«DUALIDAD DE KÖTHE Y FUNCIONES ANALITICAS» (*)

por

JUAN-LUIS CERDÁ MARTÍN

INDICE

(*) Este trabajo ha sido realizado con una ayuda de la Junta para el Fomento de la Investigación en la Universidad.

INTRODUCCION

Denominaremos espacio de sucesiones a todo subespacio vectorial de ω, espacio vectorial de todas las sucesiones complejas, y si E es uno de estos espacios, su α-dual E^α estará constituido por todas las sucesiones $u = (u_i)$ tales que, cualquiera que sea $x = (x_i)$ de E, cumplan que

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_i x_i$$

es absolutamente convergente.

El estudio de estos espacios, generalizado más tarde por Dieudonné [4] y Cooper [3] a espacios de funciones, fue iniciado por KÖTHE y TOEPLITZ [10]. En trabajos posteriores, KÖTHE prosiguió el estudio detallado de las topologías localmente convexas que aparecen con la α-dualidad, utilizándolas especialmente en contraejemplos (véase [7], [8] y el apartado 30 de [9]), y con esta misma finalidad de hallar contraejemplos a cuestiones abiertas en la teoría general de los espacios vectoriales topológicos han sido utilizadas por *T.* e *Y.* Komura [6].

Pero posiblemente las aplicaciones más interesantes de estos espacios se hallen en el campo de la teoría de funciones con trabajos como los de Zeller [12] y [13] y Toeplitz [11]. Nosotros utilizaremos el método seguido por este último autor para el estudio de los espacios de funciones analíticas en un disco, identificándolos con los espacios de las correspondientes sucesiones de coeficientes de los desarrollos de TAYLOR.

En el *capítulo I* exponemos una serie de resultados sencillos sobre la teoría general de la α-dualidad y estudiamos algunos ejemplos, deteniéndonos especialmente en los espacios de sucesiones asociados a los de funciones analíticas en un disco de centro 0. Son los que denominamos espacios h, $h(r)$ en el caso de un disco abierto de radio r y $h[r]$ en el de un disco cerrado del mismo radio, y de los que damos algunas caracterizaciones. Finalizamos el capítulo dando una demostración de que $h(r)$ y $h[1/r]$ son α-duales el uno del otro, de manera que todo espacio h coincide con su α-bidual, hecho que expresamos diciendo que todo espacio h es espacio de KÖTHE. Este último resultado ya era conocido por TOEPLITZ.

El *capítulo II* es de índole topológica y está dedicado al estudio de la topología de KÖTHE de espacio vectorial localmente convexo sobre los espacios h, definida por la familia de seminormas

$$p_u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} |u_i x_i|$$

siendo u un elemento arbitrario del α-dual de h. En los teoremas centrales de este capítulo se demuestra que esta topología coincide con la usual de los espacios de funciones analíticas, lo que nos proporciona un instrumento para estudiar esta topología.

El *capítulo III* lo dedicamos a aplicar los resultados y métodos anteriores a unas observaciones de tipo topológico referentes al problema de Borel sobre la abundancia de funciones no prolongables analíticamente entre las funciones suma de series de potencias de radio de covergencia igual a uno (véase [5] ó [1], por ejemplo). PÓLYA y HAUSDORFF demostraron que dotando de una topología adecuada al conjunto de clases de estas funciones que resultan de identificar las que tienen las mismas singularidades — considerando equivalentes aquellas cuya diferencia es prolongable a un disco concéntrico de radio mayor — en él las clases de funciones no prolongables constituye un subconjunto denso, abierto y de complementario sin puntos aislados. Nosotros comprobamos que la situación es distinta si se consideran verdaderas funciones y la topología usual, definimos la topología de PÓLYA-HAUSDORFF mediante la restricción al conjunto indicado de una topología localmente convexa separada obtenida por paso al cociente de una topología localmente convexa no separada sobre $h(r)$ y la comparamos mediante la aplicación canónica con la usual, utilizando su coincidencia con la topología normal o de KÖTHE.

La nomenclatura utilizada es, en líneas generales, la de [9] y [2]. Así, supuestos E y F espacios vectoriales complejos — que casi siempre serán espacios de sucesiones — decir que $< F, E >$ es sistema dual significará que se dispone de una forma bilineal $(u, x) \to < u, x >$ definida sobre $F \times E$ tal que:

$$< u, x > = 0 \text{ para todo } x \varepsilon E \text{ implica } u = o$$

$$< u, x > = 0 \text{ para todo } u \varepsilon F \text{ implica } x = o,$$

y serán $\sigma(E, F)$ la topología débil sobre E, $\tau(E, F)$ la de MACKEY, $\beta_*(E, F)$ la semifuerte o de la convergencia uniforme sobre las partes fuertemente acotadas de F y $\beta(E, F)$ la fuerte o de la convergencia uniforme sobre las partes débilmente acotadas de F.

Para mayor comodidad de lectura incluimos demostración de algún resultado conocido que necesitamos y no se puede encontrar en [9], [2] ni [1].

CAPITULO I. — LA α-DUALIDAD.

1. — *Definiciones y propiedades elementales.*

Sea ω el espacio vectorial sobre el cuerpo C de los números complejos de todas las sucesiones complejas, con las leyes de composición $x + y = (x_i + y_i)$, $sx = (sx_i)$ para $s \varepsilon C$ y $x = (x_i)$, $y = (y_i)$ pertenecientes a ω.

Llamaremos *espacio de sucesiones* a todo subespacio vectorial de ω. Un ejemplo es φ, constituido por las sucesiones casi nulas (con un número finito de términos no nulos).

El *α-dual* de un espacio de sucesiones E es

$$E^\alpha = \{ u \varepsilon \omega \colon \sum_{i=0}^{\infty} | u_i x_i | < \infty \text{ para todo } x \varepsilon E \}$$

que también es espacio de sucesiones.

Diremos que $< F, E >$ es *sistema dual* para indicar siempre que tanto F como E son espacios de sucesiones y que la forma bilineal

$$(u, x) \longrightarrow ux = \sum_{i=0}^{\infty} u_i x_i$$

está bién definida sobre $F \times E$ y cumple las dos condiciones

(D.1) $ux = 0$ para todo $x \varepsilon E$ implica $u = o$.

(D.2) $ux = 0$ para todo $u \varepsilon F$ implica $x = o$.

En general $< E^\alpha, E >$ no tiene por qué ser sistema dual, aunque para ello es suficiente que E contenga al espacio φ ya que en este caso será $e_i = (\delta_{ij}) \varepsilon E$ ($\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ y $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, para $i, j = 0, 1, 2, \ldots$) y el ser $ue_i = 0$ cualquiera que sea el índice i implica $u = 0$, con lo que se cumple la condición (D.1). De manera análoga se comprueba que se verifica también (D.2), puesto que $E^\times$ contiene siempre a φ, cualquiera que sea E.

El ser φ subespacio de E no es condición necesaria para que $< E^\times, E >$ sea sistema dual (*). En efecto, si e es la sucesión constante $(1, 1, 1, 1,...)$ y E el espacio de sucesiones engendrado por $e, e_1, e_2, \dots, e_i, \dots$ $(i > 0)$, que no contendrá a φ por no contener a e_o, $< E^\times, E >$ es sistema dual pues si $ux = 0$ para todo $x \varepsilon E$, serán $u_i = ue_i = 0$ $(i > 0)$ y además

$$0 = ue = \sum_{i=0}^{\infty} u_i = u_o$$

de manera que $u = o$.

Se llama *envoltura normal* de un conjunto de sucesiones A al conjunto.

$$N(A) = \{ x \varepsilon \omega \colon |x_i| \leq |a_i| \text{ para algún } a \varepsilon A \}$$

y se dice que A es *normal* o *sólido* si $A = N(A)$.

Si el espacio de sucesiones E es normal, la condición $\varphi \subset E$ es necesaria y suficiente para que $< E^\times, E >$ sea sistema dual, pues para que «$ux = 0$ para todo $x \varepsilon E$» implique «$u = o$» es necesario que para cada índice i exista algún $x \varepsilon E$ con $x_i \neq 0$, o sea $e_i \varepsilon E$ por ser E normal.

Es inmediato que, cualquiera que sea E, se cumple la inclusión $E \subset E^{\times\times}$. Si $E = E^{\times\times}$ se dice que E es *espacio de Köthe o perfecto*. Puesto que el α-dual de un espacio de sucesiones evidentemente es normal y contiene a φ, estas propiedades las cumplirá todo espacio de Köthe.

Veamos algunos ejemplos de espacios de sucesiones.

2. — *Los espacios* l^p $(0 < p \leq \infty)$.

Como es habitual denominaremos l^p $(0 < p < \infty)$ al conjunto de sucesiones $x = (x_i)$ tales que

$$\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p < \infty$$

y l^∞ al de sucesiones acotadas.

(*) Frente a lo que se afirma en [9], pág. 407.

Con las leyes de composición inducidas por ω tanto l^p $(l \leq p < \infty)$ con la norma

$$\| x \| = (\sum_{i=0}^{\infty} | x_i |^p)^{1/p}$$

como l^∞ con

$$\| x \| = \sup_i | x_i |$$

son espacios de Banach, y es sabido ([9] pág. 406) que sus α-duales son

$$(l^1)^x = l^\infty, \ (l^\infty)^x = l^1, \ (l^p)^x = l^q \text{ con } 1/p + 1/q = 1 \text{ si } 1 < p < \infty.$$

Por lo tanto todos ellos son espacios de Köthe.

En cambio los espacios c de sucesiones convergentes y c_o de sucesiones de límite cero, aunque contienen ambos a φ y además c_o es normal, no son de Köthe pues de las inclusiones $c_o \subset c \subset l^\infty$ resultan $l^1 \subset c^x \subset c_o^x$ y las igualdades $l^1 = c^x = c_o^x$ resultan de $c_o^x \subset l^1$. (En efecto, si $x \notin l^1$, o sea si

$$\sum_{i=0}^{\infty} | x_i | = \infty$$

necesariamente $x \notin c_o^x$ pues se puede hallar una sucesión (ε_i) de términos positivos y límite cero tal que

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i | x_i | = \infty$$

sin más que considerar sumas del tipo $| x_{n_i+1} | + \ldots + | x_{n_{i+1}} | = M_i \geq 1$ y tomar $\varepsilon_j = 1/i$ si $n_i + 1 \leq j \leq n_{i+1}$ con lo que $(\varepsilon_i) \longrightarrow 0$ y además

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i | x_i | = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{M_i}{i} \geq \sum_{i=1}^{\infty} 1/i = \infty).$$

Los espacios l^p $(0 < p < 1)$ son también ejemplos de espacios normales que contienen a φ y no son de Köthe:

Proposicion I-1. — l^p $(0 < p < 1)$ es espacio de sucesiones sobre el que

$$\| x \| = (\sum_{i=0}^{\infty} | x_i |^p)^{1/p}$$

es una quasi-norma. l^p es normal, contiene a φ y $(l^p)^x = l^\infty$.

DEMOSTRACIÓN

Se cumplen las propiedades características de las quasi-normas:

(a) $\| x \| = 0$ implica $x = o$.

(b) $\| sx \| = | s | \| x \|$

(c) $\| x + y \| \leq K (\| x \| + \| y \|)$ para cierto $K > 0$

(que en nuestro caso será $K = 2^{(1-p)/p}$).

La comprobación de (a) y de (b) es inmediata. Demostremos (c). (En virtud de (b) y (c) resulta que l^p es espacio vectorial).

Sea $r = 1/p > 1$. Para $0 \leq t$ la función

$$g(t) = \frac{1 + t^r}{(1 + t)^r}$$

tiene un solo mínimo relativo en $t = 1$, que también es mínimo absoluto y

$$g(1) = 2^{1-r}$$

por lo que para $t \geq 0$

$$2^{1-r} (1 + t)^r \leq 1 + t^r$$

Si $t = \dfrac{\| y \|^p}{\| x \|^p}$ (se puede suponer $\| x \| \neq 0$) de la anterior desigualdad resulta

$$\frac{1}{\| x \|^{pr}} 2^{1-r} (\| x \|^p + \| y \|^p)^r = 2^{1-r} (1 + \frac{\| y \|^p}{\| x \|^p}) \leq 1 + (\frac{\| y \|^p}{\| x \|^p})^r$$

y teniendo en cuenta que $r = 1/p$ resulta (c).

Como que $l^p \subset l^1$, $l^\infty = (l^1)^x \subset (l^p)^x$. Demostremos la inclusión inversa.

Si $x \notin l^\infty$ se pueden seleccionar

$$| x_{i_1} | \geq 1, | x_{i_2} | \geq 2^{1/p}, \dots , | x_{i_k} | \geq k^{1/p}, \dots$$

de manera que si tomamos

$$u_i = 0 \text{ si } i \notin \{ i_k \} \text{ y } u_{i_k} = \frac{1}{k^{(p+1)/p}} \; k = 1,2, \dots$$

resulta

$$\sum_{i=0}^{\infty} | u_i |^p = \sum_{k=1}^{\infty} | u_{i_k} |^p = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{p+1}} < \infty$$

es decir, $u \varepsilon l^p$, mientras que

$$\sum_{i=0}^{\infty} | u_i x_i | \geq \sum_{k=1}^{\infty} 1/k = \infty, \text{ o sea } x \notin (l^p)^x. \qquad \text{c.q.d.}$$

Si L^p $(0 < p < 1)$ es el espacio de las funciones medibles f sobre $[a, b]$ tales que

$$\int_a^b | f(t) |^p \, dt < \infty$$

es sabido ([9] pág. 158) que

$$|| f || = (\int_a^b | f(t) |^p \, dt)^{1/p}$$

es quasi-norma respecto de la que el dual topológico de L^p es trivial, o sea se reduce a $\{o\}$.

La situación es completamente distinta en el caso de los espacios l^p.

Proposición I-2. — El dual topológico del espacio quasi-normado l^p $(0 < p < 1)$ es l^∞. (Cada forma lineal continua u se identifica con la sucesión (u_i) tal que $u_i = u(e_i)$).

Demostración

La identificación $u = (u(e_i))$ es correcta puesto que si u' es otra forma lineal continua sobre l^p tal que $u(e_i) = u'(e_i)$, u y u' coinciden sobre φ que es denso en l^p. Además, designando $x^{(n)} = (x_o, x_1, \ldots, x_n, o, o, \ldots)$ resulta

$$u(x) = u(\lim x^{(n)}) = \lim u(x^{(n)}) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i x_i.$$

Si $u \varepsilon (l^p)'$, dual topológico de l^p, se cumple que

$$| u_i | = | u(e_i) | \leq | u |, \text{ para } | u | = \sup_{||x|| \leq 1} | u(x) |$$

lo que demuestra que $(l^p)' \subset l^\infty$.

Para comprobar la inclusión inversa, al ser $l^\infty = (l^1)'$ y $l^p \subset l^1$, demostremos que si u es la restricción a l^p de una forma lineal continua sobre l^1, u es continua sobre l^p. En efecto, sea $a \varepsilon l^p$ y designemos

$$\| a \|_1 = \sum_{i=0}^{\infty} | a_i |.$$

Si $\| a \| \leq 1$ se cumple que $\| a \|_1 \leq \| a \|^p$ porque para cada $i \varepsilon N$ es $| a_i) \leq | a_i |^p$. Por esto, si $\| a^n \| \longrightarrow 0$ se cumple que $\| a^n \|^p \longrightarrow 0$ y $\| a^n \| \leq 1$ asintóticamente, por lo que también se cumplirá $\| a^n \|_1 \longrightarrow$ $\longrightarrow 0$ y $u(a^n) \longrightarrow 0$. Al ser continua en el origen, $u \varepsilon (l^p)'$. c.q.d.

3. — *Los espacios h.*

Designaremos de esta manera a los espacios de sucesiones $h(r)$ $(0 < r \leq \infty)$ y $h[r]$ $(0 \leq r < \infty)$ que definimos a continuación.

Si D_r es el disco abierto de radio r y centro 0 del plano complejo y $\overline{D}_r$ su adherencia, $H(D_r)$ será el espacio vectorial de las funciones analíticas en D_r y $H(\overline{D}_r)$ el de gérmenes de funciones analíticas en $\overline{D}_r$ (sus elementos son las clases de funciones analíticas en abiertos que contienen a $\overline{D}_r$ que resultan de considerar equivalentes a dos funciones si coinciden en algún entorno de $\overline{D}_r$). $H(C) = H(D_\infty)$ será el espacio vectorial de las funciones enteras y $H(0) = H(\overline{D}_o)$ el de gérmenes de funciones analíticas en 0. Todos ellos pueden considerarse como subespacios vectoriales de $H(0)$ mediante las inclusiones naturales.

Si $h[0]$ es el espacio de sucesiones $u = (u_i)$ tales que la serie de potencias

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_i z^i$$

es de radio de convergencia positivo, es isomorfismo de espacios vectoriales la aplicación

$$\begin{aligned} \phi : H(0) &\longrightarrow h[0] \\ u(z) &\longrightarrow u = (u_i) \end{aligned}$$

que a cada elemento $u(z)$ de $H(0)$ — la notación $u(z)$ servirá para representar indistintamente a un elemento de $H(0)$ y a un representante arbitrio del mismo — asigna la sucesión $u = (u_i)$ de los coeficientes de su desarrollo de Taylor en el origen.

Designaremos

$$h(r) = \phi H(D_r) \text{ para } 0 < r \leq \infty$$

$$h[r] = \phi H(\overline{D}_r) \text{ para } 0 \leq r < \infty$$

de manera que $h(\infty) = \phi H(C)$ y $h[0] = \phi H(0)$.

Obsérvese que si $C[z]$ es el conjunto de funciones polinómicas complejas de una variable, $\varphi = \phi C[z]$ de manera que todo espacio h contiene a φ.

PROPOSICIÓN I-3. — Si $0 < r < \infty$, se cumple

$$h(r) = \{a\varepsilon\omega: \sum_{n=0}^{\infty} K^n |a_n| < \infty \text{ para todo } K\varepsilon(0,r)\}$$

DEMOSTRACIÓN

Es $a\varepsilon h(r)$ si y solo si el radio de convergencia de

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

es mayor o igual que r, es decir, si y solo si cualquiera que sea $K\varepsilon(0,r)$ se cumple

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| K^n < \infty. \qquad \text{c.q.d.}$$

PROPOSICIÓN I-4. — Si $0 < r < \infty$, se cumple

$$h[r] = \{u\varepsilon\omega: |u_n| \leq K^n \text{ asintóticamente para algún } K < 1/r\}$$

DEMOSTRACIÓN

El ser $u\varepsilon h[r]$ significa que para algún $K < 1/r$ se cumple que

$$\limsup_n \sqrt[n]{|u_n|} \leq K < 1/r$$

o sea, existe algún $n_o\varepsilon N$ tal que $n \geq n_o$ implica $|u_n| \leq K^n$ c.q.d.

PROPOSICIÓN I-5. — $h(\infty) = \{a\varepsilon\omega: \lim_n \sqrt[n]{K^n |a_n|} = 0 \text{ para todo } K > 0\}$

DEMOSTRACIÓN

Trivialmente la condición indicada equivale a que

$$\lim_n \sup \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \qquad \text{c.q.d.}$$

PROPOSICIÓN I-6. — $h[0] = \{u \varepsilon \omega : |u_n| \leq K^n \text{ para algún } K > 0\} = N(\{(K^n) : K > 0\})$.

DEMOSTRACIÓN

$$\lim_n \sup \sqrt[n]{|u_n|} < \infty$$

significa que para algún $K > 0$ se cumple

$$\sqrt[n]{|u_n|} \leq K$$

para todo índice n. c.q.d.

TEOREMA I-1. — a) Si $0 < r < \infty$, $h[r]^x = h(1/r)$.
b) $h[0]^x = h(\infty)$.

DEMOSTRACIÓN

a) En virtud de la proposición I-3 es suficiente comprobar que $a \varepsilon h[r]^x$ si y solo si

$$\sum_{n=0}^{\infty} K^n |a_n| < \infty \tag{1}$$

siempre que $0 < K < 1/r$.

Si $a \varepsilon h[r]^x$, cualquiera que sea $u \varepsilon h[r]$ se cumplirá

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n a_n| < \infty$$

y como que siempre que $0 < K < 1/r$ se cumple $(K^n) \varepsilon h[r]$, se verifica (1).

Recíprocamente, si siempre que $0 < K < 1/r$ se cumple (1), en virtud de la proposición I-4 se tendrá

$$\sum_{n=0}^{\infty} | u_n | \, | a_n | < \infty$$

para todo $u \varepsilon h[r]$, es decir, $a \varepsilon h[r]^x$.

b) Si $a \varepsilon h[0]^x$, de la proposición I-6 resulta que para todo K positivo

$$\sum_{n=0}^{\infty} K^n | a_n | < \infty$$

y por lo tanto $a \varepsilon h(\infty)$, por ser

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

entera.

Recíprocamente, si $a \varepsilon h(\infty)$ y si $K > 0$ se cumple

$$\sum_{n=0}^{\infty} | a_n | K^n < \infty$$

y por lo tanto, en virtud de la proposición I-6, cualquiera que sea $u \varepsilon h[0]$ cumple

$$\sum_{n=0}^{\infty} | a_n | \, | u_n | < \infty$$

es decir, $a \varepsilon h[0]^x$. c.q.d.

TEOREMA I-2. — a) Si $0 < r < \infty$, $h(r)^x = h[1/r]$.
b) $h(\infty)^x = h[0]$.

DEMOSTRACIÓN

a) $h[1/r] \subset h[1/r]^{xx} = h(r)^x$, en virtud del teorema anterior.

Si $u \varepsilon h(r)^x$, o sea (proposición I-3), si

$$\sum_{n=0}^{\infty} | u_n a_n | < \infty \text{ siempre que } \sum_{n=0}^{\infty} K^n | a_n | < \infty \text{ para todo } K \varepsilon (0, r)$$

comprobemos que para algún $K \varepsilon (0,r)$ es $| u_n | \leq K^n$ asintóticamente, con lo que (proposición I-4) $u \varepsilon h[1/r]$.

De no ser así, dada (K_i) sucesión creciente de términos positivos y límite r, para cada K_i existirían infinitos términos u_n para los que $K_i^n < |u_n|$ y se podría seleccionar una subsucesión (u_{n_i}) de $u = (u_n)$ tal que

$$K_i^{n_i} < |u_{n_i}| \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

de manera que

$$\sum_{i=0}^{\infty} K_i^{n_i} |a_{n_i}| < \sum_{i=0}^{\infty} |u_{n_i}| |a_{n_i}| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n a_n| < \infty$$

para todo $a \varepsilon h(r)$. En particular, si

$$a_n = 0 \text{ para } n \notin \{n_i\}$$
$$a_{n_i} = K_i^{-n_i}$$

$a \varepsilon h(r)$, pues

$$\lim_n \sup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_i 1/K_i = 1/r,$$

es decir

$$\sum_{i=0}^{\infty} K_i^{n_i} |a_{n_i}| < \infty$$

y por otra parte

$$\sum_{i=0}^{\infty} K_i^{n_i} |a_{n_i}| = \sum_{i=0}^{\infty} K_i^{n_i} K_i^{-n_i} = \infty,$$

contradicción.

b) $h[0] \subset h[0]^{xx} = h(\infty)^x$.

Si $u \notin h[0]$, para cada número natural i se cumple

$$i^n < |u_n|$$

para infinitos términos u_n y se puede seleccionar (u_{n_i}), subsucesión de u, tal que

$$i^{n_i} < |u_{n_i}|$$

y el razonamiento se puede proseguir de manera análoga al caso a), tomando $a \varepsilon h(\infty)$ tal que $a_{n_i} = i^{-n_i}$ con lo que resulta $u \notin h(\infty)^x$. c.q.d.

COROLARIO. — Los espacios h son espacios de KÖTHE.

4. — *Sobre la condición lagunar de Fabry.*

Sea f el conjunto de sucesiones complejas que satisfacen la condición lagunar de Fabry. Es decir, $a = (a_n) \varepsilon f$ si y solo si

$$\lim_i \frac{i}{n_i} = 0 \tag{1}$$

en donde (n_i) es la sucesión de índices de los términos no nulos de a, en el caso $a \notin \varphi$. Se considera $\varphi \subset f$.

Proposición I-7. — $a \varepsilon f$ si y solo si

$$\lim_n \frac{N(n)}{n} = 0, \tag{2}$$

siendo $N(n)$ el número de términos no nulos de a cuyo índice es menor que n.

Demostración

Basta limitarse al caso $a \notin \varphi$. Para comprobar que (2) implica (1) obsérvese que

$$\frac{N(n_i)}{n_i} = \frac{i-1}{n_i}$$

y (2) resulta de (1) debido a que para $n \varepsilon N$ tal que $n_i < n \leq n_{i-1}$ se cumple que $N(n) = i$. c.q.d.

Proposición I-8. — f es espacio de sucesiones normal que contiene a φ y tal que $f^{\times} = \varphi$ (luego f no es de Köthe).

Demostración

Evidentemente, si $a \varepsilon f$ y $s \varepsilon C$, también $sa \varepsilon f$. Si a, a' son elementos de f veamos también $a'' = a + a'$ pertenece a f. Designando $N(n)$, $N'(n)$ y $N''(n)$ al número de términos no nulos de índice inferior a n de a, a' y a'' respectivamente, se cumplirá

$$N''(n) \leq N(n) + N'(n)$$

y, al ser a, $a' \varepsilon f$, en virtud de la proposición anterior

$$\lim_n \frac{N''(n)}{n} = 0$$

con lo que $a'' \varepsilon f$.

Veamos que $f^x \subset \varphi$ (evidentemente $\varphi \subset f^x$). En efecto, si $u = (u_n) \notin \varphi$, se podrá formar una sucesión estrictamente creciente de números naturales (n_i) tal que $u_{n_i} \neq 0$ cualquiera que sea $i \varepsilon N$ y que cumpla (1).

La sucesión $a = (a_n)$ tal que

$$a_n = 0 \quad \text{si} \quad n \notin \{n_i\}$$

$$a_{n_i} = 1/u_{n_i}$$

es un elemento de f tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n a_n| = \sum_{i=1}^{\infty} |u_{n_i} a_{n_i}| = \infty$$

por lo que $u \notin f^x$. c.q.d.

CAPITULO II

LA TOPOLOGIA NORMAL EN LOS ESPACIOS h.

1. — *La topología normal.*

Dado $< E^x, E >$ sistema dual (de espacios de sucesiones), además de las topologías localmente convexas habituales sobre E, interesará considerar la *topología normal* $\eta(E, E^x)$ ([9] pág. 407) que es la topología de espacio vectorial topológico localmente convexo sobre E definida por la familia de seminormas

$$\{p_u\}_{u \varepsilon F}$$

con

$$p_u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} |u_i x_i|$$

y evidentemente es más fina que la topología débil $\sigma(E, E^x)$ puesto que

$$q_u(x) = \left|\sum_{i=0}^{\infty} u_i x_i\right| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |u_i x_i| = p_u(x)$$

y la topología débil está determinada por las seminormas q_u.

PROPOSICIÓN II-1. — Dados $< E^x, E >$ sistema dual y $A \subset E$, A es acotado respecto de la topología normal si y solo si lo es $N(A) \cap E$.

DEMOSTRACIÓN

$$\sum_{i=0}^{\infty} |u_i a_i| \leq M$$

para todo $a \varepsilon A$, implica que

$$\sum_{i=0}^{\infty} |u_i x_i| \leq M$$

para todo $x \varepsilon N(A) \cap E$, puesto que se cumplirá que $|x_i| \leq |a_i|$ para cierto $a \varepsilon A$ y cualquiera que sea $i \varepsilon N$. El recíproco resulta de $A \subset N(A) \cap E$. c.q.d.

Siempre que $< E^x, E >$ sistema dual, llamaremos topología normal η de E a $\eta(E, E^x)$. Se cumple:

TEOREMA II-1. — Si E es espacio de sucesiones que contiene a φ, los equicontinuos de E^x para la topología normal de E son los conjuntos $N(u)$, $u \varepsilon E^x$, y sus partes. Esta topología es compatible con el sistema dual $< E^x, E >$, es decir, además de ser más fina que la débil $\sigma(E, E^x)$, es menos fina que la de MACKEY $\tau(E, E^x)$.

(Véase [9] pág. 409).

2. — *Las topologías de Montel en los espacios h.*

Salvo mención expresa de lo contrario, consideraremos a cada $h(r)$ $(0 < r \leq \infty)$ provisto de la topología inducida por la de $H(D_r)$ de la covergencia uniforme sobre cada compacto de D_r, con la que es espacio de Fréchet y de Montel ([9] pág. 373), a través del isomorfismo de espacios vectoriales

$$\phi : H(D) \longrightarrow h(r)$$

$$a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \longrightarrow a = (a_n)$$

Dados $a \varepsilon h(r)$ y $0 < p < r$, sea

$$M_p(a) = \max_{|z| = p} |a(z)|$$

La familia de conjuntos

$$V(p,\varepsilon) = \{ a \varepsilon h(r) : M_p(a) \leq \varepsilon \} \tag{1}$$

para $\varepsilon > 0$ y $p \varepsilon (0, r)$ arbitrarios, constituye evidentemente una base de entornos de cero para la topología de $h(r)$.

También es de MONTEL ([9] pág. 376) $H(\overline{D}_r)$ con la topología límite inductivo que se define como sigue. Sea

$$U_1 \supset U_2 \supset \ldots \supset U_i \supset \ldots$$

una sucesión decreciente de abiertos conexos cuya intersección es $\overline{D}_r$ y $HB(\overline{U}_i)$ el espacio de Banach de las funciones holomorfas en U_i y continuas en su adherencia, con la norma del supremo. En $H(\overline{D}_r)$ se considera la topología límite inductivo topológico $\varinjlim HB(\overline{U}_i)$ respecto de las aplicaciones de restricción, y es independiente de la sucesión de abiertos (U_i) que se ha elegido.

La topología de $h[r]$ $(0 \leq r < \infty)$ será también, salvo indicación previa, la inducida por $H(\overline{D}_r)$ a través de

$$\phi : H(D_r) \longrightarrow h[r]$$

3. — *La topología normal de* $h(r)$.

Para cada $p \varepsilon (0, r)$ y cada $\varepsilon > 0$ designemos

$$U(p, \varepsilon) = \{ a \varepsilon h(r) : p^k \mid a_k \mid \leq \varepsilon \text{ para todo } k \} \tag{2}$$

PROPOSICIÓN II-2. — La familia de conjuntos (2) es base de entornos de cero para una topología $\mathfrak{T}$ de espacio localmente convexo metrizable menos fina que la usual sobre el espacio vectorial $h(r)$ $(0 < r \leq \leq \infty)$.

DEMOSTRACIÓN

Cada $U(p, \varepsilon)$ es absolutamente convexo y la familia de conjuntos (2) es base de filtro, pues dados $U(p, \varepsilon)$ y $U(p', \varepsilon')$ si $\tilde{p} = \max(p, p')$ y $\tilde{\varepsilon} = \min(\varepsilon, \varepsilon')$ se cumple

$$U(\tilde{p}, \tilde{\varepsilon}) \subset U(p, \varepsilon) \cap U(p', \varepsilon')$$

Además $V(p, \varepsilon)$ está contenido en $U(p, \varepsilon)$ ya que si $M_p(a) \leq \varepsilon$, en virtud de las desigualdades de Cauchy se cumplen, cualesquiera que sean $k \varepsilon N$,

$$| a | \leq \frac{M_p(a)}{p^k} \leq \frac{\varepsilon}{p^k}$$

O sea, $\mathcal{T}$ es topología localmente convexa sobre $h(r)$ menos fina que la usual.

Finalmente, para $p_n = nr/(n+1)$, los conjuntos

$$U_n = U(p_n, 1/n)$$

constituyen una base numerable de entornos de cero para $\mathcal{T}$ y por tanto esta topología es metrizable. c.q.d.

TEOREMA II-2. — Las topologías $\mathcal{T}$, $\beta(h(r), h(r)^x)$ y $\tau(h(r), h(r)^x)$ coinciden con la de $h(r)$.

DEMOSTRACIÓN

La efectuaremos en dos etapas:

A. — El dual topológico de $h(r)$ coincide con su α-dual $h[1/r]$ de manera que la topología de $h(r)$ coincide con $\beta(h(r), h(r)^x)$ y con $\tau(h(r), h(r)^x)$.

En efecto, es sabido ([9] pág. 375) que el dual topológico de $H(D_r)$ es $H(S - D_r)$, espacio de los gérmenes de funciones holomorfas en el complementario en la esfera de Riemann S del disco D_r y que son nulas en el infinito (funciones ultraholomorfas), a través de la dualidad

$$< u(z), x(z) > = \frac{1}{2\pi i} \int_C u(z)\, x(z)\, dz$$

para $x(z) \varepsilon H(D_r)$, $u(z) \varepsilon H(S - D_r)$ y C camino adecuado contenido en $D_r \cap U$, siendo U entorno del complementario de D_r. (Se puede tomar C circunferencia de centro el origen).

Las aplicaciones

$$h(r) \longrightarrow H(D_r)$$

$$x = (x_n) \longrightarrow x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n$$

$$h[1/r] \longrightarrow H(S - D_r)$$

$$u = (u_n) \longrightarrow \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^{-n}$$

constituyen un par de isomorfismos algebraicos que conserva la dualidad, puesto que

$$ux = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x_n$$

y

$$< u(z), x(z) > = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{z^{n+1}} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} x_k z^k \right) dz$$

de manera que si C es la circunferencia definida por

$$z = pe^{i\theta} \quad (0 < p < r)$$

se tiene

$$< u(z), x(z) > = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{p^k e^{ik\theta}}{p^{n+1} e^{i(n+1)\theta}} ie^{i\theta} p d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u_n x_k \int_0^{2\pi} p^{k-n} e^{i(k-n)\theta} d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x_n = ux$$

Así pues, $h(r)' = h[1/r]$ y al ser $h(r)$ tonelado su topología coincide con la fuerte y por lo tanto con la de MACKEY.

B. — La topología $\mathcal{T}$ coincide con las anteriores.

Es suficiente con demostrar que $h(r)^x$ está contenido en el dual topológico de $h(r)$ respecto de $\mathcal{T}$, puesto que si es así:

$$h(r)^x \subset h(r)[\mathcal{T}]' \subset h(r)' = h(r)^x$$

ya que $\mathcal{T}$ es menos fina que la topología de $h(r)$ (proposición II-2).

Al ser $h(r)[\mathcal{T}]' = h(r)^x$, necesariamente $\mathcal{T} = \tau(h(r), h(r)^x)$ debido a que $\mathcal{T}$ es compatible con el sistema dual $< h(r)^x, h(r) >$, o sea $\mathcal{T}$ es menos fina que $\tau(h(r), h(r)^x)$, y por ser metrizable $h(r)[\mathcal{T}]$ es quasi-tonelado ([9] pág. 301) o sea $\mathcal{T} = \beta_*(h(r), h(r)^x)$, que es más fina que la topología de MACKEY.

Sea pues $u \varepsilon h(r)^x = h[1/r]$. En virtud de la proposición I-4, se cumple

$$|u_n| \leq K^n \text{ para } 0 < K < 1/r \text{ y } n_0 \leq n.$$

Designemos

$$M = \max_{0 \leq i \leq n_0} |u_i|$$

de manera que

$$| ux | \leq \sum_{n=0}^{\infty} | u_n | | x_n | \leq M (| x_0 | + \ldots + | x_{n_0} |) + \sum_{n \ n_0+1}^{\infty} K^n | x_n | \quad (3)$$

Dado δ positivo arbitrario, si se toman $K < p < 1/r$ y

$$\varepsilon < \min \left[\frac{\delta}{2M \sum_{i=0}^{n_0} 1/p^i} , \frac{\delta}{2 \sum_{i=0}^{\infty} (K/p)^i} \right]$$

para todo $x \varepsilon U (p, \varepsilon)$ (o sea $p^k | x_k | \leq \varepsilon$) resulta, sustituyendo en (3):

$$| ux | \leq M \varepsilon \sum_{i=0}^{n_0} 1/p^i + \varepsilon \sum_{i=n_0+1}^{\infty} K^i/p^i < \delta/2 + \delta/2 = \delta$$

de donde la continuidad respecto de $\mathcal{T}$ de la forma lineal u, o sea $u \varepsilon h (r) [\mathcal{T}]'$. c.q.d.

Observación. — El caso límite $r = \infty$ admite una demostración análoga, sustituyendo la proposición I-4 citada por la proposición I-6.

Teorema II-3. — La topología normal sobre $h (r)$ coincide con la topología de $h (r)$.

Demostración

Al ser la topología normal de $h (r)$ compatible con el sistema dual $< h (r)^x, h (r) >$ (teorema II-1), basta comprobar que es más fina que $\mathcal{T}$, es decir, que cada $U (p,\varepsilon)$ contiene algún

$$W (u,\tilde{\varepsilon}) = \{ x \varepsilon h (r) : \sum_{i=0}^{\infty} | x_i u_i | \leq \tilde{\varepsilon} \}$$

con $\tilde{\varepsilon} > 0$ y $u \varepsilon h (r)^x$, entorno de cero para la topología normal.

Y en efecto, al ser $0 < p < r$,

$$(p^n) \varepsilon h [1/r] = h (r)^x$$

(teorema I-1) y para $u = (p^n)$ y $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$, cualquiera que sea $x \varepsilon W (u,\tilde{\varepsilon})$ cumple

$$\sum_{n=0}^{\infty} | x_n | p^n \leq \varepsilon$$

y por lo tanto $| x_k | p^k \leq \varepsilon$ para todo $k \varepsilon N$, o sea $x \varepsilon U (p,\varepsilon)$. c.q.d.

OBSERVACIÓN. — Designando

$$W_{p,\varepsilon} = W((p^n), \varepsilon) = \{ x \varepsilon h(r) : \sum_{n=0}^{\infty} p^n \mid x_n \mid \leq \varepsilon \} \tag{4}$$

para $0 < p < r$ y $\varepsilon > 0$, la familia de conjuntos (4) es base de entornos de cero para la topología normal de $h(r)$, porque constituye una base de entornos de cero para cierta topología localmente convexa sobre $h(r)$ que es a la vez más fina que $\mathcal{T}$, pues

$$W_{p,\varepsilon} \subset U(p,\varepsilon),$$

y menos fina, pues cada conjunto de la familia (4) es entorno de cero para la topología normal que, como ya hemos visto, coincide con $\mathcal{T}$.

4. — *La topología normal de* $h[r]$.

Es sabido ([9] pág. 377) que

$$< H(S - \overline{D}_r), H(\overline{D}_r) >$$

en donde los elementos de $H(S - \overline{D}_r)$ son las funciones holomorfas en el complementario de $\overline{D}_r$ y nulas en el infinito, mediante la forma bilineal

$$< x(z), u(z) > = \frac{1}{2 \pi i} \int_C u(z)\, x(z)\, dz$$

constituye un sistema dual para el que la topología de $H(\overline{D}_r)$ es compatible y coincide con la fuerte.

De manera análoga a como se ha procedido en el teorema II-2, este sistema dual se puede identificar con

$$< h(1/r), h[r] >,$$

de manera que la topología de $h[r]$ coincide con la fuerte y con la de MACKEY. Para demostrar que también coincide con la normal, utilizaremos el siguiente lema — debido a TOEPLITZ en [11] pág. 226 — del que damos una demostración para mayor comodidad de lectura.

LEMA. — Un subconjunto X de $h(r)$ es $\sigma(h(r), h(r)^x)$ — acotado si y sólo si cumple las dos condiciones siguientes:

(a) X es acotado por coordenadas.
(b) Para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \varepsilon N$ tal que

$$\sqrt[n]{|x_n|} \leq \frac{1}{r} + \varepsilon$$

para todo $n \geq n_0$ y todo $x \varepsilon X$.

DEMOSTRACIÓN

A. — Si X es acotado, para cada $i \varepsilon N$

$$e_i(X) = \{x_i : x \varepsilon X\}$$

estará acotado, pues $e_i \varepsilon h(r)^x$, o sea, se cumple (a).

Si (b) no se cumple, existe cierto $\varepsilon > 0$ tal que, aunque para cada $x \varepsilon X$ se puede determinar $n_0 = n_0(x)$ de modo que

$$\sqrt[n]{|x_n|} \leq \frac{1}{r} + \varepsilon \text{ para todo } n \geq n_0$$

el conjunto de números naturales

$$n_0 \varepsilon N : n_0 = n_0(x) \; x \varepsilon X$$

no es acotado, o sea, se pueden construir dos sucesiones

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_i < \ldots \qquad x^1, x^2, \ldots, x^i, \ldots$$

de N y de X respectivamente tales que para cada i

$$\frac{1}{r} + \varepsilon < \sqrt[n_i]{|x^i_{n_i}|}, \text{ o sea, } \left(\frac{1}{r} + \varepsilon\right)^{n_i} < |x^i_{n_i}|$$

Sean

$$u_{n_i} = \frac{n_i}{|x^i_{n_i}|} \quad \text{y} \quad u_n = 0 \text{ si } n \notin \{n_i\}$$

con lo que $u = (u_n) \varepsilon h(r)^x = h[1/r]$, pues al ser

$$\sqrt[n_i]{u_{n_i}} \leq \sqrt[n_i]{n_i} \frac{1}{\frac{1}{r} + \varepsilon}$$

resulta

$$\lim_n \sup \sqrt[n]{u_n} < \frac{1}{\frac{1}{r} + \varepsilon} \quad \text{o sea} \quad \lim_n \sup \sqrt[n]{u_n} < r$$

En cambio $\lim_i | u_{n_i} x_{n_i} | = \lim_i n_i = \infty$, de manera que si se designa $y^i = (| x^i_n |) \varepsilon N (X)$, es $\lim_i | u y^i | = \infty$, y al no ser $N (X)$ acotado tampoco lo puede ser X (proposición II-1).

B. — Supongamos que se cumplen (a) y (b) y sea $u \varepsilon h (r)^x$, con lo que existen $\delta < 0$ y $n_1 \varepsilon N$ tales que

$$\sqrt[n]{| u_n |} \leq \frac{1}{\frac{1}{r} + \delta} \quad \text{si } n \geq n_1$$

En virtud de (b), si $x \varepsilon X$

$$| u_n x_n | \leq \left[\frac{1}{\frac{1}{r} + \delta} \left(\frac{1}{r} + \varepsilon\right) \right]^n$$

para todo $n \geq n_2 = \max (n_0, n_1)$. Tomemos $\varepsilon < \delta$, con lo que

$$\sum_{n=n_2}^{\infty} | u_n x_n |$$

es convergente y su suma posee una cota independiente de $x \varepsilon X$. En virtud de (a), la suma finita

$$\sum_{n=0}^{n_2-1} | u_n x_n |$$

tiene también cota independiente de $x \varepsilon X$, por lo que el conjunto

$$\{ | ux | : x \varepsilon X \}$$

está acotado para cada $u \varepsilon h (r)^x$, luego X está débilmente acotado.

c.q.d.

TEOREMA II-4. — Un subconjunto X de $h (r)$ $(0 < r \leq \infty)$ está acotado si y solamente si está contenido en la envoltura normal de cierto $y \varepsilon h (r)$ de coordenadas $y_n \geq 0$.

Demostración

Supuesto a X acotado, de la condición (a) del lema, existirá

$$y_n = \sup_{x \varepsilon X} |x_n|$$

y será finito. En virtud de la condición (b), dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \varepsilon N$ tal que

$$\sqrt[n]{|x_n|} \leq \frac{1}{r} + \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq n_0$$

luego

$$\sqrt[n]{|y_n|} \leq \frac{1}{r} + \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq n_0$$

y por lo tanto

$$\limsup_n \sqrt[n]{|y_n|} \leq \frac{1}{r}$$

o sea, $y = (y_n) \varepsilon h(r)$ y se cumple que $|x_n| \leq y_n$ para todo $x \varepsilon X$ y todo índice $n \varepsilon N$.

El recíproco es evidente, pues si X está contenido en $N(y)$, al ser $N(y)$ acotado también lo es X. c.q.d.

Teorema II-5. — La topología de $h[r]$ coincide con la topología normal.

Demostración

Al ser la topología normal η de $h[r]$ compatible con el sistema dual

$$< h[r]^x, \; h[r] >$$

y coincidir la topología de $h[r]$ con la de Mackey $\tau = \tau(h[r], h[r]^x)$, todo η — equicontinuo de $h[r]^x$ es también τ — equicontinuo. Pero los τ — equicontinuos son los conjuntos absolutamente convexos $\sigma(h(1/r), h(1/r)^x)$ — compactos y sus partes, luego si X es τ — equicontinuo, al ser acotado de $h(1/r)$ también es η — equicontinuo, ya que en virtud del teorema anterior X es subconjunto de cierto $N(y)$ con $y \varepsilon h(1/r)$, y basta aplicar el teorema II-1. c.q.d.

Observación. — Resulta también como consecuencia del teorema II-4 que si $\underline{F}$ es un conjunto de funciones de $H(D_r)$, $\underline{F}$ es acotado (uniformemente sobre cada compacto de D_r) si y solo si existe

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \, \varepsilon H(D_r)$$

con los coeficientes b_n reales no negativos tal que $|a_n| \leq b_n$ cualquiera que sea $n \varepsilon N$ y para toda función

$$a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \, \varepsilon \underline{F}$$

En este caso se puede tomar $b_n = \sup_{a \varepsilon \underline{F}} |a_n|$.

Al coincidir la topología normal de $h(r)$ con la fuerte, ambas tienen los mismos equicontinuos, por lo que cada acotado de $h[1/r]$, en virtud del teorema II-1, está contenido en la envoltura normal $N(u)$ de algún elemento $u \varepsilon h[1/r]$. Por lo tanto en los espacios $H(\overline{D}_r)$ es válida también una observación análoga a la anterior. Así una familia $\underline{F}$ de elementos de $H(\overline{D}_r)$ está acotada si y sólo si existe

$$v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n \, \varepsilon H(U),$$

con U entorno abierto de $\overline{D}_r$ y $v_n \geq 0$, tal que $|u_n| \leq v_n$ para todo $n \varepsilon N$ y cualquiera que sea $u(z) \, \varepsilon H(\overline{D}_r)$, para

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n.$$

En este caso se puede tomar $v_n = \sup_{u \varepsilon \underline{F}} |u_n|$.

CAPITULO III

SOBRE EL PROBLEMA DE LA PROLONGABILIDAD ANALITICA

1. — *Algunas partes densas de $h(r)$.*

Sean $\tilde{h}(r)$ y $\tilde{\tilde{h}}(r)$ los subconjuntos de $h(r)$ tales que $a \varepsilon \tilde{h}(r)$ si y sólo si el radio de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a(z)$$

es igual a $r > 0$, y $a \varepsilon \tilde{\tilde{h}}(r)$ si y sólo si además de ser $a \varepsilon \tilde{h}(r)$ y la circunferencia de centro $0 \varepsilon C$ y radio r es frontera esencial de la función analítica $a(z)$.

Es sabido ([1] pág. 53) que la condición lagunar de Fabry es condición de no prolongabilidad analítica, con lo que, si designamos $f(r) = f \cap \tilde{h}(r)$, conjunto de sucesiones $a = (a_i)$ que cumplen la condición lagunar de Fabry y pertenecen a $\tilde{h}(r)$, resultan las inclusiones

$$f(r) \subset \tilde{\tilde{h}}(r) \subset \tilde{h}(r) \subset h(r).$$

Consideraremos a estos conjuntos provistos de la topología inducida por la de $h(r)$, salvo indicación previa de lo contrario.

Respecto de esta topología se cumplen las propiedades siguientes:

Proposición III-1. — $\tilde{h}(r)$ es denso en $h(r)$.

Demostración

$\tilde{h}(r)$ es el complementario respecto de $h(r)$ del subespacio vectorial $h[r]$ de $h(r)$. El conjunto complementario de un subespacio vectorial propio de un espacio localmente convexo es siempre denso.

c.q.d.

Proposición III-2. — $h[r]$ es denso en $h(r)$.

DEMOSTRACIÓN

El espacio vectorial $h[r]$ contiene a φ que es denso en $h(r)$, puesto que los polinomios constituyen un subespacio denso de $H(D_r)$, al ser

$$a(z) = \lim_k \sum_{n=0}^{k} a_n z^n$$

uniformemente sobre cada compacto de D_r, cualquiera que sea $a(z) \varepsilon H(D_r)$. c.q.d.

Así pues, $h(r)$ es la unión disjunta de los subconjuntos densos $h[r]$ y $\tilde{h}(r)$. Ambos son espacios topológicos metrizables no completos.

PROPOSICIÓN III-3. - $f(r)$ y $\tilde{\tilde{h}}(r)$ son subconjuntos densos de $\tilde{h}(r)$.

DEMOSTRACIÓN

Sea $a \varepsilon f(r)$. Al ser φ denso en $h(r)$, también lo es $a + \varphi$. Si $b \varepsilon \varphi$ evidentemente $a + b$ cumple la condición lagunar de FABRY y el radio de convergencia de

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$$

es igual a r, puesto que b posee tan solo un número finito de términos no nulos. Es decir

$$a + \varphi \subset f(r) \subset \tilde{\tilde{h}}(r) \subset \tilde{h}(r) \subset h(r)$$

y cada uno de estos conjuntos es denso en cada uno de los que le siguen en las inclusiones indicadas. c.q.d.

PROPOSICIÓN III-4. — El conjunto $\tilde{h}(r) - \tilde{\tilde{h}}(r)$ de las sucesiones $a = (a_n) \varepsilon \tilde{h}(r)$ tales que la suma de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

es prolongable analíticamente fuera del disco de convergencia es denso en $\tilde{h}(r)$.

Demostración

Si $a \varepsilon \tilde{h}(r) - \tilde{\tilde{h}}(r)$, al ser

$$a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

prolongable analíticamente, también lo será toda función correspondiente a un elemento de $a + \varphi$. Luego

$$a + \varphi \subset \tilde{h}(r) - \tilde{\tilde{h}}(r) \subset \tilde{h}(r).$$

Al ser $a + \varphi$ subconjunto denso de $\tilde{h}(r)$, también lo será de $\tilde{h}(r) - \tilde{\tilde{h}}(r)$.

c.q.d.

2. — *La topología de Pólya-Hausdorff.*

Vamos a dotar a $h(1)$ — por comodidad nos limitamos al caso $r = 1$ — de una topología de espacio vectorial topológico localmente convexo no separado que por paso al cociente determinará una topología localmente convexa separada cuya restricción al conjunto de clases correspondientes a series de potencias de radio de convergencia igual a 1 coincidirá precisamente con la de Pólya-Hausdorff ([1] pág. 94).

$\mathfrak{T}$ será la topología localmente convexa definida sobre $h(1)$ por la familia de seminormas

$$p_{(\varepsilon_n)}(a) = \limsup_n \frac{|a_n|}{\varepsilon_n}$$

cuando (ε_n) recorre el conjunto S de todas las sucesiones de términos positivos tales que

$$\lim_n \sqrt[n]{\varepsilon_n} = 1.$$

Desde luego se cumplen, cualquiera que sea $(\varepsilon_n) \varepsilon S$, las condiciones

1. — $p_{(\varepsilon_n)}(a) \geq 0$ para todo $a \varepsilon h(1)$.

2. — $p_{(\varepsilon_n)}(a + b) = \limsup_n \frac{|a_n + b_n|}{\varepsilon_n} \leq \limsup_n \frac{|a_n| + |b_n|}{\varepsilon_n} \leq$
$\leq p_{(\varepsilon_n)}(a) + p_{(\varepsilon_n)}(b)$ cualesquiera que sean a, b de $h(1)$.

3. — $p_{(\varepsilon_n)}(sa) = \lim_n \sup \frac{|s|\,|a_n|}{\varepsilon_n} = |s|\, p_{(\varepsilon_n)}(a)$ para todo $s \varepsilon C$ y todo $a \varepsilon h(1)$.

Esta familia de seminormas es filtrante y cumple

$$\sup\,(p_{(\varepsilon_n)}, p_{(\varepsilon'_n)}) = p_{(\varepsilon''_n)}$$

si $\varepsilon''_n = \min\,(\varepsilon_n, \varepsilon'_n)$.

$\mathcal{S}$ no es separada pues

PROPOSICIÓN III-5. — Sea $a \varepsilon h(1)$. $p_{(\varepsilon_n)}(a) = 0$ para toda $(\varepsilon_n) \varepsilon S$ si y sólo si $a \varepsilon h[1]$. Es decir, la adherencia de $\{0\}$ respecto de la topología $\mathcal{S}$ es $h[1]$.

DEMOSTRACIÓN

a) Si $a \varepsilon h[1]$, sea $K \varepsilon (0,1)$ para el que $|a_n| \leq K^n$ asintóticamente (proposición I-4), luego para toda $(\varepsilon_n) \varepsilon S$

$$p_{(\varepsilon_n)}(a) = \lim_n \sup \frac{|a_n|}{\varepsilon_n} \leq \lim_n \sup \frac{K^n}{\varepsilon_n} \leq 1$$

porque

$$1 > K = \lim_n \frac{K}{\sqrt[n]{\varepsilon_n}} = \lim_n \sqrt[n]{K^n/\varepsilon_n}.$$

Si fuese $p_{(\varepsilon_n)}(a) > \delta > 0$ se tendría $p_{(\varepsilon_n/\delta)}(a) > 1$, contradicción.

b) Si $a \notin h[1]$ se tendrá $a \varepsilon \tilde{h}(1)$, o sea

$$\lim_n \sup \sqrt[n]{|a_n|} = 1,$$

y tomando $(\varepsilon_n) \varepsilon S$ tal que

$$\varepsilon_{n_i} = |a_{n_i}| \quad \text{y} \quad \varepsilon_n = 1 \quad \text{si} \quad n \notin \{n_i\}$$

se cumple

$$p_{(\varepsilon_n)}(a) \geq 1, \text{ o sea } p_{(\varepsilon_n)}(a) \neq 0 \qquad \text{c.q.d.}$$

PROPOSICIÓN III-6. — Sobre $h(1)$ la topología $\mathcal{S}$ no es comparable con la usual $\mathcal{T}$.

Demostración

El conjunto $\{o\}$ es un cerrado para la topología $\mathfrak{T}$ y no lo es para $\mathfrak{S}$. En cambio $h[1]$ no es $\mathfrak{T}$-cerrado, pues es $\mathfrak{T}$-denso en $h(1)$ y distinto de $h(1)$, y es $\mathfrak{S}$-cerrado, puesto que es la $\mathfrak{S}$-adherencia de $\{o\}$. c.q.d.

Sea

$$k : h(1) \longrightarrow {}^{h(1)}/_{h[1]}$$

la aplicación canónica. Con la topología cociente de $\mathfrak{S}$, que seguiremos designando por $\mathfrak{S}$ y denominaremos *topología de Pólya-Hausdorff*, el espacio vectorial ${}^{h(1)}/_{h[1]}$ será localmente convexo separado.

En lo que sigue será $E = {}^{h(1)}/_{h[1]}$ de manera que para

$$E[\mathfrak{S}] = ({}^{h(1)}/_{h[1]})[\mathfrak{S}]$$

es sistema suficiente de seminormas la familia

$$\{\bar{p}_{(\varepsilon_n)}\}_{(\varepsilon_n)\varepsilon S}$$

en donde $\bar{p}_{(\varepsilon_n)}(\bar{a}) = p_{(\varepsilon_n)}(a)$, cualquiera que sea $a\varepsilon\bar{a}$, $\bar{a}\varepsilon E$.

A través de la aplicación canónica se puede comparar la topología de Pólya-Hausdorff sobre E con la topología $\mathfrak{T}$ de $h(1)$:

Teorema III-1. — La aplicación canónica

$$k : h(1)[\mathfrak{T}] \longrightarrow E[\mathfrak{S}]$$

no es continua pero es abierta.

Demostración

a) $\{\bar{o}\}$ es $\mathfrak{S}$-cerrado, mientras que $k^{-1}(\bar{o}) = h[1]$, que no es $\mathfrak{T}$-cerrado en $h(1)$. Por lo tanto k no es continua.

b) Dado un $\mathfrak{T}$-entorno de $o\varepsilon h(1)$

$$U_u = \{a\varepsilon h(1) : p_u(a) < 1\}$$

demostremos que $k(U_u)$ es $\mathfrak{S}$-entorno de $\bar{o}\varepsilon E$ comprobando que contiene a cierto

$$V = \{\bar{a}\varepsilon E : \bar{p}_{(\varepsilon_n)}(\bar{a}) < 1\} \quad (\varepsilon_n)\,\varepsilon S.$$

En efecto, se puede suponer que $u = (u_n) \neq o$ es tal que $u_n \geq 0$ para todo $n \varepsilon N$. Designemos

$$\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

que es un número real positivo por ser $u \varepsilon h [1]$ y la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$$

es convergente para $z = 1$.

Si $\varepsilon_n = 1/\varepsilon$ para todo $n \varepsilon N$, se cumple que $(\varepsilon_n) \varepsilon S$ y siempre que sea

$$\bar{a} \varepsilon V = \{ \bar{a} \varepsilon E : p_{(\varepsilon_n)} (a) < 1 \}$$

se tiene que

$$\lim_n \sup \frac{| a_n |}{\varepsilon_n} < 1$$

o sea, existe $K < 1$ para el que asintóticamente

$$| a_n | < K \varepsilon_n$$

de manera que, modificando un número finito de términos de a, se podrá obtener una nueva sucesión a' tal que

$$| a'_n | < K \varepsilon_n$$

para todo $n \varepsilon N$, y seguirá siendo $a' \varepsilon a$, con lo que

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n | a'_n | \leq \sum_{n=0}^{\infty} u_n K \varepsilon_n = K < 1,$$

es decir, $a' \varepsilon U_u$ y $k(a') = \bar{a} \varepsilon k(U_u)$. c.q.d.

3. — *Prolongabilidad analítica.*

Sean $\widetilde{E} = k(\widetilde{h}(1))$ y

$$\widetilde{k} : \widetilde{h}(1) [\mathcal{T}] \longrightarrow \widetilde{E} [\mathcal{S}]$$

la aplicación natural, tal que $\widetilde{k}(a) = k(a)$ para todo $a \varepsilon \widetilde{h}(1)$, siendo ahora $\mathcal{T}$ y $\mathcal{S}$ las topologías inducidas por $h(1) [\mathcal{T}]$ y $E [\mathcal{S}]$ sobre $\widetilde{h}(1)$ y $\widetilde{E}$ respectivamente.

PROPOSICIÓN III-7. — $\widetilde{k} : \widetilde{h}(1) \longrightarrow \widetilde{E}[\mathfrak{S}]$ es abierta y no es continua en ningún punto.

DEMOSTRACIÓN

a) Sea A un abierto de $h(1)[\mathfrak{T}]$. Veamos que se cumple que

$$\widetilde{k}(A \cap \widetilde{h}(1)) = k(A \cap \widetilde{h}(1)) = k(A) \cap \widetilde{E}$$

de manera que al ser $k(A)$ abierto de $E[\mathfrak{S}]$, la imagen de $A \cap \widetilde{h}(1)$, abierto de $\widetilde{h}(1)[\mathfrak{T}]$, es el abierto $k(A) \cap \widetilde{E}$ de $\widetilde{E}[\mathfrak{S}]$.

En efecto, evidentemente $k(A \cap \widetilde{h}(1)) \subset k(A) \cap \widetilde{E}$. Comprobemos la inclusión inversa.

Para cada $\bar{a} \varepsilon k(A) \cap \widetilde{E}$ se cumplirán

$$\bar{a} = k(a) \text{ con } a \varepsilon A$$

$$\bar{a} = k(b) \text{ con } b \varepsilon \widetilde{h}(1).$$

Al ser $k(a) = k(b)$, necesariamente $a - b \varepsilon h[1]$, y la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

es de radio de convergencia igual a 1, por lo que también lo es el de

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

y con ello $a \varepsilon \widetilde{h}(1)$. Así pues $\bar{a} = k(a)$ con $a \varepsilon A \cap \widetilde{h}(1)$, es decir $\bar{a} \varepsilon k(A \cap \widetilde{h}(1)) = \widetilde{k}(A \cap \widetilde{h}(1))$.

b) La discontinuidad de $\widetilde{k}$ es consecuencia inmediata del teorema III-1. c.q.d.

Designemos $\widetilde{\widetilde{E}} = k(\widetilde{\widetilde{h}}(1))$. Evidentemente $k^{-1}(\widetilde{\widetilde{E}}) = \widetilde{\widetilde{h}}(1)$.

Los teoremas (4.2.I.), (4.2.II.) y (4.2.III.) de [1] pág. 94 de PÓLYA y HAUSDORFF sobre la abundancia de funciones analíticas no prolongables los podemos enunciar del siguiente modo:

PROPOSICIÓN III-8. — (a) $\widetilde{\widetilde{E}}$ es denso en $\widetilde{E}[\mathfrak{S}]$.

(b) El complementario $\widetilde{E} - \widetilde{\widetilde{E}}$ de $\widetilde{\widetilde{E}}$ no tiene puntos aislados en $\widetilde{E}[\mathfrak{S}]$.

(c) $\widetilde{\widetilde{E}}$ es abierto en $\widetilde{E}[\mathfrak{S}]$.

Estas propiedades, en virtud de las proposiciones III-3 y III-4, no tienen réplica análoga en $\tilde{h}[\mathfrak{C}]$ sino que se cumplen

(a) $\tilde{\tilde{h}}(1)$ es denso en $\tilde{h}(1)$.

(b) $\tilde{h}(1) - \tilde{\tilde{h}}(1)$ no tiene puntos aislados (también es denso en $\tilde{h}(1)$).

(c) $\tilde{\tilde{h}}(1)$ no es abierto en $\tilde{h}(1)$.

Seminario Matemático de Barcelona,
diciembre de 1970

BIBLIOGRAFIA

Los títulos subrayados corresponden a libros

[1] BIEBERBACH, L. «*Analytische Fortsetzung*» Erg. der Math.-Springer-Verlag. - Berlin-Göttingen-Heidelberg. (1955).

[2] BOURBAKI, N. «*Eléments de mathématique. Livre V: Espaces vectoriels topologiques*». Actualités Sci. Ind. Nos 1175, 1244. Paris (1952, 1956).

[3] COOPER, J. L. B. «Coordinated linear spaces». Proc. London Math. Soc. - III ser 3, 305-327. (1953).

[4] DIEUDONNE, J. «Sur les espaces de Köthe». Journ. d'Analyse Math., t. 1, 81-115. Jerusalem. (1951).

[5] HADAMARD, M. - MANDELBROJT, M. «*La Série de Taylor et son prolongement analytique*». Gauthier-Villars. - Paris. (1926, 2ª edic).

[6] KOMURA, T. - KOMURA, Y. «Sur les espaces parfaits de suites et leurs généralisations» J. Math. Soc. Japan, Vol. 15, No 3, 319-338. (1963).

[7] KÖTHE, G. «Die Teilräume eines linearen Koordinatenraumes». Math. Ann. 111, 229-258. (1935).

[8] KÖTHE, G. «Neubegründung der Theorie der vollkommenen Räume». Math. Nachr. 4, 70-80. (1951).

[9] KÖTHE, G. «*Topological Vector Spaces I*». Die grundlehren der mathematschen Wissenschaften, Bd. 159. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York. (1969).

[10] KÖTHE, G. - TOEPLITZ, O. «Lineare Räume mit unendlich vielen Koordinaten und Ringe unendlicher Matrizen» J. reine angew. Math. 171, 193-226. (1934).

[11] TOEPLITZ, O. «Die linearen vollkommenen Räume der Funktionentheorie». Comm. Math. Helv. 23. 222-242. (1949).

[12] ZELLER, K. «FK-Räume in der Funktionentheorie» I. Math. Z. 58. 414-435 (1953).

[13] ZELLER, K. «*Theorie der Limitierungsverfahren*». Erg. der Math. - Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg. (1958).