DIE ORDNUNGSTOPOLOGIE UND ORDNUNGSTONNELIERTE TOPOLOGIEN AUF VEKTORVERBÄNDEN

von

DIETER KEIM

In einem Vektorverband E ist ein nicht topologischer Beschränktheitsbegriff erklärt. Eine Teilmenge von E heißt ordnungsbeschränkt, falls sie in einem Ordnungsintervall $[-x, x]$ von E enthalten ist. Wandelt man in topologischen Vektorverbänden $E(\mathbf{T})$ bekannte Begriffe aus der Theorie der linearen Räume, in denen die $\mathbf{T}$-beschränkten Mengen wesentlich sind, dadurch ab, indem man die $\mathbf{T}$-beschränkten durch die ordnungsbeschränkten Mengen ersetzt, so kann dies zu neuen Raumklassen führen.

Gehen wir auf diese Weise von den bornologischen Räumen aus, so haben wir in dem Vektorverband E alle absolutkonvexen Mengen zu betrachten, die jedes Ordnungsintervall von E absorbieren. Sie bilden eine Nullumgebungsbasis für eine Topologie auf E, die also allein durch die Verbandsstruktur des Raumes bestimmt ist. Diese lokalkonvexe Ordnungstopologie $\mathbf{T}^{LO}$ wurde zuerst von I. NAMIOKA [1] sowie H. SCHAEFER [1], [2] untersucht. $\mathbf{T}^{LO}$ ist die feinste lokalkonvexe Verbandstopologie auf E. Für $E(\mathbf{T}^{LO})$ läßt sich eine Theorie entwickeln, die der bornologischer Räume sehr ähnlich ist. Dies gilt sowohl für Permanenzeigenschaften als auch innere und äußere Charakterisierungen dieser Topologie.

Die quasitonnelierten Räume führen uns zu lokalkonvexen Vektorverbänden $E(\mathbf{T})$, in denen jede $\mathbf{T}$-abgeschlossene, absolutkonvexe Menge, die jedes Intervall von E absorbiert, eine Nullumgebung ist. Diese Räume wurden von Y.-C. WONG [1] eingeführt. Er nennt sie ordnungsquasitonneliert. Wir nennen sie ordnungstonneliert, da sie enger mit der Klasse der tonnelierten als der der quasitonnelierten Räume verwandt sind, wie sich zeigen wird. Die ordnungstonnelierten Räume nehmen in der Kategorie der Vektorverbände den Platz ein, den die tonnelierten Räume unter den linearen Räumen innehaben. So läßt sich eine dem Satz von Banach-Steinhaus entsprechende Aussage beweisen, ebenso Graphensätze und Sätze über offene Abbildungen.

Von W. ROBERTSON [1] und S. O. IYAHEN [1] wurden topologische lineare Räume eingeführt, die den tonnelierten und bornologischen lokalkonvexen Räumen entsprechen. Dies führt uns zu linear ordnungstonnelierten Vektorverbänden sowie der linearen Ordnungstopologie.

Herrn Prof. G. Köthe und Herrn Dr. N. Adasch danke ich vielmals für ihre Unterstützung.

BEGRIFFE UND BEZEICHNUNGEN

Wir nennen einen Vektorverband E einen *(R)-Raum*. Ein Teilraum $F \subset E$ heißt *(R)-Teilraum*, falls F mit x und y auch sup (x, y) enthält. Eine Teilmenge $N \subset E$ ist *normal* (solid in H. SCHAEFER [1]), falls N die leere Menge ist, oder falls mit einem Element x auch das Intervall $[-|x|, |x|]$ aus E in N liegt. Der *normale Kern* $K(M)$ einer Menge M ist die größte normale Menge von E, die in M enthalten ist. Die absolutkonvexe Hülle einer normalen Menge in E ist wieder normal und ebenso die Summe zweier normaler Mengen. Ein normaler Teilraum von E heißt *Ideal*.

Eine lineare Abbildung $A \colon E \to F$ von E in einen (R)-Raum F heißt *ordnungsbeschränkt*, falls A jedes Intervall von E in ein Intervall von F abbildet. Die Menge der ordnungsbeschränkten Funktionale auf E bildet den *Ordnungsdual* E^b.

In den weiteren Bezeichnungen aus der Verbandstheorie, soweit sie im folgenden nicht erklärt werden, halten wir uns an H. SCHAEFER [1].

Ist $F(\mathbf{T})$ ein topologischer linearer Raum, so existiert eine feinste lokalkonvexe Topologie $\mathbf{T}^*$ unter allen lokalkonvexen Topologien auf F, die gröber als $\mathbf{T}$ sind. $F(\mathbf{T})$ und der *assoziierte lokalkonvexe Raum* $F(\mathbf{T}^*)$ besitzen denselben topologischen Dualraum.

Die $A_\gamma \colon F_\gamma(\mathbf{T}_\gamma) \to F$ seien lineare Abbildungen der Vektorräume F_γ in den Vektorraum F, so daß F von $\bigcup_\gamma A_\gamma(F_\gamma)$ aufgespannt wird. $\mathbf{T}$ sei die feinste lineare Topologie auf F, unter der alle A_γ stetig sind. Wir nennen $F(\mathbf{T})$ dann die *topologische (lineare) Hülle* von $(F_\gamma(\mathbf{T}_\gamma), A_\gamma)$. ($F(\mathbf{T})$ heißt *-induktiver Limes in S. O. IYAHEN [1], induktiver Limes in J. KÖHN [1]. In diesen Arbeiten werden die im folgenden gebrauchten Eigenschaften topologischer Hüllen gezeigt.)

Ein *System* (U, U_i) in einem Vektorraum F ist eine Folge von Teilmengen U_i von F, $i \geq 0$, so daß $U_{i+1} + U_{i+1} \subset U_i$ für alle i gilt. Dabei setzen wir $U = U_0$. Wir sagen, ein System (U, U_i) besitzt eine bestimmte Eigenschaft, falls jedes U_i, $i \geq 0$, sie besitzt. So nehmen wir im weiteren immer an, daß die benutzten Systeme kreisförmig sind.

Ein topologischer Raum $F(\mathbf{T})$ heißt *linear tonneliert*, falls jedes abgeschlossene, absorbierende System (U, U_i) in $F(\mathbf{T})$ ein Nullumgebungssystem ist. $F(\mathbf{T})$ heißt *linear bornologisch*, wenn jedes System (U, U_i), das jede beschränkte Menge von $F(\mathbf{T})$ absorbiert, ein Nullumgebungssystem ist. Derartige Räume werden in S. O. IYAHEN [1] untersucht. Sie heißen dort ultratonneliert und ultrabornologisch.

Hinsichtlich der Theorie der topologischen Vektorräume folgen wir im übrigen G. KÖTHE [1]. Nur machen wir bei den Begriffen der lokalkonvexen Räume den Zusatz «lokalkonvex» zur Unterscheidung von den analogen Begriffen der linearen topologischen Räume. Weiterhin werden die betrachteten Topologien meistens nicht als notwendig Hausdorffsch vorausgesetzt.

1. TOPOLOGISCHE (R)-RÄUME

Ist E ein (R)-Raum, so heißt eine lineare Topologie $\mathbf{T}$ auf E eine *(R)-Topologie*, falls $\mathbf{T}$ eine Nullumgebungsbasis aus normalen Mengen besitzt. $E(\mathbf{T})$ nennen wir dann einen *topologischen (R)-Raum*. Ist $\mathbf{T}$ insbesondere eine lokalkonvexe Topologie, so heißt $E(\mathbf{T})$ ein *lokalkonvexer (R)-Raum*. Ein derartiger Raum $E(\mathbf{T})$ besitzt eine Nullumgebungsbasis aus normalen absolutkonvexen Mengen.

Der Abschluß einer normalen Menge in einem topologischen (R)-Raum $E(\mathbf{T})$ ist normal. Damit besitzt $\mathbf{T}$ eine Nullumgebungsbasis aus abgeschlossenen normalen Mengen. Die beschränkten Mengen in $E(\mathbf{T})$ besitzen ein Fundamentalsystem aus normalen Mengen. Jedes Intervall $[-|x|, |x|]$ mit $x \in E$ ist beschränkt.

Die Verbandsoperationen des (R)-Raumes E sind gleichmäßig stetig auf $E(\mathbf{T})$ bzw. $E(\mathbf{T}) \oplus E(\mathbf{T})$, falls $\mathbf{T}$ eine (R)-Topologie ist.

Ein topologischer (R)-Raum $E(\mathbf{T})$ ist Hausdorffsch genau dann, wenn sein positiver Kegel abgeschlossen ist. Die Ordnungsintervalle von E sind dann auch abgeschlossen. Gibt es auf dem (R)-Raum E eine Hausdorffsche (R)-Topologie, so ist E Archimedisch geordnet.

Die reellen Folgenräume $\mathbf{l}^p$, versehen mit der üblichen Metrik, sind Beispiele für Hausdorffsche (R)-Räume. Für p mit $0 < p < 1$ sind sie nicht lokalkonvex.

Es sollen nun Permanenzeigenschaften topologischer (R)-Räume untersucht werden. Da die absolutkonvexe Hülle einer normalen Menge normal ist, folgt sofort:

(1.1) *Ist $E(\mathbf{T})$ ein topologischer (R)-Raum, so ist der assoziierte lokalkonvexe Raum ein lokalkonvexer (R)-Raum.*

(1.2) *E sei ein (R)-Raum, und die $E_\gamma(\mathbf{T}_\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, seien topologische (R)-Räume. Weiterhin seien Verbandshomomorphismen A_γ mit $A_\gamma: E \to E_\gamma$ gegeben. Dann ist der topologische Kern $E(\mathbf{T})$ von $(E_\gamma(\mathbf{T}_\gamma), A_\gamma)$ ein topologischer (R)-Raum.*

Beweis. Wir wählen für jedes γ eine normale Nullumgebungsbasis $\{U_\gamma\}$ zu $\mathbf{T}_\gamma$. Dann sind die Mengen $A_\gamma^{-1}(U_\gamma)$ normal in E. Sie und ihre endlichen Durchschnitte bilden eine Nullumgebungsbasis aus normalen Mengen für $E(\mathbf{T})$.

(1.3) *Ein (R)-Teilraum F eines topologischen (R)-Raumes $E(\mathbf{T})$ ist in der induzierten Topologie ein topologischer (R)-Raum. Jedes Produkt topologischer (R)-Räume ist ein topologischer (R)-Raum.*

Die gröbste Topologie auf einem (R)-Raum E ist eine lineare (R)-Topologie. Wegen (1.2) gibt es auf E eine feinste (R)-Topologie.

Es soll eine ähnliche Aussage wie (1.2) für lineare topologische Hüllen gezeigt werden. Zuvor geben wir eine nützliche Beschreibung einer Nullumgebungsbasis einer Hülle topologischer Vektorräume.

(1.4) *Sei $F(\mathbf{T})$ die lineare topologische Hülle von $(F_\gamma(\mathbf{T}_\gamma), A_\gamma)$. Diejenigen $U \subset F$ bilden eine Nullumgebungsbasis für $\mathbf{T}$, zu denen ein System (U, U_i) existiert, so daß für alle γ die $(A_\gamma^{-1}(U), A_\gamma^{-1}(U_i))$ Nullumgebungssysteme von $\mathbf{T}_\gamma$ sind.*

Wir nennen einen Verbandshomomorphismus $A: E \to F$ der (R)-Räume E und F einen *starken* Verbandshomomorphismus, falls $A(E)$ ein Ideal in F ist. Dann gilt $A[-x, x] = [-Ax, Ax]$ für jedes positive $x \in E$, und A bildet jede normale Menge von E auf eine normale Menge von F ab.

(1.5) *E sei ein (R)-Raum. Ist $E(\mathbf{T})$ lineare topologische Hülle von $(E_\gamma(\mathbf{T}_\gamma), A_\gamma)$, wobei die $E_\gamma(\mathbf{T}_\gamma)$ topologische (R)-Räume und die A_γ starke Verbandshomomorphismen sind, so ist $\mathbf{T}$ eine lineare (R)-Topologie.*

Beweis. Zu zeigen ist, daß mit U auch der normale Kern $K(U)$ eine Nullumgebung von $\mathbf{T}$ ist. Dies folgt aus (1.4), wenn man $K(A_\gamma^{-1}(U)) = A_\gamma^{-1}(K(U))$ benutzt.

(1.6) *Die topologische direkte Summe* $\bigoplus_\gamma E_\gamma(\mathbf{T}_\gamma)$ *beliebig vieler topologischer (R)-Räume* $E_\gamma(\mathbf{T}_\gamma)$ *ist ein topologischer (R)-Raum. Ist* I *ein Ideal in dem topologischen (R)-Raum* $E(\mathbf{T})$, *dann ist die Quotiententopologie von* $E(\mathbf{T})/I$ *eine (R)-Topologie.*

(1.5) und (1.6) entsprechende Ergebnisse gelten für lokalkonvexe Hüllen lokalkonvexer (R)-Räume.

$F(\mathbf{T})$ sei ein vollständiger linearer Hausdorffscher Raum. Der (R)-Raum E mit positivem Kegel C sei ein dichter Teilraum von F, und $\mathbf{T}$ induziere auf E eine (R)-Topologie $\mathbf{T}'$. $\{U_a\}$ sei eine normale Nullumgebungsbasis in $E(\mathbf{T}')$. Die Abschlüsse $\overline{U}_a$ in $F(\mathbf{T})$ bilden dann eine Nullumgebungsbasis für $\mathbf{T}$. Der Abschluß $\overline{C}$ von C in $F(\mathbf{T})$ ist ein konvexer Kegel in F mit $\overline{C} \cap (-\overline{C}) = \{0\}$.

Zu jedem $x \in F$ existiert nun $\sup(x, 0) = x^+$ in F (bzgl. $\overline{C}$). Denn zu x gibt es ein System (x_a) in E mit $x_a \to x$. Da die Verbandsoperationen in $E(\mathbf{T}')$ nach Voraussetzung gleichmäßig stetig sind, ist (x_a^+) ein Cauchy-System in $E(\mathbf{T}')$. Also konvergiert (x_a^+) gegen ein Element $x^* \in F$. Es folgt leicht $x^* = x^+$.

$\overline{C}$ macht also F zu einem (R)-Raum. $\{\overline{U}_a\}$ bildet eine normale Nullumgebungsbasis für $\mathbf{T}$, $F(\mathbf{T})$ ist ein topologischer (R)-Raum. E ist ein (R)-Teilraum von F. Diese Ausdehnung der Verbandsstruktur von E auf F ist eindeutig bestimmt, wenn die Stetigkeit der Verbandsoperationen verlangt wird. In diesem Sinne gilt:

(1.7) *Die Vervollständigung eines Hausdorffschen (R)-Raumes* $E(\mathbf{T})$ *ist wieder ein Hausdorffscher (R)-Raum.*

Ist $E(\mathbf{T})$ ein topologischer (R)-Raum, so ist der assoziierte linear bornologische Raum $E(\mathbf{T}^\beta)$ (vgl. S. O. IYAHEN [1]) auch ein topologischer (R)-Raum. Dies folgt, weil die beschränkten Mengen in $E(\mathbf{T})$ ein Fundamentalsystem aus normalen Mengen besitzen. $E(\mathbf{T})$ ist genau dann linear bornologisch, wenn jede positive lokalbeschränkte Abbildung von $E(\mathbf{T})$ in einen beliebigen topologischen (R)-Raum $F(\mathbf{T}^*)$ stetig ist. Wie bei lokalkonvexen (R)-Räumen (vgl. I. KAWAI [1], 1.2) gilt:

(1.8) *I sei ein Ideal des (R)-Raumes E.*

a) *Ist* $E(\mathbf{T})$ *ein linear quasitonnelierter (R)-Raum, so ist* $I(\mathbf{T}')$ *linear quasitonneliert in der induzierten Topologie* $\mathbf{T}'$.

b) *Ist* $E(\mathbf{T})$ *ein linear bornologischer (R)-Raum, so ist* $I(\mathbf{T}')$ *linear bornologisch.*

Beweis. a) Sei (U, U_i) ein $\mathbf{T}'$-abgeschlossenes System in $I(\mathbf{T}')$, das jede $\mathbf{T}'$-beschränkte Menge absorbiert. Zu zeigen ist, daß U eine Nullumgebung in $I(\mathbf{T}')$ ist. Da $I(\mathbf{T}')$ ein topologischer (R)-Raum ist, können wir annehmen, daß (U, U_i) ein normales System ist.

a$_1$) Wir bilden in E die Mengen

$$\tilde{U}_i = \bigcup\left([-a, a]: 0 \leq a \in E \text{ mit } I \cap [-a, a] \subset U_i\right).$$

Die $\tilde{U}_i$ sind normal, und es gilt $\tilde{U}_{i+1} + \tilde{U}_{i+1} \subset \tilde{U}_i$. $(\tilde{U}, \tilde{U}_i)$ bildet also ein normales System in E.

a$_2$) Sei B eine normale beschränkte Menge in $E(\mathbf{T})$. Dann ist $B \cap I = \bigcup([-b, b] \cap I: 0 \leq b \in B)$ beschränkt in $I(\mathbf{T}')$. Jedes U_i absorbiert somit nach Voraussetzung $B \cap I$. Nach Definition von $\tilde{U}_i$ wird dann aber auch B von $\tilde{U}_i$ absorbiert.

a$_3$) Wegen a$_1$) und a$_2$) ist $\overline{\tilde{U}}$ eine Nullumgebung in $E(\mathbf{T})$ nach Voraussetzung. Wir betrachten $\overline{\tilde{U}} \cap I$. Sei $x \in \overline{\tilde{U}} \cap I$. Dann ist $|x| \in \overline{\tilde{U}} \cap I$, und es existiert $(x_\alpha) \subset \tilde{U}$ mit $x_\alpha \to |x|$. Wegen der Stetigkeit der Verbandsoperationen konvergiert auch $z_\alpha = \inf(|x_\alpha|, |x|)$ gegen $|x|$. Da $z_\alpha \in \tilde{U} \cap I$, gilt $|x| \in \overline{\tilde{U} \cap I}^{I}$, also $x \in \overline{\tilde{U} \cap I}^{I}$. Damit haben wir aber $\overline{\tilde{U}} \cap I \subset \overline{\tilde{U} \cap I}^{I} \subset U$, da U abgeschlossen in $I(\mathbf{T}')$ ist. Also ist U eine Nullumgebung in $I(\mathbf{T}')$.

b) Sei (U, U_i) ein System in I, das jede beschränkte Menge von $I(\mathbf{T}')$ absorbiert. Wir nehmen (U, U_i) wieder als normal an. Wie in a) bilden wir die Mengen $\tilde{U}_i$ in E. Nach a$_1$) und a$_2$) ist $(\tilde{U}, \tilde{U}_i)$ ein normales System in $E(\mathbf{T})$, das jede beschränkte Menge absorbiert. Also ist $\tilde{U}$ eine Nullumgebung in $E(\mathbf{T})$. Wegen $\tilde{U} \cap I = U$ ist U Nullumgebung in $I(\mathbf{T}')$.

Für linear tonnelierte (R)-Räume wird (1.8) unter stärkeren Voraussetzungen im 3. Abschnitt gezeigt.

2. DIE LINEARE ORDNUNGSTOPOLOGIE

Wir hatten in (1.2) bereits bemerkt, daß es auf jedem (R)-Raum E eine feinste lineare (R)-Topologie gibt. Wir bezeichnen sie mit $\mathbf{T}^0$.

(2.1) *E sei ein (R)-Raum. Die Menge derjenigen Teilmengen U von E, die ein normales, absorbierendes System (U, U_i) besitzen, bil-*

det eine Nullumgebungsbasis für die feinste lineare (R)-Topologie $\mathbf{T}^o$ *auf* E.

Da eine Menge M in E genau dann jedes Ordnungsintervall absorbiert, wenn der normale Kern $K(M)$ absorbierend ist, ergibt sich:

(2.2) *Für jeden (R)-Raum* E *ist* $\mathbf{T}^o$ *die feinste lineare Topologie, unter der jedes Ordnungsintervall beschränkt ist.*

Für geordnete Vektorräume haben I. NAMIOKA [1] und H. SCHAEFER [1], [2] eine lokalkonvexe Topologie untersucht, die allein durch die Ordnungsstruktur des Raumes bestimmt ist. Diese Ordnungstopologie (H. SCHAEFER) ist die feinste lokalkonvexe Topologie, unter der die Ordnungsintervalle beschränkt sind. Für (R)-Räume ist sie auch die feinste lokalkonvexe (**R**)-Topologie. Sie soll hier *lokalkonvexe Ordnungstopologie* heißen und mit $\mathbf{T}^{LO}$ bezeichnet werden. $\mathbf{T}^o$ nennen wir die *lineare Ordnungstopologie*. $\mathbf{T}^o$ hat ähnliche Eigenschaften wie $\mathbf{T}^{LO}$, wie im folgenden gezeigt wird.

(2.3) *Die zu* $\mathbf{T}^o$ *assoziierte lokalkonvexe Topologie auf* E *ist die lokalkonvexe Ordnungstopologie* $\mathbf{T}^{LO}$.

Wegen $E(\mathbf{T}^{LO})' = E^b$ folgt aus (2.3) $E(\mathbf{T}^o)' = E^b$. Aus (2.1) folgt, daß $E(\mathbf{T}^o)$ linear bornologisch ist.

Die Norm jedes Banach-Verbandes erzeugt dessen lokalkonvexe Ordnungstopologie. Entsprechend gilt (vgl. I. NAMIOKA [1], 5.4):

(2.4) *Jeder vollständige metrisierbare (R)-Raum* $E(\mathbf{T})$ *trägt die lineare Ordnungstopologie.*

Beweis. $\{U_i\}$ sei eine abzählbare normale Nullumgebungsbasis von $\mathbf{T}$ mit $U_{i+1} + U_{i+1} \subset U_i$. V sei eine normale, absorbierende Teilmenge von E. Wir nehmen an, V ist keine $\mathbf{T}$-Nullumgebung. Dann existiert eine Folge (x_i) mit $x_i \geq 0$ sowie $x_i \in U_i$, aber $x_i \notin iV$. Die Folge (y_k) mit $y_k = \sum_{i=1}^{k} x_i$ ist eine Cauchy-Folge, sie konvergiert also gegen ein Element $z \in E$. Da $y_k \geq 0$ und der positive Kegel in $E(\mathbf{T})$ abgeschlossen ist, gilt $0 \leq y_k \leq z$, also $0 \leq x_i \leq z$ für alle i. Die Folge (x_i) ist damit ordnungsbeschränkt, und es gilt $(x_i) \subset nV$ für ein natürliches n, insbesondere $x_n \in nV$. Das widerspricht der Wahl von x_n. Wir haben gezeigt, daß jede normale, absorbierende Menge in E eine $\mathbf{T}$-Nullumgebung ist. Wegen (2.1) gilt $\mathbf{T} = \mathbf{T}^o$.

Beispiele 2.1. Jeder Banach-Verband trägt die lineare Ordnungstopologie $\mathbf{T}^o$, und wir haben $\mathbf{T}^o = \mathbf{T}^{LO}$. Das Produkt ω aller reellen

Folgen hat $\mathbf{T}^o = \mathbf{T}^{LO}$ als Topologie. Die übliche Metrik von $\mathbf{l}^p$ mit $0 < p \leq \infty$ erzeugt $\mathbf{T}^o$.

(2.5) *$E(\mathbf{T})$ sei ein topologischer (R)-Raum. Dann sind äquivalent:*
(i) *Es gilt $\mathbf{T} = \mathbf{T}^o$.*
(ii) *Jede ordnungsbeschränkte lineare Abbildung $A: E(\mathbf{T}) \to F(\mathbf{T}_1)$ in einen topologischen (R)-Raum $F(\mathbf{T}_1)$ ist stetig.*
(iii) *Jede ordnungsbeschränkte lineare Abbildung $A: E(\mathbf{T}) \to F(\mathbf{T}_1)$ in einen vollständigen metrisierbaren (R)-Raum $F(\mathbf{T}_1)$ ist stetig.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): V sei eine Nullumgebung in $F(\mathbf{T}_1)$ mit einem kreisförmigen Nullumgebungssystem (V, V_i). Das System $(A^{-1}(V), A^{-1}(V_i))$ ist kreisförmig in E und absorbiert dort jedes Intervall $[-x, x]$, da die V_i die Menge $A[-x, x]$ absorbieren. Damit ist $A^{-1}(V)$ eine Nullumgebung in $E(\mathbf{T}^o)$, A ist also stetig.

ii) $\Rightarrow$ (iii) ist klar. (iii) $\Rightarrow$ (i): Die Behauptung folgt aus (2.1), wenn für jedes normale, absorbierende (U, U_i) in E die Menge U eine $\mathbf{T}$-Nullumgebung ist. Sei (U, U_i) gegeben und $N = \bigcap_i U_i$. N ist ein Ideal in E. Die Familie $\{U_i\}$ definiert eine lineare (R)-Topologie $\mathbf{T}'$ auf E mit abzählbarer Nullumgebungsbasis. $E(\mathbf{T}')/N$ ist also ein metrisierbarer (R)-Raum. $\widetilde{E(\mathbf{T}')/N}$ sei seine Vervollständigung. $\widetilde{E(\mathbf{T}')/N}$ ist nach (1.7) auch ein topologischer (R)-Raum. $\{\tilde{U}_i\}$ sei diejenige Nullumgebungsbasis von $\widetilde{E(\mathbf{T}')/N}$, die von $\{U_i\}$ induziert wird. K sei die kanonische Abbildung $K: E \to \widetilde{E(\mathbf{T}')/N}$. K ist positiv, also wegen (iii) stetig. Damit ist $K^{-1}(\tilde{U}_1) = U_1 + N$ eine $\mathbf{T}$-Nullumgebung, also auch $U \supset U_1 + U_1 \supset U_1 + N$.

(2.5) bleibt richtig, wenn statt ordnungsbeschränkter Abbildungen positive betrachtet werden. Der Satz gilt in gleicher Form für $\mathbf{T}^{LO}$, wenn $\mathbf{T}$ und $\mathbf{T}_1$ als lokalkonvex vorausgesetzt werden.

(2.6) *Die Abbildungen $A_\gamma: E_\gamma \to E$ seien starke Verbandshomomorphismen zwischen den (R)-Räumen E_γ und E, so daß E von $\bigcup_\gamma A_\gamma(E_\gamma)$ erzeugt wird. Dann trägt die topologische Hülle $E(\mathbf{T})$ von $(E_\gamma(\mathbf{T}^o_\gamma), A_\gamma)$ die lineare Ordnungstopologie $\mathbf{T}^o$ von E.*

Beweis. Nach (1.5) ist $E(\mathbf{T})$ ein topologischer (R)-Raum, also $\mathbf{T} \subset \mathbf{T}^o$. Die Verbandshomomorphismen A_γ sind ordnungsbeschränkt, also nach (2.5) für $E_\gamma(\mathbf{T}^o_\gamma)$ und $E(\mathbf{T}^o)$ stetig. Damit gilt $\mathbf{T} = \mathbf{T}^o$.

(2.7) *Die topologische direkte Summe $\bigoplus_\gamma E_\gamma(\mathbf{T}^o_\gamma)$ beliebig vieler (R)-Räume $E_\gamma(\mathbf{T}^o_\gamma)$ trägt die lineare Ordnungstopologie.*

Ist I ein Ideal in E, dann ist die Quotiententopologie von $E(\mathbf{T}^o)/I$ die lineare Ordnungstopologie des (R)-Raumes E/I.

(2.6) und (2.7) gelten entsprechend im lokalkonvexen Fall für die lokalkonvexe Ordnungstopologie.

Beispiele 2.2. Die lokalkonvexe Summentopologie auf φ_d, dem Raum aller finiten Vektoren mit d reellen Koordinaten, ist dessen feinste lokalkonvexe Topologie. Sie ist die lokalkonvexe Ordnungstopologie $\mathbf{T}^{LO}$ von φ_d. Die lineare Summentopologie ist entsprechend die feinste lineare Topologie auf φ_d. Nach (2.7) stimmt sie mit der linearen Ordnungstopologie $\mathbf{T}^o$ überein.

d ist abzählbar: Da die topologische direkte Summe abzählbar vieler lokalkonvexer Räume mit der lokalkonvexen direkten Summe übereinstimmt, gilt $\mathbf{T}^o = \mathbf{T}^{LO}$ auf dem Raum φ.

d ist überabzählbar: In diesem Fall sind die feinste lokalkonvexe und die feinste lineare Topologie auf φ_d verschieden (vgl. J. KÖHN [1], Beispiel 1). Die lineare Ordnungstopologie $\mathbf{T}^o$ ist also echt feiner als die lokalkonvexe $\mathbf{T}^{LO}$.

Das abzählbare Produkt ω trägt wegen (2.4) die lineare Ordnungstopologie. Auf dem Ideal $\varphi \subset \omega$ wird von ω eine Topologie induziert, die echt gröber ist als die lineare Summentopologie und damit die lineare Ordnungstopologie von φ.

Eine direkte Zerlegung $E = E_1 \oplus E_2$ eines (R)-Raumes E heißt *geordnet*, falls für jedes positive Element aus E die Komponenten in E_1 und E_2 auch positiv sind.

(2.8) *Der (R)-Raum E sei mit $E = E_1 \oplus E_2$ geordnet zerlegt. Dann induziert die lineare Ordnungstopologie $\mathbf{T}^o$ von E auf E_1 und E_2 deren lineare Ordnungstopologie.*

Beweis. Ist die angegebene Zerlegung möglich, so sind E_1 und E_2 Ideale in E. Ist nun (U, U_i) ein normales, absorbierendes System in E_1, so bildet $(U + E_2, U_i + E_2)$ ein normales, absorbierendes System in E. $U + E_2$ ist also eine $\mathbf{T}^o$-Nullumgebung in E und U damit eine Nullumgebung der von $\mathbf{T}^o$ auf E_1 induzierten Topologie $\mathbf{T}_1$. Damit haben wir für die Ordnungstopologie $\mathbf{T}_1^o$ von E_1 wegen (2.1) $\mathbf{T}_1^o \subset \mathbf{T}_1$. Da aber $\mathbf{T}_1$ eine (R)-Topologie ist, muß $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_1^o$ gelten.

Wegen des Satzes von Riesz folgt aus (2.8), daß die Ordnungstopologie eines ordnungsvollständigen (R)-Raumes E auf jedem Band in E dessen Ordnungstopologie induziert. Diese Aussage läßt sich noch verallgemeinern. Ein (R)-Raum E heißt *abzählbar ordnungsvollständig*, wenn jede nach oben beschränkte Folge in E ein Supremum besitzt. Weiter heißt ein Ideal B eines (R)-Raumes E *σ-Band*, falls B vorhandene Suprema (in E) abzählbarer Mengen aus B enthält.

(2.9) *Die lineare Ordnungstopologie* $\mathbf{T}^0$ *eines abzählbar ordnungsvollständigen (R)-Raumes* E *induziert auf jedem* σ*-Band* B *in* E *dessen Ordnungstopologie.*

Beweis. Sei (U, U_i) ein normales, absorbierendes System in B. Wie im Beweis von (1.8) bilden wir zu (U, U_i) das System $(\widetilde{U}, \widetilde{U}_i)$ in E. $\widetilde{U}_i$ absorbiert jedes Intervall in E. Denn sonst hätten wir $[-x, x] \not\subset n\widetilde{U}_i$ für ein $x \in E$ und alle $n \in \mathbf{N}$, also auch $B \cap [-x, x] \not\subset nU_i$. Dann gibt es eine positive Folge (x_n) in $B \cap [-x, x]$ mit $x_n \notin nU_i$. In B existiert nach Voraussetzung $\sup_n x_n$. Da $\sup_n x_n \in kU_i$ für ein $k \in \mathbf{N}$, gilt auch $x_k \in kU_i$ im Widerspruch zur Wahl von x_k. $(\widetilde{U}, \widetilde{U}_i)$ absorbiert also jedes Intervall in E, und $\widetilde{U}$ ist somit eine $\mathbf{T}^0$-Nullumgebung. Dann ist aber $U = \widetilde{U} \cap B$ Nullumgebung der von $\mathbf{T}^0$ auf B induzierten Topologie.

(2.8) und (2.9) gelten entsprechend für die lokalkonvexe Ordnungstopologie.

Das topologische Produkt $\prod_1^k E_n(\mathbf{T}_n^0)$ endlich vieler (R)-Räume $E_n(\mathbf{T}_n^0)$ trägt wegen (2.7) die Ordnungstopologie $\mathbf{T}^0$ des (R)-Raumes $\prod_1^k E_n$. Allgemeiner gilt für Produkte mit d Faktoren (für endliches oder unendliches d bezeichnet ω_d den Raum aller Vektoren mit d reellen Koordinaten):

(2.10) *Es sind äquivalent:*

(i) *Jedes Produkt* $\prod_\gamma E_\gamma(\mathbf{T}_\gamma^0)$ *von* d *Hausdorffschen (R)-Räumen* $E_\gamma(\mathbf{T}_\gamma^0)$ *trägt die lineare Ordnungstopologie von* $\prod_\gamma E_\gamma$.

(ii) *Die Produkttopologie von* ω_d *ist die lineare Ordnungstopologie* $\mathbf{T}^0$ *von* ω_d.

(iii) *Die Produkttopologie von* ω_d *ist linear bornologisch.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) ist klar. (ii) $\Rightarrow$ (i) zeigt man entsprechend wie (5), (iii) $\Rightarrow$ (iv) in D. Keim [1], indem man die dortigen Überlegungen für (R)-Halbnormen auf normale, absorbierende Systeme überträgt. (ii) $\Rightarrow$ (iii) ist klar. (iii) $\Rightarrow$ (ii): Die Produkttopologie $\mathbf{T}$ von ω_d ist lokalkonvex bornologisch wegen (iii). Da ω_d $\mathbf{T}$-vollständig ist, ist $\mathbf{T}$

die lokalkonvexe Ordnungstopologie wegen H. SCHAEFER [1], V. 5.5, (iii). $\mathbf{T}^{\circ}$ ist dann nach dem noch zu zeigenden Satz (2.14) die zu $\mathbf{T}$ assoziierte linear bornologische Topologie. Wegen (iii) gilt $\mathbf{T}^{\circ} = \mathbf{T}$.

Da ω linear bornologisch ist, folgt aus (2.10):

(2.11) *Das Produkt* $\prod_{1}^{\infty} E_n(\mathbf{T}_n^{\circ})$ *trägt für Hausdorffsche (R)-Räume* $E_n(\mathbf{T}_n^{\circ})$ *die lineare Ordnungstopologie von* $\prod_{1}^{\infty} E_n$.

Es ist unbekannt, ob ω_d für jede Kardinalzahl d linear bornologisch ist. Genau dann ist ω_d linear bornologisch, wenn jedes Produkt von d linear bornologischen Räumen linear bornologisch ist. Weiterhin ist es eine offene Frage, ob ω_d genau dann linear bornologisch ist, wenn es lokalkonvex bornologisch ist, bzw. ob ω_d genau dann die lineare Ordnungstopologie trägt, wenn es die lokalkonvexe Ordnungstopologie trägt.

H. SCHAEFER [1], [2] hat gezeigt, daß sich jeder Hausdorffsche (R)-Raum $E(\mathbf{T}^{LO})$ als lokalkonvexe Hülle normierter Räume, die von den Intervallen von E erzeugt werden, darstellen läßt. Eine ähnliche Beschreibung ist für die lineare Ordnungstopologie möglich.

(2.12) *E sei ein (R)-Raum mit einer Ordnungseinheit e. Dann ist die lineare Ordnungstopologie* $\mathbf{T}^{\circ}$ *auf E eine lokalkonvexe Topologie, die von einer Halbnorm q_e erzeugt wird.*
Genau dann ist q_e eine Norm, wenn E Archimedisch geordnet ist.

Beweis. Die Halbnorm $q_e(x) = \inf \{|\lambda| : x \in \lambda\,[-e, e]\}$ definiert eine lokalkonvexe Topologie $\mathbf{T}$ auf E, für die $\{U_n\}$ mit $U_n = \frac{1}{n}\,[-e, e]$ eine Nullumgebungsbasis bildet. Jede Topologie, in der die Ordnungsintervalle beschränkt sind, ist gröber als $\mathbf{T}$, insbesondere also $\mathbf{T}^{\circ}$. Da aber $\mathbf{T}$ eine (R)-Topologie auf E ist, gilt $\mathbf{T} = \mathbf{T}^{\circ}$. Die letzte Behauptung folgt aus der Definition von q_e.

E sei ein (R)-Raum und a ein Element aus dem positiven Kegel C von E. Wir setzen $E_a = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} n\,[-a, a]$. E_a ist ein Ideal in E, und es gilt $E = \bigcup_{a \in C} E_a$. In E_a ist a eine Ordnungseinheit, E_a versehen mit der linearen Ordnungstopologie ist also nach (2.12) ein halbnormierter Raum. Wir schreiben $E_a(q_a)$ für ihn. Aus (2.6) folgt nun:

(2.13) *$E(\mathbf{T}^{\mathrm{o}})$ ist die topologische Hülle der lokalkonvexen (R)-Räume $E_a(q_a)$, $a \in C$, unter den Einbettungen I_a: $E_a \to E$.*

Da die lokalkonvexe Hülle von lokalkonvexen Räumen der zur topologischen Hülle assoziierte lokalkonvexe Raum ist, folgt aus (2.13), daß $E(\mathbf{T}^{\mathrm{LO}})$ die lokalkonvexe Hülle der $E_a(q_a)$ ist (H. SCHAEFER).

$E(\mathbf{T}^{\mathrm{o}})$ und $E(\mathbf{T}^{\mathrm{LO}})$ sind linear bzw. lokalkonvex bornologische (R)-Räume. Die Vermutung, daß $E(\mathbf{T}^{\mathrm{o}})$ der zu $E(\mathbf{T}^{\mathrm{LO}})$ assoziierte linear bornologische Raum ist, ist im allgemeinen falsch, wie das folgende Beispiel zeigt. Die Menge der beschränkten Mengen kann sich also beim Übergang von $\mathbf{T}^{\mathrm{LO}}$ zu $\mathbf{T}^{\mathrm{o}}$ verkleinern.

Beispiel 2.3. $\mathbf{l}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{T}_{\frac{1}{2}})$ sei der (R)-Raum $\mathbf{l}^{\frac{1}{2}}$, versehen mit der üblichen Metrik. $\mathbf{l}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{T}_1)$ sei $\mathbf{l}^{\frac{1}{2}} \subset \mathbf{l}^1$ mit der von der $\mathbf{l}^1$-Norm induzierten Topologie. $\mathbf{l}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{T}_{\frac{1}{2}})$ trägt nach (2.4) die lineare Ordnungstopologie. $\mathbf{l}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{T}_1)$ ist der zu $\mathbf{l}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{T}_{\frac{1}{2}})$ assoziierte lokalkonvexe Raum (W. ROBERTSON [1]). Nach (2.3) haben wir $\mathbf{l}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{T}_1) = \mathbf{l}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{T}^{\mathrm{LO}})$. Aber $\mathbf{l}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{T}_1)$ ist als metrisierbarer Raum bereits linear bornologisch.

(2.14) *Ist $E(\mathbf{T}^{\mathrm{LO}})$ Hausdorffsch, und besitzen die beschränkten Mengen ein Fundamentalsystem $\mathbf{B}$ in sich vollständiger, normaler, absolutkonvexer Mengen, so ist $E(\mathbf{T}^{\mathrm{o}})$ der zu $E(\mathbf{T}^{\mathrm{LO}})$ assoziierte linear bornologische Raum.*
Dies gilt insbesondere, wenn $E(\mathbf{T}^{\mathrm{LO}})$ Hausdorffsch und folgenvollständig ist.

Beweis. Jedes $E_B = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} nB$, $B \in \mathbf{B}$, ist ein Ideal in E. Die $E_B(\mathbf{T}_B)$ mit B als Einheitskugel sind Banach-Räume. Der lokalkonvex bornologische Raum $E(\mathbf{T}^{\mathrm{LO}})$ ist lokalkonvexe Hülle der $E_B(\mathbf{T}_B)$, der assoziierte linear bornologische Raum $E((\mathbf{T}^{\mathrm{LO}})^\beta)$ dann topologische Hülle der $E_B(\mathbf{T}_B)$. Die $E_B(\mathbf{T}_B)$ tragen nach (2.4) die lineare Ordnungstopologie von E_B. Damit gilt $(\mathbf{T}^{\mathrm{LO}})^\beta = \mathbf{T}^{\mathrm{o}}$ wegen (2.6).

(2.15) *Es sei $E(\mathbf{T}^{\mathrm{LO}})$ ein folgenvollständiger Hausdorffscher (R)-Raum. Dann induziert $\mathbf{T}^{\mathrm{LO}}$(bzw. $\mathbf{T}^{\mathrm{o}}$) auf jedem $\mathbf{T}^{\mathrm{LO}}$-abgeschlossenen Ideal dessen lokalkonvexe (bzw. lineare) Ordnungstopologie.*

Beweis. Sei $I(\widehat{\mathbf{T}^{\mathrm{LO}}})$ ein abgeschlossenes Ideal mit der von $\mathbf{T}^{\mathrm{LO}}$ induzierten Topologie. $I(\widehat{\mathbf{T}^{\mathrm{LO}}})$ ist folgenvollständig und nach (1.8) lokalkonvex bornologisch. Nach H. SCHAEFER [1], *V.* 5.5 muß damit $\widehat{\mathbf{T}^{\mathrm{L,O}}}$ die zu I gehörende lokalkonvexe Ordnungstopologie sein.

$I(\widehat{\mathbf{T}^{\mathrm{o}}})$ ist nach (1.8) ein linear bornologischer (R)-Raum mit $\widehat{\mathbf{T}^{\mathrm{o}}} \supset \widehat{\mathbf{T}^{\mathrm{L,O}}}$, also gilt $\mathbf{T}^{\mathrm{o}}_{\mathrm{I}} \supset \widehat{\mathbf{T}^{\mathrm{o}}} \supset (\widehat{\mathbf{T}^{\mathrm{L,O}}})^{\beta} \supset \widehat{\mathbf{T}^{\mathrm{L,O}}}$, wenn $\mathbf{T}^{\mathrm{o}}_{\mathrm{I}}$ die Ordnungstopologie von I bezeichnet. Da $I(\widehat{\mathbf{T}^{\mathrm{L,O}}})$ folgenvollständig ist, haben wir $\mathbf{T}^{\mathrm{o}}_{\mathrm{I}} = \widehat{\mathbf{T}^{\mathrm{o}}} = (\widehat{\mathbf{T}^{\mathrm{L,O}}})^{\beta}$ wegen (2.14).

(2.16) a) *Jeder folgenvollständige Hausdorffsche (R)-Raum* $E(\mathbf{T}^{\mathrm{o}})$ *ist linear tonneliert.*
b) *Ist* E *ein abzählbar ordnungsvollständiger (R)-Raum, so ist* $E(\mathbf{T}^{\mathrm{o}})$ *linear tonneliert.*

Beweis. a) Die Ordnungsintervalle in $E(\mathbf{T}^{\mathrm{o}})$ sind abgeschlossen, die Räume $E_a(q_a)$, $a \in C$, sind also Banach-Räume. $E(\mathbf{T}^{\mathrm{o}})$ ist als topologische Hülle der linear tonnelierten Räume $E_a(q_a)$ wieder linear tonneliert. b) Da E abzählbar ordnungsvollständig ist, ist E Archimedisch geordnet, die $E_a(q_a)$ sind also normierte Räume. Sie sind sogar Banach-Räume wegen H. SCHAEFER [1], *V.* 6.2.

Eine Teilmenge M von C heißt *erschöpfend* in einem (R)-Raum E, falls für jedes $x \in E$ ein $n \in \mathbf{N}$ sowie ein $e \in M$ existieren mit $x \in n[-e, e]$. Es ist klar, daß für ein derartiges M der Raum $E(\mathbf{T}^{\mathrm{o}})$ bereits topologische Hülle aller $E_a(q_a)$ mit $a \in M$ ist.

(2.17) *Besitzt der (R)-Raum* E *eine abzählbare erschöpfende Menge* M, *so ist* $E(\mathbf{T}^{\mathrm{o}})$ *ein lokalkonvexer (R)-Raum. Es gilt also* $\mathbf{T}^{\mathrm{o}} = \mathbf{T}^{\mathrm{L,O}}$.

Beweis. Dies folgt aus (2.13), weil die topologische Hülle abzählbar vieler lokalkonvexer Räume wieder lokalkonvex ist.

(2.18) E *besitze eine abzählbare erschöpfende Menge* $\{e_n\}$ *und* $E(\mathbf{T}^{\mathrm{o}})$ *sei Hausdorffsch. Dann ist in* $E(\mathbf{T}^{\mathrm{o}})$ *jede beschränkte Menge ordnungsbeschränkt.*

Beweis. $E(\mathbf{T}^{\mathrm{o}})$ ist lokalkonvexe Hülle der Folge $E_{en}(q_{en})$ normierter Räume. Nach G. KÖTHE [1], 29.5. (4) liegt jede beschränkte Menge B von $E(\mathbf{T}^{\mathrm{o}})$ in der abgeschlossenen, absolutkonvexen Hülle endlich vieler Intervalle $[-\lambda_n e_n, \lambda_n e_n]$, $\lambda_n \geq 0$. Ist s das Supremum dieser endlich vielen $\lambda_n e_n$, so gilt $B \subset [-s, s]$, da $[-s, s]$ absolutkonvex und abgeschlossen in $E(\mathbf{T}^{\mathrm{o}})$ ist.

3. LINEAR ORDNUNGSTONNELIERTE (R)-RÄUME

Beispiel 3.1. Sei D der (R)-Raum aller auf dem Intervall [0,1] stetigen reellen Funktionen, die in jedem Punkt von rechts differenzierbar sind. Hinsichtlich der starken Topologie $\mathbf{T}_b(D^b)$ auf D gilt $D(\mathbf{T}_b)' \neq D^b$ (vgl. G. T. ROBERTS [1], Beispiel 7). Die lokalkonvexe Ordnungstopologie $\mathbf{T}_k(D^b)$ auf D ist also nicht lokalkonvex tonneliert. Damit kann wegen (2.3) auch die lineare Ordnungstopologie nicht linear tonneliert sein.

Für einen (R)-Raum E ist also im allgemeinen in $E(\mathbf{T}^0)$ nicht jedes abgeschlossene, absorbierende System (U, U_i) ein Nullumgebungssystem. Verlangen wir aber von (U, U_i), daß es zusätzlich noch normal ist, so bildet (U, U_i) wegen (2.1) ein Nullumgebungssystem für $\mathbf{T}^0$.

Wir nennen einen topologischen (R)-Raum $E(\mathbf{T})$ *linear ordnungstonneliert,* wenn jede Menge U, zu der ein abgeschlossenes, absorbierendes normales System (U, U_i) existiert, eine Nullumgebung von $\mathbf{T}$ ist.

(3.1) *Für einen topologischen (R)-Raum* $E(\mathbf{T})$ *sind äquivalent:*

(i) $E(\mathbf{T})$ *ist linear ordnungstonneliert.*

(ii) *Jedes* U *mit einem abgeschlossenen System* (U, U_i), *das jedes Ordnungsintervall von* E *absorbiert, ist Nullumgebung.*

(iii) *Jede lineare (R)-Topologie auf* E, *die eine Nullumgebungsbasis aus* $\mathbf{T}$*-abgeschlossenen Mengen besitzt, ist gröber als* $\mathbf{T}$.

Ist $E(\mathbf{T})$ ein lokalkonvexer (R)-Raum, so heiße $E(\mathbf{T})$ *lokalkonvex ordnungstonneliert,* falls jede normale Tonne in $E(\mathbf{T})$ eine Nullumgebung ist. Derartige Räume sind von Y.-C. WONG [1] untersucht worden. Der zu einem linear ordnungstonnelierten (R)-Raum assoziierte lokalkonvexe Raum ist lokalkonvex ordnungstonneliert, jedoch braucht ein lokalkonvex ordnungstonnelierter (R)-Raum nicht linear ordnungstonneliert zu sein, wie später ein Beispiel zeigen wird.

Für jeden (R)-Raum E ist $E(\mathbf{T}^0)$ linear ordnungstonneliert, $E(\mathbf{T}^{LO})$ lokalkonvex ordnungstonneliert. Jeder linear tonnelierte (R)-Raum ist linear ordnungstonneliert, die Umkehrung gilt nicht, wie das einleitende Beispiel zeigt.

Der Dualraum eines lokalkonvex ordnungstonnelierten, also auch eines linear ordnungstonnelierten (R)-Raumes $E(\mathbf{T})$ ist ein Band in E^b (Y.-C. WONG [1], 3.1).

Beispiel 3.2. Jeder linear (lokalkonvex) ordnungstonnelierte (R)-Raum ist linear (lokalkonvex) quasitonneliert. Y.-C. WONG [1], Beispiel 2.1 gibt einen lokalkonvex quasitonnelierten (R)-Raum an, der nicht ordnungstonneliert ist. Das folgende Beispiel ist einfacher:

$\varphi \subset \omega$ trage die vom Produkt ω induzierte Topologie $\mathbf{T}_\omega$. Der metrisierbare Raum $\varphi(\mathbf{T}_\omega)$ ist lokalkonvex quasitonneliert, aber nicht ordnungstonneliert, denn $\varphi(\mathbf{T}_\omega)' = \varphi$ ist kein Band in $\varphi^b = \omega$.

$\varphi(\mathbf{T}_\omega)$ ist auch linear quasitonneliert, jedoch nicht linear ordnungstonneliert.

$\varphi(\mathbf{T}_\omega)$ ist ein linear bornologischer Raum, der nicht linear ordnungstonneliert ist.

$\varphi(\mathbf{T}_\omega)$ zeigt auch, daß ein Ideal eines ordnungstonnelierten (R)-Raumes in der induzierten Topologie nicht ordnungstonneliert zu sein braucht.

(3.2) *Der (R)-Raum E besitze eine geordnete Zerlegung $E = E_1 \oplus E_2$. Ist $E(\mathbf{T})$ linear ordnungstonneliert, so sind E_1 und E_2 linear ordnungstonneliert in der von $\mathbf{T}$ induzierten Topologie.*

Beweis. Die von $\mathbf{T}$ auf E_1 induzierte Topologie $\mathbf{T}_1$ ist eine lineare (R)-Topologie. Ist (U, U_i) ein abgeschlossenes, normales absorbierendes System in $E_1(\mathbf{T}_1)$, so ist $(\overline{U + E_2}, \overline{U_i + E_2})$ ein gleichartiges System in $E(\mathbf{T})$. $\overline{U + E_2}$ ist also nach Voraussetzung eine $\mathbf{T}$-Nullumgebung und $\overline{U + E_2} \cap E_1$ eine $\mathbf{T}_1$-Nullumgebung. Daß $\overline{U + E_2} \cap E_1 \subset U$ gilt, überlegt man sich ähnlich wie im Teil a_3) des Beweises von (1.8).

Wie (2.9) läßt sich der folgende Satz zeigen, indem man wieder a_3) aus dem Beweis von (1.8) zu Hilfe nimmt.

(3.3) *E sei ein abzählbar ordnungsvollständiger (R)-Raum. Ist $E(\mathbf{T})$ linear ordnungstonneliert, so ist jedes σ-Band in E linear ordnungstonneliert in der von $\mathbf{T}$ induzierten Topologie.*

(3.4) *Die Abbildungen A_γ: $E_\gamma \to E$ seien starke Verbandshomomorphismen zwischen den (R)-Räumen E_γ und E. Sind dann die $E_\gamma(\mathbf{T}_\gamma)$ linear ordnungstonnelierte (R)-Räume und ist $E(\mathbf{T})$ die topologische Hülle von $(E_\gamma(\mathbf{T}_\gamma), A_\gamma)$, so ist $E(\mathbf{T})$ ein linear ordnungstonnelierter (R)-Raum.*

Beweis. Nach (1.5) ist $E(\mathbf{T})$ ein topologischer (R)-Raum. Die Menge U besitze ein $\mathbf{T}$-abgeschlossenes, absorbierendes normales System (U, U_i) in $E(\mathbf{T})$. Dann ist für jedes γ das System $(A_\gamma^{-1}(U)$,

$A_\gamma^{-1}(U_i))$ abgeschlossen, absorbierend und normal in $E_\gamma(\mathbf{T}_\gamma)$, also ein $\mathbf{T}_\gamma$-Nullumgebungssystem nach Voraussetzung. Wegen (1.4) ist somit U eine Nullumgebung in $E(\mathbf{T})$.

(3.5) *Die topologische direkte Summe* $\bigoplus_\gamma E_\gamma(\mathbf{T}_\gamma)$ *von linear ordnungstonnelierten (R)-Räumen* $E_\gamma(\mathbf{T}_\gamma)$ *ist linear ordnungstonneliert.* $E(\mathbf{T})$ *sei linear ordnungstonneliert. Ist* I *ein Ideal in* E, *so ist der Quotientenraum* $E(\mathbf{T})/I$ *linear ordnungstonneliert.*

(3.6) *Das topologische Produkt* $\prod_\gamma E_\gamma(\mathbf{T}_\gamma)$ *beliebig vieler linear ordnungstonnelierter (R)-Räume* $E_\gamma(\mathbf{T}_\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, *ist linear ordnungstonneliert.*

Beweis. Für endlich viele Faktoren $E_\gamma(\mathbf{T}_\gamma)$ folgt die Behauptung aus (3.5). Wir nehmen im folgenden Γ als unendliche Menge an.

Nach (1.3) ist $\prod_\gamma E_\gamma(\mathbf{T}_\gamma)$ ein topologischer (R)-Raum. Sei (U, U_i) ein abgeschlossenes, absorbierendes normales System in $\prod_\gamma E_\gamma(\mathbf{T}_\gamma)$. Wir zeigen, daß U eine Nullumgebung ist. Zunächst überlegt man sich analog zum ersten Teil des Beweises von (6) in D. Keim [1], daß $U_1 \supset \bigoplus_{\gamma\in\Gamma|\Gamma_0} E_\gamma$ für eine endliche Teilmenge Γ_0 von Γ gilt. Wegen der Abgeschlossenheit von U_1 haben wir auch $U_1 \supset \prod_{\gamma\in\Gamma|\Gamma_0} E_\gamma$.

Das System $(U \cap \prod_{\gamma\in\Gamma_0} E_\gamma, U_i \cap \prod_{\gamma\in\Gamma_0} E_\gamma)$ ist abgeschlossen, absorbierend und normal in $\prod_{\gamma\in\Gamma_0} E_\gamma(\mathbf{T}_\gamma)$. Da dieser Raum linear ordnungstonneliert ist, ist $U_1 \cap \prod_{\gamma\in\Gamma_0} E_\gamma$ eine Nullumgebung in ihm. Damit ist dann die Menge $(U_1 \cap \prod_{\gamma\in\Gamma_0} E_\gamma) + \prod_{\gamma\in\Gamma|\Gamma_0} E_\gamma$ eine Nullumgebung von $\prod_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma(\mathbf{T}_\gamma)$.

Wegen $(U_1 \cap \prod_{\gamma\in\Gamma_0} E_\gamma) + \prod_{\gamma\in\Gamma|\Gamma_0} E_\gamma \subset U_1 + U_1 \subset U$ ist somit auch U eine Nullumgebung von $\prod_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma(\mathbf{T}_\gamma)$.

Den Sätzen (3.2) bis (3.6) entsprechende Aussagen gelten für lokalkonvex ordnungstonnelierte (R)-Räume.

Beispiel 3.1 gibt einen (R)-Raum mit einer linear ordnungstonnelierten Topologie an, die nicht linear tonneliert ist. Andererseits gibt es (R)-Räume, bei denen die Klasse der linear ordnungstonnelierten (R)-Topologien mit der der linear tonnelierten übereinstimmt.

(3.7) *E sei ein (R)-Raum. Der Raum $E(\mathbf{T}^0)$ ist genau dann linear tonneliert, wenn jede linear ordnungstonnelierte (R)-Topologie $\mathbf{T}$ auf E auch linear tonneliert ist.*

Beweis. Ist jede linear ordnungstonnelierte Topologie auf E tonneliert, dann ist insbesondere die Ordnungstopologie $\mathbf{T}^0$ linear tonneliert. Sei umgekehrt $E(\mathbf{T}^0)$ linear tonneliert und $\mathbf{T}$ eine linear ordnungstonnelierte Topologie auf E. Ist (U, U_i) ein $\mathbf{T}$-abgeschlossenes, absorbierendes System in $E(\mathbf{T})$, so ist wegen $\mathbf{T} \subset \mathbf{T}^0$ das System (U, U_i) auch $\mathbf{T}^0$-abgeschlossen. (U, U_i) ist also nach Voraussetzung ein $\mathbf{T}^0$-Nullumgebungssystem und absorbiert somit jedes Ordnungsintervall von E. Damit ist (U, U_i) nach (3.1) ein $\mathbf{T}$-Nullumgebungssystem. $E(\mathbf{T})$ ist also linear tonneliert.

Als Korollar erhalten wir wegen (2.16):

(3.8) *E sei abzählbar ordnungsvollständig. Dann ist jeder linear ordnungstonnelierte Raum $E(\mathbf{T})$ auch linear tonneliert.*

(3.8) zeigt, daß (3.3) eine Aussage über tonnelierte Topologien ist:

(3.9) *E sei abzählbar ordnungsvollständig und $\mathbf{T}$ eine linear tonnelierte (R)-Topologie auf E. Jedes σ-Band in E ist in der von $\mathbf{T}$ induzierten Topologie linear tonneliert.*

Beispiel 3.3. Es gibt linear ordnungstonnelierte (R)-Räume $E(\mathbf{T})$ mit $\mathbf{T} \neq \mathbf{T}^0$, die nicht linear tonneliert sind. Sei etwa E_1 ein (R)-Raum, dessen Ordnungstopologie $\mathbf{T}_1^0$ nicht linear tonneliert ist. $E_2(\mathbf{T}_2)$ sei ein linear tonnelierter (R)-Raum, so daß $\mathbf{T}_2$ von der Ordnungstopologie von E_2 verschieden ist. Dann ist $E(\mathbf{T}) = E_1(\mathbf{T}_1^0) \oplus$ $\oplus E_2(\mathbf{T}_2)$ linear ordnungstonneliert, aber $\mathbf{T}$ ist nicht linear tonneliert und wegen (2.8) nicht die Ordnungstopologie von E.

Eines der wichtigsten Ergebnisse der Theorie der tonnelierten Räume ist der Satz von Banach-Steinhaus. Für ordnungstonnelierte (R)-Räume läßt sich eine entsprechende Aussage beweisen.

(3.10) *Für einen topologischen (R)-Raum $E(\mathbf{T})$ sind äquivalent:*

(i) *$E(\mathbf{T})$ ist linear ordnungstonneliert.*

(ii) *Jede Familie $\{A_\gamma\}$ von stetigen positiven Abbildungen A_γ: $E(\mathbf{T}) \to F(\mathbf{T}_1)$ von $E(\mathbf{T})$ in einen topologischen (R)-Raum $F(\mathbf{T}_1)$, die punktweise beschränkt ist, ist gleichgradig stetig.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei V eine normale Nullumgebung in $F(\mathbf{T}_1)$ mit einem normalen Nullumgebungssystem (V, V_i). In $E(\mathbf{T})$ ist dann das

System $(\bigcap_\gamma A_\gamma^{-1}(V), \bigcap_\gamma A_\gamma^{-1}(V_i))$ abgeschlossen, und es absorbiert dort jedes Intervall. Wegen (i) ist damit $U = \bigcap_\gamma A_\gamma^{-1}(V)$ eine **T**-Nullumgebung, und es gilt $A_\gamma(U) \subset V$ für alle γ.

(ii) $\Rightarrow$ (i): (U, U_i) sei ein abgeschlossenes, absorbierendes normales System in $E(\mathbf{T})$. Es ist zu zeigen, daß U eine Nullumgebung ist. Sei $\{U^\beta\}$ eine normale Nullumgebungsbasis von $E(\mathbf{T})$ und (U^β, U_i^β) jeweils ein normales Nullumgebungssystem zu U^β. Wir betrachten die direkte Summe $\bigoplus_\beta E_\beta$, wobei $E_\beta = E$ für jedes β sei. Die normalen Mengen $\bigoplus_\beta (U_i + U_i^\beta)$, $i = 0, 1, \ldots$, bilden eine Nullumgebungsbasis für eine lineare (R)- Topologie $\mathbf{T}'$ auf $\bigoplus_\beta E_\beta$. Seien I_β die Einbettungen von E in $\bigoplus_\beta E_\beta$, die E die Komponente E_β zuordnen. Die I_β sind $\mathbf{T}'$-stetige Abbildungen auf $E(\mathbf{T})$. Sie sind positiv und wegen der Absorbanz der U_i auch punktweise beschränkt. $\{I_\beta\}$ ist also wegen (ii) gleichgradig stetig. Damit ist $\bigcap_\beta I_\beta^{-1}(\bigoplus_\beta (U + U^\beta))$ eine Nullumgebung in $E(\mathbf{T})$. Da U abgeschlossen ist, gilt aber weiter $U = \bigcap_\beta (U + U^\beta) = \bigcap_\beta I_\beta^{-1}(\bigoplus_\beta (U + U^\beta))$, also ist U eine **T**-Nullumgebung, was zu zeigen war.

(3.11) *Sei (A_γ) ein gerichtetes System von stetigen positiven Abbildungen A_γ: $E(\mathbf{T}) \to F(\mathbf{T}_1)$, wobei $E(\mathbf{T})$ linear ordnungstonneliert sei und $F(\mathbf{T}_1)$ ein Hausdorffscher (R)-Raum. Ist (A_γ) punktweise beschränkt, und konvergiert (A_γ) punktweise gegen eine Abbildung A, so ist A stetig und positiv.*
Sind die A_γ Verbandshomomorphismen, dann gilt dies auch von A.

Beweis. Die Stetigkeit von A folgt in der üblichen Weise aus (3.10). A ist positiv wegen der Abgeschlossenheit des positiven Kegels in $F(\mathbf{T}_1)$. Wegen der Stetigkeit der Verbandsoperationen in $F(\mathbf{T}_1)$ ist mit den A_γ auch A ein Verbandshomomorphismus.

(3.12) *Jeder punktweise Limes A einer Folge (A_n) stetiger positiver Abbildungen A_n: $E(\mathbf{T}) \to F(\mathbf{T}_1)$ ist eine stetige und positive Abbildung.*

4. GRAPHENSÄTZE UND SÄTZE ÜBER OFFENE ABBILDUNGEN IN ORDNUNGSTONNELIERTEN (R)-RÄUMEN

In diesem Abschnitt sollen alle vorkommenden Räume Hausdorffsch sein. Wir betrachten lineare Abbildungen mit abgeschlossenem Graphen (kurz: abgeschlossene Abbildungen) zwischen topologischen (R)-Räumen.

(4.1) *Sei $E(\mathbf{T})$ ein linear (lokalkonvex) ordnungstonnelierter (R)-Raum. Dann ist jede positive Abbildung $A: E(\mathbf{T}) \to F(\mathbf{T}_1)$ in einen topologischen (lokalkonvexen) (R)-Raum $F(\mathbf{T}_1)$ faststetig.*

In N. Adasch [2] werden die linear B_r-vollständigen topologischen Vektorräume eingeführt. Sie entsprechen im allgemeinen linearen Fall den B_r-vollständigen lokalkonvexen Räumen von V. Ptak. Diese nennen wir hier lokalkonvex B_r-vollständig. Aus N. Adasch [2], 2.(4) bzw. der Ptakschen Theorie sowie (4.1) folgt:

(4.2) *Sei $E(\mathbf{T})$ ein linear (lokalkonvex) ordnungstonnelierter (R)-Raum und $F(\mathbf{T}_1)$ ein linear (lokalkonvex) B_r-vollständiger (R)-Raum. Dann ist jede abgeschlossene positive Abbildung $A: E(\mathbf{T}) \to F(\mathbf{T}_1)$ stetig.*

Es gilt die folgende Umkehrung von (4.2), die einem Satz von M. Mahowald für tonnelierte Räume entspricht:

(4.3) *Es sei $E(\mathbf{T})$ ein topologischer (R)-Raum. Dann sind äquivalent:*
(i) *$E(\mathbf{T})$ ist linear ordnungstonneliert.*
(ii) *Jede abgeschlossene positive Abbildung $A: E(\mathbf{T}) \to F(\mathbf{T}_1)$ in einen beliebigen vollständigen, metrisierbaren (R)-Raum $F(\mathbf{T}_1)$ ist stetig.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) folgt aus (4.2), denn ein vollständiger, metrisierbarer Raum ist B_r-vollständig. (ii) $\Rightarrow$ (i): Sei (U, U_i) ein abgeschlossenes, absorbierendes normales System in $E(\mathbf{T})$. Wie im Beweis von (2.5) bilden wir den vollständigen, metrisierbaren (R)-Raum $\widetilde{E(\mathbf{T}')}/N$ mit der Nullumgebungsbasis $\{\widetilde{U}_i\}$. Die kanonische Abbildung $K: E(\mathbf{T}) \to \widetilde{E(\mathbf{T}')/N}$ ist nach S. O. Iyahen [1], Lemma 3.1 abgeschlossen. Da K positiv ist, ist K wegen (ii) stetig. Damit ist die Menge $U_1 + N = K^{-1}(\widetilde{U}_1)$ eine Nullumgebung in $E(\mathbf{T})$, also auch U.

(4.4) *Ein lokalkonvexer (R)-Raum* $E(\mathbf{T})$ *ist genau dann lokalkonvex ordnungstonneliert, wenn jede abgeschlossene positive Abbildung* $A\colon E(\mathbf{T}) \to F(\mathbf{T}_1)$ *in einen beliebigen Banach-Verband* $F(\mathbf{T}_1)$ *stetig ist.*

Beispiel 4.1. Wir betrachten $\mathbf{l}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{T}_{\frac{1}{2}})$ und $\mathbf{l}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{T}_1)$ (vgl. Beispiel 2.3). Wegen $\mathbf{T}_{\frac{1}{2}} \supset \mathbf{T}_1$ ist die identische Abbildung $I\colon \mathbf{l}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{T}_1) \to \mathbf{l}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{T}_{\frac{1}{2}})$ abgeschlossen. Wäre $\mathbf{l}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{T}_1)$ linear ordnungstonneliert, so wäre I nach (4.3) stetig. Damit stimmten auf $\mathbf{l}^{\frac{1}{2}}$ die Topologien $\mathbf{T}_{\frac{1}{2}}$ und $\mathbf{T}_1$ überein, was nicht der Fall ist. Mit $\mathbf{l}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{T}_1)$ haben wir also ein Beispiel eines lokalkonvex ordnungstonnelierten (R)-Raumes, der nicht linear ordnungstonneliert ist.

(4.5) *Jeder Verbandshomomorphismus* $A\colon E(\mathbf{T}) \to F(\mathbf{T}_1)$ *von einem linearen (lokalkonvexen) (R)-Raum* $E(\mathbf{T})$ *auf einen linear (lokalkonvex) ordnungstonnelierten (R)-Raum* $F(\mathbf{T}_1)$ *ist fastoffen.*

Nennen wir die B-vollständigen Räume der PTAKschen Theorie lokalkonvex B-vollständig und diejenigen in N. ADASCH [2] linear B-vollständig, so folgt aus (4.5):

(4.6) *Ein abgeschlossener Verbandshomomorphismus* $A\colon E(\mathbf{T}) \to F(\mathbf{T}_1)$ *von einem linear (lokalkonvex) B-vollständigen (R)-Raum* $E(\mathbf{T})$ *auf einen linear (lokalkonvex) ordnungstonnelierten (R)-Raum* $F(\mathbf{T}_1)$ *ist offen.*

In N. ADASCH [1], [2] wird die Klasse der Infra-s-Räume eingeführt. Ein linearer Raum $F(\mathbf{T})$ gehört zu dieser Klasse, falls jede abgeschlossene lineare Abbildung von einem beliebigen tonnelierten Raum in $F(\mathbf{T})$ stetig ist. Es soll jetzt eine entsprechende Klasse von topologischen (R)-Räumen für ordnungstonnelierte Räume und abgeschlossene Verbandshomomorphismen untersucht werden. Die Überlegungen sind ähnlich wie im tonnelierten Fall.

$E(\mathbf{T})$ sei ein topologischer (R)-Raum. Mit $\mathbf{T}^{nb}$ bezeichnen wir diejenige (R)-Topologie auf E, die die Menge aller U zur Nullumgebungsbasis hat, zu denen ein $\mathbf{T}$-abgeschlossenes, absorbierendes normales System (U, U_i) existiert. Es gilt $\mathbf{T} \subset \mathbf{T}^{nb}$. $E(\mathbf{T})$ ist genau dann linear ordnungstonneliert, wenn $\mathbf{T} = \mathbf{T}^{nb}$.

Die Menge der linear ordnungstonnelierten Topologien auf E, die feiner sind als $\mathbf{T}$, ist nicht leer. $\mathbf{T}^o$ gehört dazu. Das Infimum dieser Menge unter den linearen Topologien ist nach (3.4) eine linear ordnungstonnelierte (R)-Topologie auf E. Wir bezeichnen sie mit $\mathbf{T}^{ot}$

und nennen $E(\mathbf{T}^{ot})$ den zu $E(\mathbf{T})$ *assoziierten linear ordnungstonnelierten Raum*. $E(\mathbf{T})$ ist genau dann linear ordnungstonneliert, wenn $\mathbf{T} = \mathbf{T}^{ot}$.

(4.7) *A: $E(\mathbf{T}) \to F(\mathbf{T}_1)$ sei eine stetige positive Abbildung von dem linear ordnungstonnelierten (R)-Raum $E(\mathbf{T})$ in den topologischen (R)-Raum $F(\mathbf{T}_1)$. Dann ist auch A: $E(\mathbf{T}) \to F(\mathbf{T}_1^{ot})$ stetig.*

Beweis. Sei $\{\mathbf{T}_a\}$ die Menge aller (R)-Topologien $\mathbf{T}_a \supset \mathbf{T}_1$ auf F, so daß A: $E(\mathbf{T}) \to F(\mathbf{T}_a)$ stetig ist. Ist I_a jeweils die Identität auf F, so ist der topologische Kern $F(\hat{\mathbf{T}})$ von $(F(\mathbf{T}_a), I_a)$ nach (1.2) ein topologischer (R)-Raum. A: $E(\mathbf{T}) \to F(\hat{\mathbf{T}})$ ist stetig. Da $E(\mathbf{T})$ ordnungstonneliert ist, ist auch A: $E(\mathbf{T}) \to F(\hat{\mathbf{T}}^{nb})$ stetig. Also gilt $\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{T}}^{nb}$, und $F(\hat{\mathbf{T}})$ ist linear ordnungstonneliert. Da damit $\hat{\mathbf{T}} \supset \mathbf{T}_1^{ot}$ gilt, ist A: $E(\mathbf{T}) \to F(\mathbf{T}_1^{ot})$ stetig.

Wir nennen einen topologischen (R)-Raum $E(\mathbf{T})$ einen *Infra-os-Raum*, falls für jede (R)-Topologie $\mathbf{T}_1$ auf E mit $\mathbf{T}_1 \subset \mathbf{T}$ gilt $\mathbf{T}_1^{ot} = \mathbf{T}^{ot}$.

(4.8) *Für einen topologischen (R)-Raum $E(\mathbf{T})$ sind äquivalent:*
   (i) *$E(\mathbf{T})$ ist ein Infra-os-Raum.*
   (ii) *Jeder abgeschlossene starke Verbandshomomorphismus von einem linear ordnungstonnelierten (R)-Raum in $E(\mathbf{T})$ ist stetig.*
   (iii) *Jeder abgeschlossene Verbandsisomorphismus von einem linear ordnungstonnelierten (R)-Raum auf $E(\mathbf{T})$ ist stetig.*

Der Beweis verläuft mit Hilfe von (4.7) analog zu dem von 3. (3) in N. ADASCH [2].

Wegen (4.2) ist jeder linear B_r-vollständige (R)-Raum ein Infra-os-Raum.

Ein lokalkonvexer (R)-Raum $E(\mathbf{T})$ heiße *Infra-los-Raum*, falls für jede lokalkonvexe (R)-Topologie $\mathbf{T}_1$ auf E mit $\mathbf{T}_1 \subset \mathbf{T}$ gilt $\mathbf{T}_1^{lot} = \mathbf{T}^{lot}$, wobei $\mathbf{T}_1^{lot}$ und $\mathbf{T}^{lot}$ die jeweiligen assoziierten lokalkonvex ordnungstonnelierten Topologien bezeichnen. $E(\mathbf{T})$ ist ein Infra-los-Raum genau dann, wenn jeder abgeschlossene starke Verbandshomomorphismus von einem lokalkonvex ordnungstonnelierten (R)-Raum in $E(\mathbf{T})$ stetig ist. Dies zeigt man wie (4.8).

Wir geben noch eine duale Charakterisierung der Infra-los-Räume. Es sei (E, E') ein Dualsystem und E' ein Ideal in E^b. Dann nennen wir E' *normal* $(\mathbf{T}_s(E)$ —) *quasiabgeschlossen* in F mit $E' \subset F \subset E^*$, falls die Abschließung in $F(\mathbf{T}_s(E))$ jeder normalen beschränkten Menge von $E'(\mathbf{T}_s)$ in E' liegt. $\mathbf{T}_{nk}(E')$ bezeichne die feinste für (E, E') zulässige lokalkonvexe (R)-Topologie auf E. Es scheint nicht bekannt zu sein, ob immer $\mathbf{T}_{nk}(E') = \mathbf{T}_k(E')$ gilt.

(4.9) *$E(\mathbf{T})$ sei ein lokalkonvexer (R)-Raum. Es sind gleichwertig:*
 (i) *$E(\mathbf{T})$ ist lokalkonvex ordnungstonneliert.*
 (ii) *$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{nk}(E')$ und E' ist normal quasiabgeschlossen in E^*.*
 (iii) *$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{nk}(E')$ und E' ist normal quasiabgeschlossen in E^b.*

Beweis. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) zeigt man ähnlich wie die entsprechende Aussage für tonnelierte und quasiabgeschlossene Räume. (ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Da $E(\mathbf{T}^{l,o})$ lokalkonvex ordnungstonneliert ist, ist $E(\mathbf{T}^{l,o})' = E^b$ in E^* normal quasiabgeschlossen. Dann ist ein Ideal $E' \subset E^b$ genau dann normal quasiabgeschlossen in E^*, wenn es dies in E^b ist.

Aus (4.9) folgt, daß jedes normal quasiabgeschlossene Ideal von E^b ein Band ist. Die Umkehrung gilt nicht.

Sei $\overline{E'}$ der Durchschnitt aller normal $\mathbf{T}_s(E)$-quasiabgeschlossenen Ideale in E^b, die E' enthalten. Dann ist $\overline{E'}$ wieder ein normal quasiabgeschlossenes Ideal in E^b. Es gilt $E(\mathbf{T}^{lol})' = \overline{E'}$ für jede für (E, E') zulässige (R)-Topologie $\mathbf{T}$.

(4.10) *Ein lokalkonvexer (R)-Raum $E(\mathbf{T})$ ist ein Infra-los-Raum genau dann, wenn für jedes $\mathbf{T}_s(E)$-dichte Ideal I in E' gilt $\overline{I} \cap E' = E'$.*

Beweis. Es sei $E(\mathbf{T})$ ein Infra-los-Raum und I ein $\mathbf{T}_s$-dichtes Ideal in E'. Für die Topologie $\mathbf{T}_{|s|}(I)$ auf E der gleichmäßigen Konvergenz auf den Intervallen von I gilt $\mathbf{T}_{|s|}(I) \subset \mathbf{T}$, also $\mathbf{T}_{|s|}^{lol} = \mathbf{T}^{lol}$ und somit $\mathbf{T} \subset \mathbf{T}_{|s|}^{lol}$, weswegen $E' \subset E(\mathbf{T}_{|s|}^{lol})' = \overline{I}$.

Sei umgekehrt $\mathbf{T}_1$ eine lokalkonvexe (R)-Topologie auf E mit $\mathbf{T}_1 \subset \mathbf{T}$. Dann ist $E(\mathbf{T}_1)'$ schwach dicht in E', also gilt $\overline{E(\mathbf{T}_1)'} \cap E' = E'$ und $E' \subset \overline{E(\mathbf{T}_1)'}$. Damit $\mathbf{T}^{lol} \subset \mathbf{T}_1^{lol}$, also $\mathbf{T}^{lol} = \mathbf{T}_1^{lol}$.

Ein linearer (R)-Raum $E(\mathbf{T})$ heiße *os-Raum*, falls für jedes abgeschlossene Ideal I in $E(\mathbf{T})$ der Quotientenraum $E(\mathbf{T})/I$ ein Infra-os-Raum ist. Damit ist jeder os-Raum auch ein Infra-os-Raum.

(4.11) *Für einen topologischen (R)-Raum $E(\mathbf{T})$ sind äquivalent:*
 (i) *$E(\mathbf{T})$ ist ein os-Raum.*
 (ii) *Jeder abgeschlossene Verbandshomomorphismus von $E(\mathbf{T})$ auf einen linear ordnungstonnelierten Raum ist offen.*

Zum Beweis verweisen wir auf den von N. ADASCH [2], 4. (3). Jeder linear B-vollständige (R)-Raum ist ein os-Raum.

Wir nennen einen lokalkonvexen (R)-Raum $E(\mathbf{T})$ *los-Raum*, falls für jedes abgeschlossene Ideal I der Raum $E(\mathbf{T})/I$ ein Infra-los-Raum ist. Für diese Räume gilt (4.11) entsprechend.

(4.12) *Ein lokalkonvexer (R)-Raum $E(\mathbf{T})$ ist genau dann ein los-Raum, falls für jedes Ideal I in E' gilt $\tilde{I} \cap E' = \bar{I}$, wobei $\bar{I}$ die Abschließung von I in $E'(\mathbf{T}_s)$ ist.*

Beweis. Sei $E(\mathbf{T})$ ein los-Raum. Ist I ein Ideal in E', so ist der Orthogonalraum $I^{\perp}$ von I in E ein abgeschlossenes Ideal. Wir bilden $E(\mathbf{T})/I^{\perp}$. Sei $I^{\perp\perp}$ bzw. $I^{\perp 0}$ der Orthogonalraum von $I^{\perp}$ in E' bzw. E^b. $(E(\mathbf{T})/I^{\perp})'$ ist verbandsisomorph zu $I^{\perp\perp}$ und $(E/I^{\perp})^b$ verbandsisomorph zu $I^{\perp 0}$. Es gilt $E^b \supset I^{\perp 0} \supset I^{\perp\perp} \supset I$. Da $I^{\perp 0}$ ein $\mathbf{T}_s(E)$-abgeschlossenes Ideal in E^b ist, stimmt die normal quasiabgeschlossene Hülle $\tilde{I}$ von I in E^b mit derjenigen von I in $I^{\perp 0} = (E/I^{\perp})^b$ überein. I ist $\mathbf{T}_s$-dicht in $I^{\perp\perp} = (E(\mathbf{T})/I^{\perp})'$. Da $E(\mathbf{T})/I^{\perp}$ nach Voraussetzung ein Infra-los-Raum ist, gilt $\tilde{I} \cap I^{\perp\perp} = I^{\perp\perp} = \bar{I}$. Wegen der Abgeschlossenheit von $I^{\perp\perp}$ in E' haben wir schließlich $\tilde{I} \cap I^{\perp\perp} = \tilde{I} \cap E'$, also $\tilde{I} \cap E' = \bar{I}$.

Umgekehrt gelte die Bedingung und H sei ein abgeschlossenes Ideal in $E(\mathbf{T})$. Es gilt $(E(\mathbf{T})/H)' = H^{\perp} \subset E'$. Sei I ein $\mathbf{T}_s$-dichtes Ideal in $H^{\perp}$. Dann ist $\tilde{I} \cap H^{\perp} = \tilde{I} \cap E' = \bar{I} = H^{\perp}$. Also ist $E(\mathbf{T})/H$ nach (4.10) ein Infra-los-Raum.

$E(\mathbf{T}^0)$ sei linear tonneliert. Ist dann $\mathbf{T}$ eine lineare (R)-Topologie auf E, so ist auch die zu $\mathbf{T}$ assoziierte linear tonnelierte Topologie $\mathbf{T}^t$ (vgl. N. ADASCH [2]) eine (R)-Topologie. Haben wir nämlich in $E(\mathbf{T}^t)$ eine Nullumgebungsbasis $\{V\}$, so bilden die normalen Hüllen $H(V)$ der V eine Nullumgebungsbasis für eine (R)-Topologie $\mathbf{T}'$ auf E mit $\mathbf{T} \subset \mathbf{T}' \subset \mathbf{T}^t$. Ist (U, U_i) ein abgeschlossenes, absorbierendes normales System in $E(\mathbf{T}')$, so ist U eine Nullumgebung in $E(\mathbf{T}^t)$, $H(U) = U$ also eine Nullumgebung in $E(\mathbf{T}')$. $E(\mathbf{T}')$ ist damit linear ordnungstonneliert und wegen (3.7) linear tonneliert. Somit haben wir $\mathbf{T}' = \mathbf{T}^t$.

(4.13) *E sei ein (R)-Raum, so daß $E(\mathbf{T}^0)$ linear tonneliert ist. Es sei $\mathbf{T}$ eine lineare (R)-Topologie auf E.*

a) *Ist $E(\mathbf{T})$ ein Infra-s-Raum, so ist es auch ein Infra-os-Raum.*

b) *Ist $E(\mathbf{T})$ ein s-Raum, so ist es auch ein os-Raum.*

Insbesondere gelten a) *und* b), *falls E abzählbar ordnungsvollständig ist.*

Beweis. a) Sei $\mathbf{T}_1$ eine (R)-Topologie auf E mit $\mathbf{T}_1 \subset \mathbf{T}$. Dann gilt $\mathbf{T}_1^{ot} = \mathbf{T}_1^t$ und $\mathbf{T}^{ot} = \mathbf{T}^t$ wegen (3.7) und der Bemerkung vor (4.13). Da $E(\mathbf{T})$ ein Infra-s-Raum ist, haben wir $\mathbf{T}_1^{ot} = \mathbf{T}_1^t = \mathbf{T}^t = \mathbf{T}^{ot}$. Also ist $E(\mathbf{T})$ ein Infra-os-Raum.

b) Ist $E(\mathbf{T})$ ein s-Raum und I ein abgeschlossenes Ideal, so ist $E(\mathbf{T})/I$ ein Infra-s-Raum. Wegen (2.7) und a) ist $E(\mathbf{T})/I$ dann ein Infra-os-Raum.

Die letzte Bemerkung folgt aus (2.16).

LITERATUR

N. ADASCH: [1] *Tonnelierte Räume und zwei Sätze von Banach*. Math. Ann. 186, 209-214 (1970). [2] *Der Graphensatz in topologischen Vektorräumen*. Math. Z. 119, 131-142 (1971).

S. O. IYAHEN: [1] *On certain classes of linear topological spaces*. Proc. London Math. Soc. 18, 285-307 (1968).

I. KAWAI: [1] *Locally convex lattices*. J. Math. Soc. Japan 9, 281-314 (1957).

D. KEIM: [1] *Direkte Summen und Produkte gewisser lokalkonvexer Vektorverbände*. Collect. Math. 21, 173-179 (1970).

J. KÖHN: [1] *Induktive Limiten nicht lokalkonvexer topologischer Vektorräume*. Math. Ann. 181, 269-278 (1969).

G. KÖTHE: [1] *Topologische lineare Räume I*. Berlin-Heidelberg - New York: Springer 1966.

I. NAMIOKA: [1] *Partially ordered linear topological spaces*. Mem. Amer. Math. Soc. 24 (1957).

G. T. ROBERTS: [1] *Topologies in vector lattices*. Proc. Camb. Phil. Soc. 48, 533-546 (1952).

W. ROBERTSON: [1] *Completions of topological vector spaces*. Proc. London Math. Soc. 8, 242-257 (1958).

H. SCHAEFER: [1] *Topological vector spaces*. New York: Macmillan 1966. [2] *Halbgeordnete lokalkonvexe Vektorräume*. Math. Ann. 135, 115-141 (1958).

Y. - C. WONG: [1] *Order-infrabarrelled Riesz spaces*. Math. Ann. 183, 17-32 (1969).

Dieter Keim
Math. Seminar der Universität
6 Frankfurt/Main - Germany
Robert Mayer Str. 10