),\ x_1^{der}(\vec{x}^0)] \text{ y}$$

$$\text{y} \quad (\forall x_1)\ (x_1 \in [x_1^{izq}(\vec{x}^0),\ x_1^{der}(\vec{x}^0)] \Rightarrow f'(x_1) = \widehat{\varrho}(x_1, f(x_1)) \quad \text{y}$$

$$\text{y} \quad (x_1, f(x_1)) \in \widehat{G}) \quad \text{y} \quad x_2^0 = f(x_1^0) \quad \text{y} \quad f_{|]x_1^{izq}(\vec{x}^0),\, x_1^{der}(\vec{x}^0)[} = \Psi_{(\vec{x}^0)} \quad \text{y}$$

$$\text{y} \quad (x_1^{izq}(\vec{x}^0),\ f(x_1^{izq}(\vec{x}^0))) \in \text{Fr } G \quad \text{y} \quad (x_1^{der}(\vec{x}^0),\ f(x_1^{der}(\vec{x}^0))) \in \text{Fr } G\text{»}$$

lo que entraña:

«$f: [x_1^{izq}(\vec{x}^0),\ x_1^{der}(\vec{x}^0)] \longrightarrow \mathbf{R}$ es una solución local en $\widehat{G}$ de la ecuación diferencial $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \widehat{\varrho}(x_1, x_2)$, pasando por $\vec{x}^0$, definida sobre el intervalo cerrado $[x_1^{izq}(\vec{x}^0),\ x_1^{der}(\vec{x}^0)]$ y $f_{|]x_1^{izq}(\vec{x}^0),\, x_1^{der}(\vec{x}^0)[} = \Psi_{(\vec{x}^0)}$ y

y $(x_1^{izq}(\vec{x}^0),\ f(x_1^{izq}(\vec{x}^0))) \in \text{Fr } G$ y $(x_1^{der}(\vec{x}^0),\ f(x_1^{der}(\vec{x}^0))) \in \text{Fr } G$»

Denotando por $\widehat{\Psi}_{(\vec{x}^0)}$ a la solución global en $\widehat{G}$ de la ecuación diferencial ordinaria $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \widehat{\varrho}(x_1, x_2)$, pasando por $\vec{x}^0$; y por $\widehat{x_1}^{izq}(\vec{x}^0)$, $\widehat{x_1}^{der}(\vec{x}^0)$, respectivamente, a las extremidades izquierda y derecha del intervalo abierto sobre el cual está definida dicha solución global $\widehat{\Psi}_{(\vec{x}^0)}$, se verifica como consecuencia de la relación precedente:

$$\text{«}[x_1^{izq}(\vec{x}^0),\ x_1^{der}(\vec{x}^0)] \subset]\widehat{x_1}^{izq}(\vec{x}^0),\ \widehat{x_1}^{der}(\vec{x})[\quad \text{y} \quad \widehat{\Psi}_{(\vec{x}^0)|]x_1^{izq}(\vec{x}^0),\, x_1^{der}(\vec{x}^0)[} =$$

$$= f_{|]x_1^{izq}(\vec{x}^0),\, x_1^{der}(\vec{x}^0)[} = \Psi_{(\vec{x}^0)} \quad \text{y} \quad (x_1^{izq}(\vec{x}^0),\ \widehat{\Psi}_{(\vec{x}^0)}\, x_1^{izq}(\vec{x}^0))) =$$

$$= (x_1^{izq}(\vec{x}^0),\ f(x_1^{izq}(\vec{x}^0))) \in \text{Fr } G \quad \text{y} \quad (x_1^{der}(\vec{x}^0),\ \widehat{\Psi}_{(\vec{x}^0)}(x_1^{der}(\vec{x}^0))) =$$

$$= (x_1^{der}(\vec{x}^0),\ f(x_1^{der}(\vec{x}^0))) \in \text{Fr } G\text{»}$$

Así pues, y dada la arbitrariedad de $\vec{x}^0 \in G$, se puede poner:

$$\text{«}(\forall \vec{x}^0)\ (\vec{x}^0 \in G \Rightarrow [x_1^{izq}(\vec{x}^0),\ x_1^{der}(\vec{x}^0)] \subset]\widehat{x_1}^{izq}(\vec{x}^0),\ \widehat{x_1}^{der}(\vec{x}^0)[\quad \text{y}$$

$$\text{y} \quad \widehat{\Psi}_{(\vec{x}^0)|]x_1^{izq}(\vec{x}^0),\, x_1^{der}(\vec{x}^0)[} = \Psi_{(\vec{x}^0)} \quad \text{y} \quad (x_1^{izq}(\vec{x}^0),\ \widehat{\Psi}_{(\vec{x}^0)}\, x_1^{izq}(\vec{x}^0))) \in \text{Fr } G \quad \text{y}$$

$$\text{y} \quad (x_1^{der}(\vec{x}^0),\ \widehat{\Psi}_{(\vec{x}^0)}(x_1^{der}(\vec{x}^0))) \in \text{Fr } G)\text{»}$$

Indicando por $\mathfrak{A}_{(\hat{G};\hat{\varrho})}$ al subconjunto de $\mathbf{R}^3$:

$$\{(x_1,\ x_1^0,\ x_2^0) \in \mathbf{R}^3/(x_1^0,\ x_2^0) \in \widehat{G} \ \text{ y } \ x_1 \in \left]\widehat{x_1}^{izq}(\vec{x}^0),\ \widehat{x_1}^{der}(\vec{x}^0)\right[\}$$

y por $\widehat{\lambda} : \mathfrak{A}_{(\hat{G};\hat{\varrho})} \longrightarrow \mathbf{R}$ a la integral general global en $\widehat{G}$ de la ecuación diferencial ordinaria $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \widehat{\varrho}(x_1,\ x_2)$, y dado que:

$$«(x_1,\ x_1^0,\ x_2^0) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \Rightarrow (x_1^0,\ x_2^0) = \vec{x}^0 \in G \subset \widehat{G} \ \text{ y}$$
$$\text{y } \ x_1 \in \left]x_1^{izq}(\vec{x}^0),\ x_1^{der}(\vec{x}^0)\right[\subset \left]\widehat{x_1}^{izq}(\vec{x}^0),\ \widehat{x_1}^{der}(\vec{x}^0)\right[»$$

y además:

$$«(x_1^0,\ x_2^0) = \vec{x}^0 \in \widehat{G} \ \text{ y } \ x_1 \in \left]\widehat{x_1}^{izq}(\vec{x}^0),\ \widehat{x_1}^{der}(\vec{x}^0)\right[\Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x_1,\ x_1^0,\ x_2^0) \in \mathfrak{A}_{(\hat{G};\hat{\varrho})}»$$

así como, en virtud de lo precedente:

$$«(x_1^0,\ x_2^0) \in G \ \text{ y } \ x_1 \in \left]x_1^{izq}(\vec{x}^0),\ x_1^{der}(\vec{x}^0)\right[\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda(x_1,\ x_1^0,\ x_2^0) = \Psi_{(\vec{x}^0)}(x_1) = \widehat{\Psi}_{(\vec{x}^0)}(x_1) = \widehat{\lambda}(x_1,\ x_1^0,\ x_2^0)»$$

se verifica como consecuencia de todo ello:

$$«\mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \subset \mathfrak{A}_{(\hat{G};\hat{\varrho})} \ \text{ y } \ \widehat{\lambda}_{|\mathfrak{A}_{(G;\varrho)}} = \lambda \ \text{ y}$$
$$\text{y } \ (x_1^{izq}(\vec{x}^0),\ \widehat{\lambda}(x_1^{izq}(\vec{x}^0),\ x_1^0,\ x_2^0)) \in \operatorname{Fr} G \ \text{ y}$$
$$\text{y } \ (x_1^{der}(\vec{x}^0),\ \widehat{\lambda}(x_1^{der}(\vec{x}^0),\ x_1^0,\ x_2^0)) \in \operatorname{Fr} G»$$

Se ha así establecido, que en el supuesto de ser $\widehat{G}$ un abierto de $\mathbf{R}^2$ conteniendo la adherencia $\bar{G}$ de un abierto acotado G de $\mathbf{R}^2$, y $\widehat{\varrho} : \widehat{G} \longrightarrow \mathbf{R}$ una función continua y localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre $\widehat{G}$, poniendo $\varrho = \widehat{\varrho}_{|G}$, se verifica que para todo $\vec{x}^0 \in G$, las extremidades $x_1^{izq}(\vec{x}^0)$, $x_1^{der}(\vec{x}^0)$ del intervalo $\left]x_1^{izq}(\vec{x}^0),\ x_1^{der}(\vec{x}^0)\right[$ de definición de la solución global en G de la ecuación diferencial $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1,\ x_2)$ pasando por el punto $\vec{x}^0$, pertenecen al intervalo $\left]\widehat{x_1}^{izq}(\vec{x}^0),\ \widehat{x_1}^{der}(\vec{x}^0)\right[$ de definición de la solución global en $\widehat{G}$ de la ecuación diferencial $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \widehat{\varrho}(x_1,\ x_2)$, pasando asimismo por $\vec{x}^0$, y además, si $\mathfrak{A}_{(G;\varrho)}$ y $\mathfrak{A}_{(\hat{G};\hat{\varrho})}$ son los respectivos conjuntos de definición de la integral general global λ en G de la ecuación diferencial $\frac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$ y de la integral general global $\widehat{\lambda}$ en $\widehat{G}$ de la ecuación diferencial $\frac{dx_2}{dx_1} = \widehat{\varrho}(x_1, x_2)$, se tiene, por otra parte: $\mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \subset \mathfrak{A}_{(\hat{G};\hat{\varrho})}$ y $\widehat{\lambda}_{|\mathfrak{A}_{(G;\varrho)}} = \lambda$ y $(x_1^{izq}(\vec{x}^0), \widehat{\lambda}(x_1^{izq}(\vec{x}^0), x_1^0, x_2^0)) \in \mathrm{Fr}\, G$ y $(x_1^{der}(\vec{x}^0), \widehat{\lambda}(x_1^{der}(\vec{x}^0), x_1^0, x_2^0)) \in \mathrm{Fr}\, G$.

7. Arcos de la clase (I') contenidos en un abierto G y relativamente a una ecuación diferencial ordinaria $\frac{dx_1}{dx_2} = \varrho(x_1, x_2)$, en la que $\varrho : G \subset \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ es continua y continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre el abierto de definición G. — Consideremos la ecuación diferencial ordinaria $\frac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$, en la que $\varrho : G \subset \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ se supone continua y continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre el abierto G de $\mathbf{R}^2$ y sean $r \in [r^A, r^B] \subset \mathbf{R} \longrightarrow x_1(r) \in \mathbf{R}$ y y $r \in [r^A, r^B] \subset \mathbf{R} \longrightarrow x_2(r) \in \mathbf{R}$, dos funciones numéricas definidas sobre el intervalo cerrado $[r^A, r^B]$ de $\mathbf{R}^2$, que verifican:

a) $\bigcup_{r \in [r^A, r^B]} \{(x_1(r), x_2(r))\} \subset G$

b) $r \in [r^A, r^B] \longrightarrow x_1(r) \in \mathbf{R}$ y $r \in [r^A, r^B] \longrightarrow x_2(r) \in \mathbf{R}$, son continuamente derivables sobre $[r^A, r^B]$, con derivadas no nulas en ningún punto de $[r^A, r^B]$ (y por tanto, $r \in [r^A, r^B] \longrightarrow x_1(r) \in \mathbf{R}$ y y $r \in [r^A, r^B] \longrightarrow x_2(r) \in \mathbf{R}$, son estrictamente monótonas sobre $[r^A, r^B]$), lo que entraña que el arco $C = \bigcup_{r \in [r^A, r^B]} \{(x_1(r), x_2(r))\}$ es un arco abierto, sin puntos múltiples y cortado por toda paralela a los ejes, a lo sumo, en un solo punto.

c) Se cumple la relación: $(\forall_{(y_1, y_2, r)}) ((y_1, y_2, r) \in G \times]r^A, r^B[\Rightarrow x_2'(r) - \varrho(y_1, y_2) \cdot x_1'(r) \neq 0)$.

A todo arco C, definido por dos funciones,

$$r \in [r^A, r^B] \subset \mathbf{R} \longrightarrow x_1(r) \in \mathbf{R} \quad \text{y} \quad r \in [r^A, r^B] \subset \mathbf{R} \longrightarrow x_2(r) \in \mathbf{R},$$

verificando *a)*, *b)*, y *c)*, se le denominará «arco de la clase (I') contenido en G relativamente a la ecuación diferencial ordinaria

$\frac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$». A las extremidades $(x_1(r^A), x_2(r^A))$, $(x_1(r^B), x_2(r^B))$ de dicho arco las indicaremos, respectivamente, por A, B.

Designemos por $\mathcal{E}_c^a$ al subconjunto de G:

$$«\mathcal{E}_c^a = \{(x_1, x_2) \in G / (\exists\, r)\ (r \in\,]r^A, r^B[\ \text{ y } \ (x_1, x_1(r), x_2(r)) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \ \text{ y } \\ \text{y} \ \ x_2 = \lambda(x_1, x_1(r), x_2(r)))\}»$$

En virtud de la OBSERVACIÓN 1.ª (núm. 5), puesto que: $(x_1(r), x_1, x_2) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)}$ y $x_2(r) = \lambda(x_1(r), x_1, x_2) \Longleftrightarrow (x_1, x_1(r), x_2(r)) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)}$ y $x_2 = \lambda(x_1, x_1(r), x_2(r))$, se puede poner:

$$«\mathcal{E}_c^a = \{(x_1, x_2) \in G / (\exists\, r)\ (r \in\,]r^A, r^B[\ \text{ y } \ (x_1(r), x_1, x_2) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \ \text{ y } \\ \text{y} \ \ x_2(r) = \lambda(x_1(r), x_1, x_2))\}»$$

(Observemos, de paso, que evidentemente se tiene: $C - \{A, B\} \subset \mathcal{E}_c^a$).

«$\mathcal{E}_c^a$ es un abierto de $\mathbf{R}^2$». En efecto, si $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*) \in \mathcal{E}_c^a$, en virtud de la misma definición de $\mathcal{E}_c^a$, se verifica:

$$«(\exists\, r^*)\ (r^* \in\,]r^A, r^B[\ \text{ y } \ (x_1(r^*), x_1^*, x_2^*) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \ \text{ y } \\ \text{y} \ \ x_2(r^*) - \lambda(x_1(r^*), x_1^*, x_2^*) = 0)» \tag{9}$$

Puesto que $\mathfrak{A}_{(G;\varrho)}$ es un abierto de $\mathbf{R}^3$ (n.º 4 de esta INTRODUCCIÓN), se puede poner:

$$«\exists_{(l,\eta)})\ ((l, \eta) \in [\mathbf{R}^+ - \{0\}] \times [\mathbf{R}^+ - \{0\}] \ \text{ y } \\ \text{y} \ \ ]x_1(r^*) - l,\ x_1(r^*) + l[\times B_\eta(\vec{x}^*) \subset \mathfrak{A}_{(G;\varrho)})»$$

y dado que, en virtud de b), es: $r \in [r^A, r^B] \longrightarrow x_1(r) \in \mathbf{R}$ continua sobre $[r^A, r^B]$, es válida, consecuentemente, la relación:

$$«(\exists\, \sigma)\ (\sigma \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \ \text{ y } \ ]r^* - \sigma, r^* + \sigma[\subset]r^A, r^B[\ \text{ y } \\ \text{y} \ \ (\forall\, r)\ (r \in\,]r^* - \sigma, r^* + \sigma[\Rightarrow x_1(r) \in\,]x_1(r^*) - l,\ x_1(r^*) + l[))»$$

Resulta, así, teniendo en cuenta dicha relación y la precedente, que:

$$«(\forall_{(r,\vec{x})})\ ((r, \vec{x}) \in\,]r^* - \sigma, r^* + \sigma[\times B_\eta(\vec{x}^*) \Rightarrow (x_1(r), x_1, x_2) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)})» \tag{9'}$$

por lo que está definida la aplicación compuesta:

$$(r,\ x_1,\ x_2) \in]r^* - \sigma,\ r^* + \sigma[\times B_\eta(\vec{x}^*) \longrightarrow F(r,\ x_1,\ x_2) =$$
$$= x_2(r) - \lambda(x_1(r),\ x_1,\ x_2) \in \mathbf{R}$$

la cual es continuamente diferenciable sobre $]r^* - \sigma,\ r^* + \sigma[\times B_\eta(\vec{x}^*)$, y verifica [teniendo en cuenta (9) y c)], las condiciones:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha)\quad F(r^*,\ x_1^*,\ x_2^*) = 0 \\ \beta)\quad (D_1 F)(r^*,\ x_1^*,\ x_2^*) = x_2'(r^*) - \varrho(x_1(r^*),\ \lambda(x_1(r^*),\ x_1^*, \\ \qquad x_2^*)).\ x'_1(r^*) \neq 0 \end{array}\right\}$$

En virtud del teorema de existencia de funciones implícitas, existe un disco abierto $B_{\eta^*}(\vec{x}^*) \subset B_\eta(\vec{x}^*)$ centrado en $\vec{x}^*$ y contenido en $B_\eta(\vec{x}^*)$, y una aplicación $h^{(\vec{x}^*)} : B_{\eta^*}(\vec{x}^*) \longrightarrow \mathbf{R}$ continuamente diferenciable sobre $B_{\eta^*}(\vec{x}^*)$, tal que:

$$\left\{\begin{array}{c} «r^* = h^{(\vec{x}^*)}(x_1^*,\ x_2^*)» \\ \text{y} \\ «(\forall_{(x_1,x_2)})\ ((x_1,\ x_2) \in B_{\eta^*}(\vec{x}^*) \Rightarrow h^{(\vec{x}^*)}(x_1,\ x_2) \in]r^* - \sigma,\ r^* + \sigma[\subset]r^A,\ r^B[\ \text{y} \\ \text{y}\ \ x_2(h^{(\vec{x}^*)}(x_1,\ x_2)) = \lambda(x_1(h^{(\vec{x}^*)}(x_1,\ x_2)),\ x_1,\ x_2))» \end{array}\right. \qquad (9'')$$

Se deduce que:

$$«h^{(\vec{x}^*)}(B_{\eta^*}(\vec{x}^*)) \times B_{\eta^*}(\vec{x}^*) \subset]r^* - \sigma,\ r^* + \sigma[\times B_\eta(\vec{x}^*)\ \ \text{y}$$
$$\text{y}\ \ (\forall_{(x_1,x_2)})\ ((x_1,\ x_2) \in B_{\eta^*}(\vec{x}^*) \Rightarrow x_2(h^{(\vec{x}^*)}(x_1,\ x_2)) =$$
$$= \lambda(x_1(h^{(\vec{x}^*)}(x_1,\ x_2)),\ x_1,\ x_2))»$$

y por tanto, en virtud de (9′), se verifica:

$$«(\forall_{(x_1,x_2)})\ ((x_1,\ x_2) \in B_{\eta^*}(\vec{x}^*) \Rightarrow (x_1(h^{(\vec{x}^*)}(x_1,\ x_2)),\ x_1,\ x_2) \in \mathfrak{A}_{(G;\,\varrho)}\ \ \text{y}$$
$$\text{y}\ \ x_2(h^{(\vec{x}^*)}(x_1,\ x_2)) = \lambda(x_1(h^{(\vec{x}^*)}(x_1,\ x_2)),\ x_1,\ x_2))» \qquad (9''')$$

por lo que, poniendo para todo $(x_1,\ x_2) \in B_{\eta^*}(\vec{x}^*) : r = h^{(\vec{x}^*)}(x_1,\ x_2)$, es válida, en virtud de lo precedente, la relación:

$$«(\forall_{(x_1,x_2)})\ ((x_1,\ x_2) \in B_{\eta^*}(\vec{x}^*) \Rightarrow (\exists\, r)\ (r \in]r^A,\ r^B[\ \ \text{y}$$
$$\text{y}\ \ (x_1(r),\ x_1,\ x_2) \in \mathfrak{A}_{(G;\,\varrho)}\ \ \text{y}\ \ x_2(r) = \lambda(x_1(r),\ x_1,\ x_2)))»$$

relación, que teniendo en cuenta la definición del conjunto $\mathcal{E}_c^a$, es equivalente a la:

$$«B_{\eta^*}(\vec{x}^*) \subset \mathcal{E}_c^a»$$

es decir:

$$«\vec{x}^* \in \overset{\circ}{\mathcal{E}}{}_c^a»$$

y dada la arbitrariedad de $\vec{x}^* \in \mathcal{E}_c^a$ se concluye que $\mathcal{E}_c^a$ es un abierto de $\mathbf{R}^2$ de acuerdo con lo afirmado.

Por otra parte, se verifica, además, que $\mathcal{E}_c^a$ es conexo. En efecto, dados dos puntos $(\vec{x}^*, \vec{x}^{**}) \in \mathcal{E}_c^a \times \mathcal{E}_c^a$, existen (en virtud de la propia definición de $\mathcal{E}_c^a$), $r^* \in]r^A, r^B[$ y $r^{**} \in]r^A, r^B[$, tales que:

$$«(x_1(r^*), x_1^*, x_2^*) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \text{ y } x_2(r^*) = \lambda(x_1(r^*), x_1^*, x_2^*)»$$

y

$$«(x_1(r^{**}), x_1^{**}, x_2^{**}) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \text{ y } x_2(r^{**}) = \lambda(x_1(r^{**}), x_1^{**}, x_2^{**})»$$

la primera de estas relaciones (habida cuenta la definición de $\mathfrak{A}_{(G;\varrho)}$, entraña:

$$«x_1(r^*) \in]x_1^{izq}(\vec{x}^*), x_1^{der}(\vec{x}^*)[\text{ y } x_1^* \in]x_1^{izq}(\vec{x}^*), x_1^{der}(\vec{x}^*)[\text{ y}$$
$$\text{y } x_2(r^*) = \lambda(x_1(r^*), x_1^*, x_2^*)»$$

deduciéndose que:

$$«[\text{mín } \{x_1(r^*), x_1^*\}, \text{máx } \{x_1(r^*), x_1^*\}] \subset]x_1^{izq}(\vec{x}^*), x_1^{der}(\vec{x}^*)[\text{ y}$$
$$\text{y } x_2(r^*) = \lambda(x_1(r^*), x_1^*, x_2^*)»$$

resultando, en consecuencia, ser válida la relación:

$$«(\forall x_1)(x_1 \in [\text{mín } \{x_1(r^*), x_1^*\}, \text{máx } \{x_1(r^*), x_1^*\}] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x_1, x^*_1, x^*_2) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \text{ y } x_1(r^*) \in]x_1^{izq}(\vec{x}^*), x_1^{der}(\vec{x}^*)[\text{ y}$$
$$\text{y } x_2(r^*) = \lambda(x_1(r^*), x_1^*, x_2^*))»$$

Poniendo para todo $(x_1, x_1^*, x_2^*) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)}$ para abreviar, $x_2 = \lambda(x_1, x_1^*, x_2^*)$ y teniendo en cuenta que en virtud de la OBSERVACIÓN 1.ª (n.º 5), se verifica que:

$$«(x_1, x_1^*, x_2^*) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \text{ y } x_2 = \lambda(x_1, x_1^*, x_2^*) \text{ y}$$
$$\text{y } x_1(r^*) \in]x_1^{izq}(\vec{x}^*), x_1^{der}(\vec{x}^*)[\text{ y } x_2(r^*) = \lambda(x_1(r^*), x_1^*, x_2^*) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 = \lambda(x_1, x_1^*, x_2^*) \text{ y } x_1(r^*) \in]x_1^{izq}(\vec{x}^*), x_1^{der}(\vec{x}^*)[= \\ =]x_1^{izq}(\vec{x}), x_1^{der}(\vec{x})[\text{ y } x_2(r^*) = \lambda(x_1(r^*), x_1^*, x_2^*)»$$

y dado que:

$$«x_2 = \lambda(x_1, x_1^*, x_2^*) \text{ y } x_1(r^*) \in]x_1^{izq}(\vec{x}^*), x_1^{der}(\vec{x}^*)[= \\ =]x_1^{izq}(\vec{x}), x_1^{der}(\vec{x})[\text{ y } x_2(r^*) = \lambda(x_1(r^*), x_1^*, x_2^*) \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda_{(x_1, x_2)} = \Psi_{(\vec{x})} :]x_1^{izq}(\vec{x}), x_1^{der}(\vec{x})[\longrightarrow \mathbf{R} \text{ y } x_2 = \Psi_{(\vec{x})}(x_1) \text{ y} \\ \text{y } \lambda_{(x_1^*, x_2^*)} = \Psi_{(\vec{x}^*)} :]x_1^{izq}(\vec{x}^*), x_1^{der}(\vec{x}^*)[\longrightarrow \mathbf{R} \text{ y } x_2 = \lambda(x_1, x^*_1, x_2^*) = \\ = \lambda_{(x_1^*, x_2^*)}(x_1) = \Psi_{(\vec{x}^*)}(x_1) \text{ y } x_1(r^*) \in]x_1^{izq}(\vec{x}^*), x_1^{der}(\vec{x}^*)[= \\ =]x_1^{izq}(\vec{x}), x_1^{der}(\vec{x})[\text{ y } x_2(r^*) = \Psi_{(\vec{x}^*)}(x_1(r^*))»$$

así como (habida cuenta el teorema de unicidad de soluciones locales de una ecuación diferencial ordinaria pasando por un punto):

$$«\Psi_{(\vec{x})} :]x_1^{izq}(\vec{x}), x_1^{dez}(\vec{x})[\longrightarrow \mathbf{R} \text{ y } x_2 = \Psi_{(\vec{x})}(x_1) \text{ y} \\ \text{y } \Psi_{(\vec{x}^*)} :]x_1^{izq}(\vec{x}^*), x_1^{der}(\vec{x}^*)[\longrightarrow \mathbf{R} \text{ y } x_2 = \Psi_{(\vec{x}^*)}(x_1) \text{ y} \\ \text{y } x_1(r^*) \in]x_1^{izq}(\vec{x}^*), x_1^{der}(\vec{x}^*)[=]x_1^{izq}(\vec{x}), x_1^{der}(\vec{x})[\text{ y} \\ \text{y } x_2(r^*) = \Psi_{(\vec{x}^*)}(x_1(r^*)) \Rightarrow \Psi_{(\vec{x})} = \Psi_{(\vec{x}^*)} \text{ y} \\ \text{y } x_1(r^*) \in]x_1^{izq}(\vec{x}), x_1^{der}(\vec{x})[\text{ y } x_2(r^*) = \Psi_{(\vec{x}^*)}(x_1(r^*))»$$

y que además:

$$«\Psi_{(\vec{x})} = \Psi_{(\vec{x}^*)} \text{ y } x_1(r^*) \in]x_1^{izq}(\vec{x}), x_1^{der}(\vec{x})[\text{ y} \\ \text{y } x_2(r^*) = \Psi_{(\vec{x}^*)}(x_1(r^*)) \Rightarrow \lambda(x_1(r^*), x_1, x_2) = \\ = \lambda_{(x_1, x_2)}(x_1(r^*)) = \Psi_{(\vec{x})}(x_1(r^*)) = \Psi_{(\vec{x}^*)}(x_1(r^*)) = \\ = \chi_{(x_1^*, x_2^*)}(x_1(r^*)) = \lambda(x_1(r^*), x_1^*, x_2^*) = x_2(r^*)»$$

se verifica, como consecuencia de todo ello, la relación:

$$«(\forall x_1)\ (x_1 \in [\text{mín}\ \{x_1(r^*), x_1^*\}, \text{máx}\ \{x_1(r^*), x_1^*\}] \Rightarrow \\ \Rightarrow (x_1(r^*), x_1, \lambda(x_1, x_1^*, x_2^*)) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \text{ y} \\ \text{y } x_2(r^*) = \lambda(x_1(r^*), x_1, \lambda(x_1, x_1^*, x_2^*)))»$$

lo que entraña:

$$«(\forall x_1)\ (x_1 \in [\text{mín}\ \{x_1(r^*),\ x_1^*\},\ \text{máx}\ \{x_1(r^*),\ x_1^*\}] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x_1,\ \lambda(x_1,\ x_1^*,\ x_2^*)) \in \mathcal{E}_c^a)»$$

es decir, poniendo:

$$H^* = \bigcup_{x_1 \in [\text{mín}\ \{x_1(r^*),\ x_1^*\},\ \text{máx}\ \{x_1(r^*).\ x_1^*\}]} \{(x_1,\ \lambda(x_1,\ x_1^*,\ x_2^*))\},$$

se tiene que:

$$«H^* \in \mathcal{E}_c^a»$$

y por otra parte, dado que, (j, denota la inyección canónica de $[\text{mín}\ \{x_1(r^*),\ x_1^*\},\ \text{máx}\ \{x_1(r^*),\ x_1^*\}]$ en $\mathbf{R}$):

$$«H^* = (j \times \lambda_{(x_1^*,\ x_2^*)})\ ([\text{mín}\ \{x_1(r^*),\ x^*_1\},\ \text{máx}\ \{x_1(r^*),\ x_1^*\}])»$$

y

$$«(x_1(r^*),\ x_2(r^*)) = (x_1(r^*),\ \lambda(x_1(r^*),\ x_1^*,\ x_2^*)) \in H^*»$$

y

$$«\vec{x}^* = (x_1^*,\ x_2^*) = (x^*,\ \lambda(x_1^*,\ x_1^*,\ x_2^*)) \in H^*»$$

y ser $j \times \lambda_{(x_1^*,\ x_2^*)}$ continua sobre $[\text{mín}\ \{x_1(r^*),\ x_1^*\},\ \text{máx}\ \{x_1(r^*),\ x_1^*\}]$ se concluye, por tanto, que:

$$«H^* \subset \mathcal{E}_c^a \text{ y } H^* \text{ es conexo y } (x_1(r^*),\ x_2(r^*)) \in H^* \text{ y } \vec{x}^* \in H^*» \quad (9^*)$$

Análogamente, poniendo $H^{**} = \bigcup_{x_1 \in [\text{mín}\ \{x_1(r^{**}),\ x_1^{**}\},\ \text{máx}\ \{x_1(r^{**}),x_1^{**}\}]} \{(x_1,\ \lambda(x_1,\ x_1^{**},\ x_2^{**}))\}$, se establecería la relación:

$$«H^{**} \subset \mathcal{E}_c^a \text{ y } H^{**} \text{ es conexo y}$$
$$\text{y } (x_1(r^{**}),\ x_2(r^{**})) \in H^{**} \text{ y } \vec{x}^{**} \in H^{**}» \quad (9^{**})$$

y además es inmediato verificar, haciendo $H^0 = \bigcup_{r \in [\text{mín}\ \{r^*,r^{**}\},\ \text{máx}\ \{r^*\ r^{**}\}]} \{x_1(r),\ x_2(r))\}$ que:

$$«H^0 \subset \mathcal{E}_c^a \text{ y } H^0 \text{ es conexo y } (x_1(r^*),\ x_2(r^*)) \in H^0 \text{ y}$$
$$\text{y } (x_1(r^{**}),\ x_2(r^{**})) \in H^0» \quad (9^0)$$

De (9*), (9**) y (9⁰), se sigue la validez de la relación:

$$«H^* \subset \mathcal{E}_c^a \text{ y } H^0 \subset \mathcal{E}_c^a \text{ y } H^{**} \subset \mathcal{E}_c^a \text{ y } H^* \text{ es conexo y } H^0 \text{ es conexo y}$$
$$\text{y } H^{**} \text{ es conexo y } H^* \cap H^0 \neq \phi \text{ y } H^0 \cap H^{**} \neq \phi \text{ y}$$
$$\text{y } \vec{x}^* \in H^* \text{ y } \vec{x}^{**} \in H^{**}»$$

la cual, y poniendo $H = H^* \cup H^0 \cup H^{**}$, entraña:

$$«H \subset \mathcal{E}_c^a \text{ y } H \text{ es conexo y } (\vec{x}^*, \vec{x}^{**}) \in H \times H»$$

Así, pues, y dada la arbitrariedad de $(\vec{x}^*, \vec{x}^{**}) \in \mathcal{E}_c^a \times \mathcal{E}_c^a$, se puede poner:

$$«(\forall_{(\vec{x}^*, \vec{x}^{**})}) ((\vec{x}^*, \vec{x}^{**}) \in \mathcal{E}_c^a \times \mathcal{E}_c^a \rightarrow (\exists H) (H \subset \mathcal{E}_c^a \text{ y } H \text{ es conexo y}$$
$$\text{y } (\vec{x}^*, \vec{x}^{**}) \in H \times H))»$$

deduciéndose, finalmente, la validez de la relación:

$$«\mathcal{E}_c^a \text{ es conexo}»$$

que junto con la anteriormente establecida: «$\mathcal{E}_c^a$ es un abierto de $\mathbf{R}^2$», permite afirmar: «$\mathcal{E}_c^a$ es un dominio de $\mathbf{R}^2$».

* * *

Observemos, de paso, que por ser la función $(r, \vec{x}) \in]r^* - \sigma, r^* + \sigma[\times B_\eta(\vec{x}^*) \longrightarrow F(r, x_1, x_2) = x_2(r) - \lambda(x_1(r), x_1, x_2) \in \mathbf{R}$, considerada precedentemente, continuamente diferenciable sobre $]r^* - \sigma, r^* + \sigma[\times B_\eta(\vec{x}^*)$ y verificar además las condiciones α) y β), el teorema de existencia de funciones implícitas asegura la continua diferenciabilidad de $h^{(\vec{x}^*)}$ sobre $B_{\eta^*}(\vec{x}^*)$, y para todo $\vec{x} = (x_1, x_2) \in B_{\eta^*}(\vec{x}^*)$ el valor de las derivadas parciales $D_1 h^{(\vec{x}^*)}$ y $D_2 h^{(\vec{x}^*)}$ se obtiene fácilmente diferenciando totalmente el primer miembro de la ecuación $F(r, x_1, x_2) = x_2(r) - \lambda(x_1(r), x_1, x_2) = 0$, con lo que resulta:

$$x_2'(r)\, dr - \varrho(x_1(r), \lambda(x_1(r), x_1, x_2))\, x_1'(r)\, dr -$$
$$- (D_2 \lambda)(x_1(r), x_1, x_2)\, dx_1 - (D_3 \lambda)(x_1(r), x_1, x_2)\, dx_2 = 0$$

es decir, teniendo en cuenta las expresiones de $D_2 \lambda$ y $D_3 \lambda$ (n.º 6 de esta INTRODUCCIÓN):

$$[x_2'(r) - \varrho(x_1(r), \lambda(x_1(r), x_1, x_2)) x_1'(r)] \cdot dr + \\ + \varrho(x_1, x_2) \cdot e^{\int_{x_1}^{x_1(r)} (D_2 \varrho)[t, \lambda(t, x_1, x_2)]\, dt} \cdot dx_1 - \\ - e^{\int_{x_1}^{x_1(r)} (D_2 \varrho)[t, \lambda(t, x_1, x_2)]\, dt} \cdot dx_2 = 0$$

obteniéndose finalmente:

$$\left.\begin{aligned} (D_1 h^{(\vec{x}^*)})(x_1, x_2) &= \frac{\varrho(x_1, x_2) \cdot \exp\left\{\int_{x_1}^{x_1(r)} (D_2 \varrho)[t, \lambda(|, x_1, x_2)]\, dt\right\}}{\varrho[x_1(r), x_2(r)]\, x_1'(r) - x_2'(r)} \\ (D_2 h^{(\vec{x}^*)})(x_1, x_2) &= -\frac{\exp\left\{\int_{x_1}^{x_1(r)} (D_2 \varrho)[t, \lambda(|, x_1, x_2)]\, dt\right\}}{\varrho[x_1(r), x_2(r)] \cdot x_1'(r) - x_2'(r)} \end{aligned}\right\} \quad (9^{\mathrm{IV}})$$

[r denota el valor $h^{(\vec{x}^*)}(x_1, x_2)$]

Demostremos ahora, que si $(\vec{x}^*, \vec{x}^{**}) \in \mathcal{E}_c^a \times \mathcal{E}_c^a$, se verifica que:

$$\text{«}(\forall_{(x_1, x_2)})\ ((x_1, x_2) \in B_{\eta^*}(\vec{x}^*) \cap B_{\eta^{**}}(\vec{x}^{**}) \Rightarrow \\ \Rightarrow h^{(\vec{x}^*)}(x_1, x_2) = h^{(\vec{x}^{**})}(x_1, x_2))\text{»} \qquad (9^{\mathrm{V}})$$

ya que en caso contrario, se tendría:

$$\text{«}(\exists_{(x_1, x_2)})\ ((x_1, x_2) \in B_{\eta^*}(\vec{x}^*) \cap B_{\eta^{**}}(\vec{x}^{**}) \text{ y} \\ \text{y } h^{(\vec{x}^*)}(x_1, x_2) = r^* \neq r^{**} = h^{(\vec{x}^{**})}(x_1, x_2))\text{»}$$

es decir, teniendo en cuenta (9''):

$$\text{«}(\exists_{(x_1, x_2)})\ ((x_1, x_2) \in B_{\eta^*}(\vec{x}^*) \cap B_{\eta^{**}}(\vec{x}^{**}) \text{ y} \\ \text{y } x_2(r^*) - \lambda(x_1(r^*), x_1, x_2) = 0 \text{ y } x_2(r^{**}) - \lambda(x_1(r^{**}), x_1, x_2) = 0)\text{»} \quad (9^{\mathrm{VI}})$$

Ahora bien, según acaba de establecerse en (9'''), se tiene:

$$\text{«}r^* = h^{(\vec{x}^*)}(x_1, x_2) \text{ y } r^{**} = h^{(\vec{x}^{**})}(x_1, x_2) \Rightarrow (x_1(r^*), x_1, x_2) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \text{ y} \\ \text{y } (x_1(r^{**}), x_1, x_2) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)}\text{»}$$

y consecuentemente:

$$«(x_1(r^*),\ x_1(r^{**})) \in\ ]x_1^{izq}(\vec{x}),\ x_1^{der}(\vec{x})[\ \times\ ]x_1^{izq}(\vec{x}),\ x_1^{der}(\vec{x})[»$$

lo que entraña:

$$«[\text{mín}\ \{x_1(r^*),\ x_1(r^{**})\},\ \text{máx}\ \{x_1(r^*),\ x_1(r^{**})\}] \subset\ ]x_1^{izq}(\vec{x}),\ x_1^{der}(\vec{x})[»$$

por lo que en virtud de la continuidad y monotonía estricta de la función $r \in [r^A,\ r^B] \longrightarrow x_1(r) \in \mathbf{R}$. se verifica que:

$$«(\forall\ r)\ (r \in [\text{mín}\ \{r^*,\ r^{**}\},\ \text{máx}\ \{r^*,\ r^{**}\}] \Rightarrow x_1(r) \in\ ]x_1^{izq}(\vec{x}),\ x_1^{der}(\vec{x})[)»$$

estando, por tanto, definida la aplicación compuesta:

$$«r \in [\text{mín}\ \{r^*,\ r^{**}\},\ \text{máx}\ \{r^*,\ r^{**}\}] \longrightarrow \lambda\,(x_1(r),\ x_1,\ x_2) \in \mathbf{R}»$$

y en consecuencia la relación:

$$«r \in [\text{mín}\ \{r^*,\ r^{**}\},\ \text{máx}\ \{r^*,\ r^{**}\}] \longrightarrow x_2(r) - \lambda\,(x_1(r),\ x_1,\ x_2) \in \mathbf{R}»$$

define una aplicación la cual es continuamente derivable sobre el intervalo $[\text{mín}\ \{r^*, r^{**}\},\ \text{máx}\ \{r^*, r^{**}\}]$, y puesto que por ($9^{\text{VI}}$) toma valores iguales en los extremos de su intervalo de definición, existe, por consiguiente, un $\bar{r} \in\ ]\ \text{mín}\ \{r^*,\ r^{**}\},\ \text{máx}\ \{r^*,\ r^{**}\}[\ \subset\ ]r^A,\ r^B[$, tal que:

$$«x_2'(\bar{r}) - \varrho\,(x_1(\bar{r}),\ \lambda\,(x_1(\bar{r}),\ x_1,\ x_2)) \cdot x_1'(\bar{r}) = 0»$$

lo que contradice c).

Debe pues verificarse (9^{V}), y dada la arbitrariedad de $(\vec{x}^*,\ \vec{x}^{**}) \in \mathcal{E}_c^a \times \mathcal{E}_c^a$, se puede poner:

$$«(\forall_{(\vec{x}^*,\ \vec{x}^{**})})\ ((\vec{x}^*,\ \vec{x}^{**}) \in \mathcal{E}_c^a \times \mathcal{E}_c^a \Rightarrow h^{(\vec{x}^*)}_{|B_{\eta^*}(\vec{x}^*) \cap B_{\eta^{**}}(\vec{x}^{**})} = h^{(\vec{x}^{**})}_{|B_{\eta^*}(\vec{x}^*) \cap B_{\eta^{**}}(\vec{x}^{**})})»$$

lo que entraña que exista una única aplicación $h_c^a : \mathcal{E}_c^a = \bigcup_{\vec{x}^* \subset \mathcal{E}_c^a} B_{\eta^*}(\vec{x}^*) \to \mathbf{R}$, que para todo $\vec{x}^* \in \mathcal{E}_c^a$ prolonga $h^{(\vec{x}^*)}$ a $\mathcal{E}_c^a$.

Puesto que para todo $\vec{x}^* \in \mathcal{E}_c^a$, es $h_c^a{}_{|B_{\eta^*}(\vec{x}^*)} = h^{(\vec{x}^*)}$ y $h^{(\vec{x}^*)}$ es continuamente diferenciable sobre el disco abierto $B_{\eta^*}(\vec{x}^*) \subset \mathcal{E}_c^a$, la función h_c^a, así construida es asimismo continuamente diferenciasobre $\mathcal{E}_c^a$, siendo (habida cuenta (9^{IV}), las expresiones de las derivadas parciales de h_c^a en todo punto $(x_1,\ x_2) \in \mathcal{E}_c^a$, las siguientes:

$$\left.\begin{aligned} (D_1 h_c^a)(x_1,\ x_2) &= \frac{\varrho(x_1,\ x_2)\cdot\exp\left\{\int_{x_1}^{x_1(r)} (D_2\varrho)\,[t,\ \lambda(t,\ x_1,\ x_2)]\,dt\right\}}{\varrho\,[x_1(r),\ x_2(r)]\cdot x_1'(r) - x_2'(r)} \\ (D_1 h_c^a)(x_1,\ x_2) &= -\ \frac{\exp\left\{\int_{x_1}^{x_1(r)} (D_2\varrho)\,[t,\ \lambda(t,\ x_1,\ x_2)]\,dt\right\}}{\varrho\,[x_1(r),\ x_2(r)]\cdot x_1'(r) - x_2'(r)} \\ &[r = h_c^a(x_1,\ x_2)] \end{aligned}\right\} \quad (9^{\mathrm{VII}})$$

de las que se deduce:

$$«(\forall_{(x_1,\,x_2)})\ ((x_1,\ x_2) \in \mathcal{E}_c^a \Rightarrow (D_1 h_c^a)(x_1,\ x_2) + \\ + \varrho(x_1,\ x_2)\cdot(D_2 h_c^a)(x_1,\ x_2) = 0)»$$

relación que pone de manifiesto que h_c^a es una integral primera de la ecuación diferencial ordinaria $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1,\ x_2)$, y consecuentemente $\{h_c^a(x_1,\ x_2) = r\}_{r \in\,]r_A,\, r_B[}$ define implícitamente el haz de soluciones de la ecuación diferencial $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1,\ x_2)$ que pasan por los puntos de $C - \{A,\ B\}$.

Señalemos, además, que en virtud de la definición de h_c^a y teniendo en cuenta $(9''')$, se verifica que: $(\forall_{(x_1,\,x_2)})\ ((x_1,\ x_2) \in \mathcal{E}_c^a \Rightarrow$ $\Rightarrow (x_1(h_c^a(x_1,\ x_2)),\ x_1,\ x_2) \in \mathfrak{A}_{(G;\,\varrho)}$ y $x_2(h_c^a(x_1,\ x_2)) = \lambda(x_1(h_c^a(x_1,\ x_2)),$ $x_1,\ x_2))$ relación que (habida cuenta la OBSERVACIÓN 1.ª del n.º 5) es equivalente a la:

$$«(\forall_{(x_1,\,x_2)})\ ((x_1,\ x_2) \in \mathcal{E}_c^a \Rightarrow (x_1,\ x_1(h_c^a(x_1,\ x_2)),\ x_2(h_c^a(x_1,\ x_2))) \in \mathfrak{A}_{(G;\,\varrho)} \text{ y} \\ \text{y } x_2 = \lambda(x_1,\ x_1(h_c^a(x_1,\ x_2)),\ x_2(h_c^a(x_1,\ x_2))))» \qquad (9^{\mathrm{VII*}})$$

(Continuará en el próximo fascículo)