SU ALCUNI CASI LIMITI DELLA MAGNETOIDRODINAMICA

GIUSEPPE ARCIDIACONO (a Roma)

1 — IL GRUPPO DI FANTAPPIÉ E LA MAGNETOIDRODINAMICA

Lo studio dei fluidi ionizzati, o dei fluidi conduttori immersi in un campo magnetico, viene fatto accoppiando alle equazioni elettromagnetiche di Maxwell quelle di Eulero della idrodinamica classica, e si ottiene così la «magnetoidrodinamica» [1].

Una teoria più soddisfacente può essere sviluppata sostituendo alle equazioni di Eulero quelle della idrodinamica relativistica, come é stato fatto da vari autori in questi ultimi anni *(magnetoidrodinamica relativistica)* [2].

In una serie di precedenti lavori, a partire dal 1955, ho fatto vedere che in effetti l'elettromagnetismo e la idrodinamica non sono altro che due casi limiti di una sola teoria, invariante per il gruppo dei movimenti in sé del cronotopo di De Sitter a curvatura costante, e cioé per il «gruppo di Fantappié» a 10 parametri [3].

Nella «relatività proiettiva» che così si ottiene [4] il campo *magnetoidrodinamico* H_{AB} $(A, B = 1, \dots 5)$, viene descritto da un tensore di S_5 a 10 componenti, e se ci limitiano al caso in cui non ci sono le induzioni, valgono le seguenti equazioni di Maxwell generalizzate

$$\boxed{\text{Rot } H_{AB} = J_{ABC} \quad ; \quad \text{Div } H_{AB} = 0} \tag{1,1}$$

dove J_{ABC} é il tensore «corrente-vortice», che soddisfa alla equazione di conservazione

$$\text{Rot } J_{ABC} = 0 \tag{1,2}$$

Introdotto poi il tensore energetico

$$T_{AB} = H_{AS}\, H_{SB} + \frac{1}{4}\, \delta_{AB}\, H^2 \quad . \tag{1,3}$$

l'equazione dinamica é data da

$$(1,4) \qquad 2 f_A = J_{ABC} H_{BC} \quad \text{cioé} \quad f_A = \mathrm{Div}\, T_{AB}$$

In forma duale, le (1) si scrivono così

$$(1,5) \qquad \mathrm{Div}\, H^*_{ABC} = J^*_{BC} \quad ; \quad \mathrm{Rot}\, H^*_{ABC} = 0$$

mentre il tensore energetico assume la forma

$$(1,6) \qquad 2\, T_{AB} = - H^*_{ARS} H^*_{BRS} + \frac{1}{6} \delta_{AB} H^{*2}$$

In ogni punto del fluido si possono poi definire due vettori, e cioé il vettore $\bar{u}_A$ (velocità proiettiva del fluido) ed il vettore $\bar{x}_A$ (vettore di posizione), tra loro ortogonali ed a modulo costante

$$(1,7) \qquad \boxed{\bar{u}_A \bar{u}_A = - c^2 \quad ; \quad \bar{x}_A \bar{x}_A = r^2 \quad ; \quad \bar{u}_A \bar{x}_A = 0}$$

Utilizzando questi due vettori, si arriva al risultato che il campo magnetoidrodinamico H_{AB} si può scomporre nel *campo idrodinamico* $\bar{c}_A$ e nel *campo elettromagnetico* $\bar{f}_{AB}$, ovvero nel *campo magnetico* $\bar{h}_A$ e nel *campo elettroidrodinamico* $\bar{e}_{AB}$.

In conseguenza, se nel riferimento proprio il campo elettromagnetico é nullo ($\bar{f}_{AB} = 0$), si ha la *termoidrodinamica proiettiva*, mentre se é nullo il campo idrodinamico ($\bar{c}_A = 0$), si ottiene l'*elettromagnetismo proiettivo*.

Invece, per ottenere la *magnetoidrodinamica ideale*, occorre supporre che nel riferimento proprio, il campo si riduce a quello magnetico (cioé $\bar{e}_{AB} = 0$, cosa che accade se la conducibilità elettrica é infinita), mentre la *elettroidrodinamica proiettiva*, si ottiene quando $\bar{h}_A = 0$.

In questo lavoro, riprendendo i risultati delle precedenti ricerche, ci proponiamo di esaminare i vari casi limiti della magnetoidrodinamica e di fare vedere come l'elettromagnetismo e la idrodinamica (e quindi la meccanica), derivano da una sola teoria invariante per il gruppo proiettivo di Fantappié.

2. — Scomposizione del tensore magnetoidrodinamico

A partire dal tensore magnetoidrodinamico H_{AB}, ed utilizzando i due vettori x_A ed u_A, si possono costruire i seguenti scalari, vettori e tensori (per motivi di semplicità non metteremo le sbarrette sopra i tensori proiettivi):

Il *campo idrodinamico* c_A ed il campo magnetico h_A, definiti nel seguente modo

$$\boxed{r c_A = x_B H_{AB} \quad ; \quad c h_A = u_B H_{AB}} \tag{2,1}$$

con $c_A x_A = 0$ ed $h_A u_A = 0$.

Il *campo elettromagnetico* f_{AB} ed il *campo elettroidrodinamico* e_{AB} dati dalle formule

$$\boxed{r f_{AB} = x_C H^*_{ABC} \quad ; \quad c e_{AB} = u_C H^*_{ABC}} \tag{2,2}$$

con $f_{AB} x_A = f_{AB} x_B = 0$ ed $e_{AB} u_A = e_{AB} u_B = 0$.

Il *campo elettrico* e_A dato dalla espressione

$$r c e_A = x_B u_C H^*_{ABC} = c x_B e_{AB} = - r u_C f_{AC} \tag{2,3}$$

con le condizioni $e_A u_A = 0$ ed $e_A x_A = 0$.

Infine, l'*indice* φ del fluido, così definito

$$\boxed{r c^2 \varphi = x_A u_B H_{AB} = c x_A h_A = - r u_B c_B} \tag{2,4}$$

da cui segue che quando $h_A = 0$ oppure $c_A = 0$, l'indice del fluido é nullo.

Fatta questa premessa, nel precedente lavoro [3] abbiamo dimostrato che il tensore magnetoidrodinamico H_{AB} si può decomporre nei seguenti due modi

$$\left\{ \begin{array}{l} r H_{AB} = c_A x_B - c_B x_A + \varepsilon_{ABCDE} x_C f_{DE} \\ - c H_{AB} = h_A u_B - h_B u_A + \varepsilon_{ABCDE} u_C e_{DE} \end{array} \right. \tag{2,5}$$

In modo analogo, il tensore duale H^*_{ABC} si può scomporre in due modi diversi

$$(2,6)\qquad \begin{cases} r\,H^*_{ABC} = f_{AB}\,x_C + f_{BC}\,x_A + f_{CA}\,x_B + \varepsilon_{ABCDE}\,x_D\,c_E \\ -\,c\,H^*_{ABC} = e_{AB}\,u_C + e_{BC}\,u_A + e_{CA}\,u_B + \varepsilon_{ABCDE}\,u_D\,h_E \end{cases}$$

Dalle (5) componendo rispettivamente con u_B ed x_B e tenendo conto delle (4) si ottengono le interessanti formule

$$(2,7)\qquad \boxed{r\,h_A = c\varphi x_A + y_A \quad ; \quad c_A = \varphi\,u_A + q_A}$$

dove si é posto

$$(2,8)\qquad r\,y_A = \varepsilon_{ABCDE}\,u_B\,x_C\,f_{DE} \quad ; \quad -\,r\,q_A = \varepsilon_{ABCDE}\,x_B\,u_C\,e_{DE}$$

con $q_A\,x_A = q_A\,u_A = 0$ ed $y_A\,x_A = y_A\,u_A = 0$.

Si vede così che nel caso più generale, il campo idrodinamico c_A non é parallelo alla velocità proiettiva u_A. Come é noto, una cosa analoga accade nella idrodinamica relativistica dei fluidi termodinamici e dei fluidi a spin [5].

Infine dalle (6) componendo rispettivamente con u_C e con x_C, si deduce che

$$(2,9)\qquad \begin{cases} r\,e_{AB} = e_A\,x_B - e_B\,x_A + c^{-1}\,\varepsilon_{ABCDE}\,u_C\,x_D\,c_E \\ -\,c\,f_{AB} = u_A\,e_B - u_B\,e_A + r^{-1}\,\varepsilon_{ABCDE}\,x_C\,u_D\,h_E \end{cases}$$

le quali ci danno le scomposizioni del campo elettroidrodinamico e del campo elettromagnetico in funzione dei tre vettori e_A, h_A e c_A.

3. — Scomposizione del tensore corrente-vortice

In modo analogo, dal tensore «corrente-vortice» J_{ABC} si ricavano i seguenti scalari, vettori e tensori:

I due tensori *vortici*, dati da

$$(3,1)\qquad \boxed{r\,\omega_{AB} = x_C\,J_{ABC} \quad ; \quad c\,\omega^{(1)}_{AB} = u_C\,J_{ABC}}$$

I due vettori *corrente elettrica*, cioé

$$(3,2)\qquad \boxed{r\,j_A = x_B\,J^*_{AB} \quad ; \quad c\,j^{(1)}_A = u_B\,J^*_{AB}}$$

Il vettore *vortice idrodinamico*, dato da

$$(3,3) \qquad r c \omega_A = x_B u_C J_{ABC} = c x_B \omega_{AB}^{(1)} = - r u_C \omega_{AC}$$

con $\omega_A u_A = 0$ ed $\omega_A x_A = 0$.

Infine la *densità di carica* ϱ, così definita

$$(3,4) \qquad \boxed{r c^2 \varrho = x_A u_B J_{AB}^* = c x_A j_A^{(1)} = - r u_B j_B}$$

da cui segue che quando $j_A^{(1)} = 0$, oppure $j_A = 0$, la densità di carica si annulla.

Procedendo allora come nel paragrafo precedente, avremo le seguenti decomposizioni del tensore J_{ABC}

$$(3,5) \qquad \begin{cases} r J_{ABC} = \omega_{AB} x_C + \omega_{BC} x_A + \omega_{CA} x_B + \varepsilon_{ABCDE} x_D j_E \\ - c J_{ABC} = \omega_{AB}^{(1)} u_C + \omega_{BC}^{(1)} u_A + \omega_{CA}^{(1)} u_B + \varepsilon_{ABCDE} u_D j_E^{(1)} \end{cases}$$

In modo analogo avremo

$$(3,6) \qquad \begin{cases} r J_{AB}^* = j_A x_B - j_B x_A + \varepsilon_{ABCDE} x_C \omega_{DE} \\ - c J_{AB}^* = j_A^{(1)} u_B - j_B^{(1)} u_A + \varepsilon_{ABCDE} u_C \omega_{DE}^{(1)} \end{cases}$$

Dalle (5) componendo rispettivamente con u_C e con x_C, si deduce poi che

$$(3,7) \qquad \begin{cases} r \omega_{AB}^{(1)} = \omega_A x_B - \omega_B x_A + c^{-1} \varepsilon_{ABCDE} u_C x_D j_E \\ - c \omega_{AB} = u_A \omega_B - u_B \omega_A + r^{-1} \varepsilon_{ABCDE} x_C u_D j_E^{(1)} \end{cases}$$

Invece dalle (6), procedendo al solito modo, seguono le due interessanti formule

$$(3,8) \qquad \boxed{j_A = \varrho u_A + v_A \quad ; \quad r j_A^{(1)} = c \varrho x_A + w_A}$$

dove si é posto

$$(3,9) \qquad - c v_A = \varepsilon_{ABCDE} u_B x_C \omega_{DE} \quad ; \quad r w_A = \varepsilon_{ABCDE} x_B u_C \omega_{DE}^{(1)}$$

La prima delle (8) ci dice che nel caso più generale, la corrente elettrica si scompone nella corrente di convezione (ϱu_A), più un termine ad esso ortogonale.

4. — La idrodinamica e la termoidrodinamica proiettiva ($\varrho = 0$)

Passiamo adesso ad esaminare i vari casi limiti che si ricavano a partire dalla magnetoidrodinamica proiettiva.

Il caso più semplice é quello in cui, nel riferimento proprio, il campo elettromagnetico si annulla ($f_{AB} = 0$), ed allora otteniamo la «idrodinamica proiettiva», nella quale il tensore magnetoidrodinamico si riduce a

$$\boxed{r H_{AB} = c_A x_B - c_B x_A} \tag{4,1}$$

In questo caso, dalla prima equazione (1,5) moltiplicata per x_C, segue che $j_A = 0$, e quindi dalle (3,5) si deduce che

$$r J_{ABC} = \omega_{AB} x_C + \omega_{BC} x_A + \omega_{CA} x_B \tag{4,2}$$

mentre la densità di carica é nulla ($\varrho = 0$), in base alle (3,4).

Infine, il campo magnetico si riduce alla espressione

$$r h_A = c\varphi x_A \qquad \text{con } h_A u_A = 0 \tag{4,3}$$

come risulta dalle (2,8).

Sostituendo la (1) nella espressione (1,3) del tensore energetico avremo, con facili calcoli

$$\boxed{- T_{AB} = c_A c_B - c_S^2 \left(\frac{1}{2} \delta_{AB} - \frac{1}{r^2} x_A x_B \right)} \tag{4,4}$$

che é il tensore energetico del campo idrodinamico.

Nel caso più generale, il campo idrodinamico non risulta parallelo alla velocità proiettiva del fluido, perché

$$c_A = \varphi u_A + q_A \qquad \text{con } q_A x_A = q_A u_A = 0 \tag{4,5}$$

Diremo che un fluido é *perfetto* se c_A é parallelo alla velocità, cioé se $c_A = \varphi u_A$. In questo caso il tensore energetico (4) diventa

$$- T_{AB} = \varphi^2 u_A u_B - \varphi^2 c^2 \left(\frac{1}{2} \delta_{AB} - \frac{1}{r^2} x_A x_B \right) \tag{4,6}$$

Se allora poniamo

$$\varphi^2 = \mu + p/c^2 \quad ; \quad \varphi^2 c^2 = 2p \tag{4,7}$$

se ne deduce l'equazione di stato

$$\boxed{p = \mu c^2} \tag{4,8}$$

ed il fluido é incompressibile, come si ricava dalla $\partial_A H_{AB} = 0$, moltiplicata per x_B, cioé

$$\partial_A c_A = 0 \tag{4,9}$$

Il tensore energetico di un fluido perfetto incompressibile é quindi il seguente

$$\boxed{- T_{AB} = (\mu + p/c^2)\,(u_A u_B - H^2 x_A x_B) + p\,\delta_{AB}} \tag{4,10}$$

dove abbiamo indicato con $H = c/r$ la costante di Hubble.

La (10) assume un aspetto più interessante, se si introduce il tensore generalizzato di Eckart [6] (o tensore di proiezione), così definito

$$\boxed{\mu_{AB} = \delta_{AB} + \frac{1}{c^2} u_A u_B - \frac{1}{r^2} x_A x_B} \tag{4,11}$$

Tale tensore, nel riferimento proprio ha tutte le componenti nulle, tranne le $\eta_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$ ed é tale che

$$\eta_{AB}\, x_A = \eta_{AB}\, u_A = 0 \quad ; \quad \eta_{AB}\, \eta_{BC} = \eta_{AC} \tag{4,12}$$

Ne segue allora che il tensore energetico dei fluidi perfetti incompressibili si può scrivere così

$$\boxed{- T_{AB} = \mu\,(u_A u_B - H^2 x_A x_B) + p\,\eta_{AB}} \tag{4,13}$$

ed in base alle (12) si avrà

$$T_{AB}\, x_A = - \mu c^2 x_B \quad ; \quad T_{AB}\, u_A = + \mu c^2 u_B \tag{4,14}$$

cioé x_A ed u_A sono i due autovettori e $\pm \mu c^2$ i corrispondenti autovalori del tensore energetico.

Si ha infine

$$T_{AB}\, x_A x_B = T_{AB}\, u_A u_B = - \mu c^2 r^2 \tag{4,15}$$

Per ottenere le equazioni di Eulero generalizzate, prendiamo la divergenza della (10), e ponendo per brevità $\mu' = \mu + p/c^2$, avremo

$$\begin{aligned} \mu' u_A \partial_A u_B + u_B \partial_A (\mu' u_A) + \partial_B p - \\ - H^2 \mu' x_A \partial_A x_B - H^2 x_B \partial_A (\mu' x_A) = 0 \end{aligned} \tag{4,16}$$

Moltiplicando i due membri per u_B e ponendo $u_A \partial_A = d/d\tau$, si ha l'equazione di continuità

$$- c^2 \partial_A (\mu' u_A) + dp/d\tau = 0 \tag{4,17}$$

Moltiplicando invece per x_B e ponendo $x_A \partial_A = d/d\varrho$, otteniamo la nuova equazione

$$- c^2 \partial_A (\mu' x_A) + dp/d\varrho = 0 \tag{4,18}$$

In base a queste ultime due equazioni, la (16) si può scrivere così

$$\boxed{\mu' \frac{du_B}{d\tau} + \frac{u_B}{c^2}\frac{dp}{d\tau} - \frac{x_B}{r^2}\frac{dp}{d\varrho} + \partial_B p = H^2 \mu' x_B} \tag{4,19}$$

e generalizza le equazioni di Eulero della idrodinamica relativista.

Nel caso più generale, in cui $q_A \neq 0$, esso si può interpretare come «vettore termico», ed allora il fenomeno elementare della conduzione termica viene tradotto dalla ipotesi di FOURIER generalizzata

$$\boxed{c^2 \varphi^{-1} q_A = - \varkappa \eta_{AB} \partial_B T = - c\, \varepsilon_{ABCDE} x_B u_C e_{DE}} \tag{4,20}$$

dove $\varkappa$ é il coefficiente di conduzione, che supporremo costante, e T è la temperatura assoluta.

Si ottiene allora, nel modo più semplice, una nuova teoria dei fluidi termodinamici, più soddisfacente di quelle sinora proposte dai vari Autori. Tale teoria, per $r \to \infty$, assume il seguente aspetto matematico:

Il vettore corrente idrodinamica é dato da

$$C_i = f u_i + Q_i \tag{4,21}$$

con $Q_i = q_i / f c^2$ ed $u_i q_i = 0$.

Fatta questa premessa, il tensore energetico di un fluido termodinamico é dato dalla (4,4), ed al limite relativistico si riduce a

$$T_{ik} = f^2 u_i u_k + \frac{1}{2} (f^2 c^2 - Q^2)\, \delta_{ik} + Q_i Q_k + f\,(u_i Q_k + u_k Q_i) \tag{4,22}$$

Se poi poniamo

$$f^2 = \mu + p/c^2 \quad ; \quad f^2 c^2 - Q^2 = 2p$$

il tensore (22) assume il seguente aspetto

$$\boxed{T_{ik} = \left(\mu + \frac{p}{c^2}\right) u_i u_k + p\,\delta_{ik} + Q_i Q_k + f\,(u_i Q_k + u_k Q_i)} \tag{4,23}$$

Scriviamo poi l'equazione di continuità

$$u_k \partial_i T_{ik} = \partial_i (u_k T_{ik}) - T_{ik} \partial_i u_k = 0 \tag{4,24}$$

Se ci poniamo nel caso di un fluido in equilibrio meccanico, cioé che dal punto di vista macroscopico, si comporta come un solido, possiamo suporre u_i costante, e l'equazione (24) diventa $\partial_i (\mu c^2 u_i + q_i) = 0$, cioé

$$\boxed{-\partial_i q_i = c^2\, d\mu/d\tau} \tag{4,25}$$

e ricordiamo che $c^2 d\mu = dQ + p\,dV$, $V = 1/\mu$ mentre

$$q_i = -\varkappa \eta_{ik} \partial_k T \quad ; \quad \frac{dq}{d\tau} = \frac{dq}{dT} \cdot \frac{dT}{d\tau} = \mu\gamma \frac{dT}{d\tau}$$

dove γ é il calore specifico del fluido (supposto costante), otteniamo subito l'equazione relativistica di FOURIER del calore (per $u_i =$ cost)

$$\boxed{\varkappa \,\Box\, T + \frac{\varkappa}{c^2} \frac{d^2 T}{d\tau^2} = \mu\gamma \frac{dT}{d\tau} - \frac{\lambda}{\mu} \frac{d\mu}{d\tau}} \tag{4,26}$$

con $\lambda = p/\mu$, assai simile a quella proposta da Pham Mau Quan [10].

In un successivo lavoro ci proponiamo di sviluppare ed approfondire la nuova teoria dei fluidi termodinamici che così si ottiene.

5. — «Materia pura» e fluidi viscosi

Se nella (4,13) poniamo $p = 0$, otteniamo il tensore energetico dello schema «materia pura»

$$\boxed{T_{AB} = \mu\,(u_A\,u_B - H^2\,x_A\,x_B)} \tag{5,1}$$

In questo caso, le equazioni di continuità si riducono alle seguenti

$$\partial_A\,(\mu u_A) = 0 \quad ; \quad \partial_A\,(\mu x_A) = 0 \tag{5,2}$$

e l'equazione dinamica (4,19) diventa

$$\boxed{du_A/d\tau = H^2\,x_A} \tag{5,3}$$

e coincide con quella della meccanica proiettiva del punto libero, da noi studiata in un precedente lavoro [7]. *Viene così dimostrato che la meccanica può essere ottenuta a partire dalle equazioni della magnetoidrodinamica.*

Per vedere in che modo può essere estesa alla relatività proiettiva la teoria dei fluidi viscosi incompressibili, osserviano che nella relatività ristretta, si ha il seguente tensore degli sforzi [8]:

$$S_{ik} = \pi\eta_{ik} - \nu\,V_{ik} \tag{5,4}$$

dove ν é il coefficiente di viscosità e V_{ik} é il tensore viscoso dato da

$$\boxed{2\,V_{ik} = \eta_{ir}\,\eta_{ks}\,(\partial_r\,C_s + \partial_s\,C_r)} \tag{5,5}$$

Come é noto, la pressione p é definita come l'invariante scalare del tensore degli sforzi

$$3\,p = S_{ii} = \pi\eta_{ii} - \frac{1}{2}\,\nu\eta_{ir}\,\eta_{is}\,(\partial_r\,C_s + \partial_s\,C_r) \tag{5,6}$$

Ora si ha $\eta_{ii} = 3\pi$; $\eta_{ir}\eta_{is} = \eta_{rs}$, mentre $C_i = f u_i$; se allora ricordiamo che $\eta_{rs} = \delta_{rs} + u_r u_s / c^2$ e poniamo $\sigma_0 = \partial_i u_i$, avremo subito

$$(5,7) \qquad \boxed{\varrho = \pi - \nu f \sigma_0 / 3}$$

Per trovare l'espressione esplicita del tensore viscoso (5), osserviamo che

$$2 V_{ik} = (\partial_i C_k + \partial_k C_i) + c^{-2} u_k u_s (\partial_i C_s + \partial_s C_i) +$$
$$+ c^{-2} u_i u_r (\partial_r C_k + \partial_k C_r) + c^{-4} u_i u_k u_r u_s (\partial_r C_s + \partial_s C_r)$$

L'ultimo termine é nullo, ed introducendo l'accelerazione relativistica $a_i = u_s \partial_s u_i$, si avrà in definitiva

$$(5,8) \qquad \begin{aligned} 2 V_{ik} &= (\partial_i C_k + \partial_k C_i) - c^{-2} (C_i a_k + C_k a_i) \\ &- f (u_i \partial_k \log f + u_k \partial_i \log f) \end{aligned}$$

A tale tensore si può dare una nuova forma più semplice, se osserviamo che l'ultimo termine vale

$$u_i \partial_k f + u_k \partial_i f = (\partial_k C_i + \partial_i C_k) - f (\partial_i u_k + \partial_k u_i)$$

Sostituendo nella (8), avremo

$$(5,9) \qquad \boxed{2 V_{ik} = f (\partial_i u_k + \partial_k u_i) + c^{-2} f (u_i a_k + u_k a_i)}$$

che é il tensore viscoso relativistico.

Fatta questa premessa, si vede che nella relatività proiettiva, il tensore viscoso (5) può essere generalizzato nel seguente modo

$$(5,10) \qquad \boxed{2 V_{AB} = \eta_{AR} \eta_{BS} (\partial_R c_S + \partial_S c_R)}$$

e tale tensore si annulla se il campo si riduce a quello elettromagnetico, cioé quando $c_A = 0$.

Ne segue che il tensore energetico dei fluidi viscosi incompressibili é il seguente

$$(5,11) \qquad T_{AB} = \mu (u_A u_B - H^2 x_A x_B) + \pi \eta_{AB} - \nu V_{AB}$$

e per r tendente all'infinito, si riduce a quello relativistico.

Nel caso dei fluidi perfetti, per i quali $c_A = \varphi u_A$, la pressione $3p = S_{AA}$ é data ancora della relazione

$$p = \pi - \nu\varphi\sigma_0/3 \quad \text{con} \quad \sigma_0 = \partial_A u_A \tag{5,12}$$

come é facile verificare.

6. — L'elettromagnetismo proiettivo ($\varphi = 0$)

L'elettromagnetismo proiettivo si ottiene quando, nel riferimento proprio, il campo H_{AB} si riduce a quello elettromagnetico, cioé se si ha $c_A = 0$.

Ne segue allora dalle (2,4) che in questo caso l'indice del fluido é nullo ($\varphi = 0$), mentre dalla $\partial_A H^*_{ABC} = J^*_{BC}$, moltiplicando per x_C, si deduce che

$$\partial_A f_{AB} = j_B \tag{6,1}$$

In base alla (2,4) il campo é dato da

$$\boxed{r H^*_{ABC} = f_{AB} x_C + f_{BC} x_A + f_{CA} x_B} \tag{6,2}$$

mentre dalle (2,9) si deduce la formula

$$r e_{AB} = e_A x_B - e_B x_A \tag{6,3}$$

Infine, il vortice idrodinamico non si annulla, come risulta dalla prima delle (1,1) moltiplicata per x_C. Come é noto, nella idrodinamica dei fluidi elettrizzati, anche il campo elettromagnetico dà un contributo al vortice, perché $\Omega'_{ik} = \Omega_{ik} - k F_{ik}$, con $k = \varrho/f$.

Sostituendo la (2) nella espressione (1,6) del tensore energetico, si ottiene il tensore energetico del campo elettromagnetico

$$\boxed{T_{AB} = f_{AS} f_{SB} + \frac{f^2}{2}\left(\frac{1}{2}\,\delta_{AB} - \frac{x_A x_B}{r^2}\right)} \tag{6,4}$$

che generalizza quello della fisica relativistica.

E' noto che nella relatività ristretta la *corrente di convezione* é data da $j_k = \varrho u_k$. Tale formula può estendersi alla relatività proiettiva, nel seguente modo

(6,5) $$\boxed{J_{ABC} = k\, H^*_{ABC} \quad \text{ovvero} \quad J^*_{AB} = k\, H_{AB}}$$

Moltiplicando i due membri della seconda uguaglianza per $x_A u_B$, e tenendo conto delle (2,4) e (3,4) si deduce che $\varrho = k\varphi$ cioé

(6,6) $$k = \varrho / \varphi$$

Il coefficiente k é quindi il rapporto tra la densità di carica e l'indice del fluido.

Moltiplicando i due membri della prima delle (5) per x_C, avremo invece

(6,7) $$\boxed{\omega_{AB} = k f_{AB}}$$

la quale generalizza la «precessione di Larmor» relativistica, data dalla nota formula $\Omega_{ik} = k F_{ik}$ [9].

Se poi moltiplichiamo i due membri della seconda delle (5) per x_B e ricordiamo la seconda delle (2,7), avremo

(6,8) $$\boxed{j_A = k c_A = \varrho u_A + k q_A}$$

che, per $q_A = 0$ si riduce alla corrente di convezione.

Possiamo quindi affermare che *nella relatività proiettiva la* (5) *comprende sia la precessione di Larmor che la corrente di convezione.*

Infine, se moltiplichiamo le (5) per u_C, avremo le due relazioni

(6,9) $$\omega^{(1)}_{AB} = k e_{AB} \quad ; \quad J^{(1)}_A = k h_A = \varrho x_A + k y_A$$

La *corrente di conduzione* é data dalla legge di Ohm generalizzata

(6,10) $$\boxed{J^*_{AB} = \sigma u_C H^*_{ABC} = \sigma e_{AB}}$$

ovvero, in forma duale

(6,11) $$J_{ABC} = \sigma\,(u_A H_{BC} + u_B H_{CA} + u_C H_{AB})$$

La (10) moltiplicata per x_B ci dà la legge di Ohm

(6,12) $$\boxed{J_A = \sigma e_A}$$

mentre, moltiplicando la (11) per x_C, avremo

$$\omega_{AB} = \sigma\,(u_A\, c_B - u_B\, c_A) \tag{6,13}$$

che si riduce alla $\omega_{AB} = 0$, quando $c_A = \varphi\, u_A$, cioé nei fluidi perfetti.

In modo analogo avremo

$$j_A^{(1)} = 0 \quad ; \quad \omega_{AB}^{(1)} = \sigma\,(u_A\, h_B - u_B\, h_A - c^2\, H_{AB}) \tag{6,14}$$

come é facile verificare.

7. — La magnetoidrodinamica ideale ($\varphi \neq 0$) e la elettroidrodinamica ($\varphi = 0$).

La magnetoidrodinamica ideale si ottiene quando nel sistema proprio il campo H_{AB} si riduce a quello magnetico. Questo accade per $e_{AB} = 0$, cioé in base alla legge di Ohm (6,10), quando la conducibilità elettrica é infinita.

In questo caso, il tensore H_{AB} si riduce a

$$\boxed{-\, c\, H_{AB} = h_A\, u_B - h_B\, u_A} \tag{7,1}$$

mentre il campo idrodinamico, in base alla (2,8) risulta parallelo alla velocità proiettiva

$$c_A = \varphi\, u_A \quad \text{con} \quad c_A\, x_A = 0 \tag{7,2}$$

Se allora moltiplichiamo la $\partial_A\, H_{AB} = 0$ per x_B e poi per u_B ricaviamo le due formule

$$\boxed{\partial_A\, c_A = 0 \quad ; \quad \partial_A\, h_A = h_A\, a_A} \tag{7,3}$$

la prima esprime la incompressibilità del fluido, mentre la seconda ci dice che il campo magnetico é solenoidale solo se é ortogonale alla accelerazione proiettiva.

Sostituendo la (1) nella espressione (1,3) del tensore energetico, avremo

$$\boxed{T_{AB} = h_A\, h_B - h_S^2 \left(\frac{1}{2}\, \delta_{AB} + \frac{1}{c^2}\, u_A\, u_B\right)} \tag{7,4}$$

A partire da tale tensore, assai simile a quello (4,3) della idrodinamica proiettiva, si possono ricavare le equazioni della magnetoidrodinamica ideale, come abbiamo fatto in un precedente lavoro [3].

Infine, se nel riferimento proprio il campo magnetico si annulla ($h_A = 0$), otteniamo la *elettroidrodinamica proiettiva* nella quale, per la (2,4) é nullo l'indice del fluido ($\varphi = 0$).

Si avrà allora, per la (2,6)

$$\boxed{- c\, H_{ABC} = e_{AB}\, u_C + e_{BC}\, u_A + e_{CA}\, u_B} \tag{7,5}$$

mentre dalle (2,9) segue che

$$- c f_{AB} = u_A\, e_B - u_B\, e_A \tag{7,6}$$

e tali formule sono simili alle (6,2) e (6,3).

Sostituendo la (5) nella espressione (1,6) del tensore energetico si ottiene un tensore assai simile a quello (6,4) del campo elettromagnetico

$$\boxed{- T_{AB} = e_{AS}\, e_{SB} + \frac{e^2}{2}\left(\frac{1}{2}\,\delta_{AB} + \frac{u_A\, u_B}{c^2}\right)} \tag{7,7}$$

Poiché l'indice é nullo, il campo idrodinamico si riduce a

$$c_A = q_A \quad \text{con} \quad q_A\, u_A = q_A\, x_A = 0 \tag{7,8}$$

Concludendo, possiamo fare il seguente schema che mette in evidenza le analogie tra i quattro casi limiti della magnetoidrodinamica

Termoidrodinamica proiettiva ($f_{AB} = 0 \;;\; \varrho = 0$)	Magnetoidrodinamica ideale ($e_{AB} = 0 \;;\; \varphi \neq 0$)
$r\, H_{AB} = c_A\, x_B - c_B\, x_A$ $- T_{AB} = c_A\, c_B - c_S^2\left(\frac{1}{2}\,\delta_{AB} - \frac{x_A\, x_B}{r^2}\right)$	$- c\, H_{AB} = h_A\, u_B - h_B\, u_A$ $T_{AB} = h_A\, h_B - h_S^2\left(\frac{1}{2}\,\delta_{AB} + \frac{u_A\, u_B}{c^2}\right)$
Elettromagnetismo proiettivo ($c_A = 0 \;;\; \varphi = 0$)	Elettroidrodinamica proiettiva ($h_A = 0 \;;\; \varphi = 0$)
$r\, H_{ABC} = f_{AB}\, x_C + f_{BC}\, x_A + f_{CA}\, x_B$ $T_{AB} = f_{AS}\, f_{SB} + \frac{f^2}{2}\left(\frac{1}{2}\,\delta_{AB} - \frac{x_A\, x_B}{r^2}\right)$	$- c\, H_{ABC} = e_{AB}\, u_C + e_{BC}\, u_A + e_{CA}\, u_B$ $- T_{AB} = e_{AS}\, e_{SB} + \frac{e^2}{2}\left(\frac{1}{2}\,\delta_{AB} + \frac{u_A\, u_B}{c^2}\right)$

Si vede così la *idrodinamica proiettiva* ha una struttura matematica assai simile a quella della *magnetoidrodinamica ideale*, e lo stesso accade per l'*elettromagnetismo proiettivo* e la *elettroidrodinamica proiettiva*.

Più precisamente, si può passare da una teoria all'altra con in semplice scambio dei due vettori x_A ed u_A, cosa che produce gli scambi $c_A \to h_A$ ed $f_{AB} \to e_{AB}$. Questa analogia, una volta chiarita ed approfondita potrebbe permettere di stabilire nella relatività proiettiva un «principio di dualità» simile a quello della geometria proiettiva classica.

BIBLIOGRAFIA

(1) H. ALFVEN, *Cosmical Electrodynamics*, Oxford, 1950; L. LANDAU, E. LIFCHITZ, *Electrodynamique des milieux continus*, cap. 8, Moscou 1969.

(2) A. LICHNEROWICZ, *Relativistic hydrodynamics and magnetohydrodynamics*, Benjamin, New York, 1967.

(3) G. ARCIDIACONO, *Le equazioni di Maxwell generalizzate*, Rend. Lincei, ser. 8°, vol. 18, fasc. 5 (1955); *La elettrodinamica e la idrodinamica*, Rend. Lincei, ser. 8°, vol. XX, fasc. 5 (1956); *La relatività di Fantappié*, Coll. Math. X, 85 (1958); *Magnetoidrodinamica e cosmologia*, Coll. Math. XIX, 177 (1968); *L'Universo di De Sitter-Castelnuovo e la magnetoidrodinamica ideale*, Coll. Math. XII, 149 (1970).

(4) La «relatività proiettiva» é sviluppata nel volume G. ARCIDIACONO, *La teoria della relatività*, Libreria Veschi (Viale Università 7), Roma 1970.

(5) C. MARLE, *Sur l'établissement des équations de l'hydrodynamique des fluides relativistes dissipatifs*, Ann. Poincaré, X, A, 127 (1969); G. BOILLAT, *Relativistic Thermodynamic Fluid*, Lett. Nuovo Cimento, III, 521 (1970); F. HALBWACHS, *Théorie relativiste des fluides a spin*, pag. 158, Paris, Gauthier-Villars, 1960.

(6) C. ECKART, *The thermodynamics of irreversible processes: III, Relativistic theory of the simple fluid*, Phys. Rev, 58, 919 (1940).

(7) G. ARCIDIACONO, *L'Universo di De Sitter e la meccanica*, Coll. Math. XX, 231 (1969).

(8) A. LICHNEROWICZ, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnetisme*, cap. V, Masson, Paris (1955); G. PICHON, *Etude relativiste de fluides visqueux et chargés*, Ann. Poincaré, II, 21 (1965); C. VENINI, *Sul moto relativistico dei fluidi viscosi*, Rend. Ist. Lombardo, A. 102, 23, (1968).

(9) L. A. SCHMID, *Larmor and Helmholtz theorems for relativistic charged fluid flow*, Nuovo Cimento, 52 B, 313 (1967).

(10) PHAM MAU QUAN, *Sur une théorie des fluides thermodynamiques*, Annali di Matematica, 38, 181 (1955); A. BRESSAN, *On relativistic Thermodynamics*, Il Nuovo Cimento, 48-B, 201, (1967); H. ARZELIES, *Thermodynamique relativiste et quantique*, Paris 1968, pag. 125; M. KRANYS *Relativistic hydrodynamics with irreversible thermodynamics*, Nuovo Cimento, 42-B, 51, (1961).

Prof. Giuseppe ARCIDIACONO
Via Acquedotto del Peschiera 96
00135, Roma