SOBRE EL TEOREMA DE LA GRAFICA CERRADA (*)

por

MANUEL VALDIVIA

INTRODUCCION. — En [1], [7] y [10] se da una clase de espacios localmente convexos que se utiliza para obtener un teorema general de la gráfica cerrada, que contiene el de A. P. ROBERTSON - W. ROBERTSON, [5], es decir que los espacios B_r — completos pertenecen a dicha clase, y ésta es la más amplia posible, para la cual es válido el teorema de la gráfica cerrada, cuando se toman como espacios de partida los tonelados.

En este trabajo obtenemos algunas propiedades nuevas de los espacios introducidos en [1], [7] y [10], utilizando definiciones en las que no entra el concepto de espacio tonelado asociado a un espacio localmente convexo. En vez de establecer la equivalencia entre las definiciones dadas en [1], [7] y [10] y las introducidas aquí, hemos preferido, para comodidad del lector, dar los teoremas generales de la gráfica cerrada y de la aplicación abierta a partir de estas definiciones.

Obtenemos también nuevos resultados sobre operadores cerrados.

* * *

Los espacios vectoriales que manejamos están definidos sobre el cuerpo K de los números reales o de los números complejos.

Empleamos la palabra «espacio» con el significado de «espacio vectorial topológico, localmente convexo y de Hausdorff».

Si E es un espacio cualquiera representamos por E' y E^* el dual topológico y el dual algebraico de E, respectivamente. E'_σ es E' con la topología $\sigma(E', E)$, y E^*_σ es E^* con la topología $\sigma(E^*, E)$.

(*) Subvencionado en parte por el «Patronato para el Fomento de la Investigación en la Universidad».

DEFINICION 1.

Decimos que E es un espacio Γ_r si dado un subespacio cualquiera G de E^*_σ, en el que cada parte cerrada y acotada es compacta, y tal que $G \cap E'$ es denso en E'_σ, se tiene que $G \supset E'$.

DEFINICION 2.

Decimos que E es un espacio Γ, si dado un subespacio cualquiera G de E^*_σ, en el que cada parte cerrada y acotada es compacta, se tiene que $G \cap E'$ es cerrada en E'_σ.

NOTA 1.

Obsérvese que todo espacio Γ es un espacio Γ_r. No sabemos si hay algún espacio Γ_r que no sea un espacio Γ.

TEOREMA 1. *(Teorema general de la gráfica cerrada)*

Sea u una aplicación lineal del espacio tonelado E en el espacio F, de manera que la gráfica de u es cerrada. Si F es un espacio Γ_r entonces u es continua.

Demostración:

Sea $\mathcal{T}$ la topología localmente convexa más fina sobre F. Entonces el dual topológico de $F[\mathcal{T}]$ es F^*. Considerando u como aplicación de E en $F[\mathcal{T}]$, su gráfica es cerrada en $E \times F[\mathcal{T}]$, y si v es la aplicación traspuesta de u, su dominio D_v será denso en F^*_σ [6, p. 155].

Sea A una parte cerrada y acotada de D_v y sea $\{y'_n : n \in M\}$ una red de elementos de A que converge en F^*_σ a y'. Entonces, para cada $y \in F$, existe un $k \in K$, $k > 0$, dependiente de y, tal que

$$|\langle y'_n, y\rangle| < k, \quad \forall\, n \in M,$$

por lo que las formas lineales sobre E

$$x'_n : x \longrightarrow \langle u(x), y'_n\rangle, \qquad x \in E, \qquad n \in M,$$

que son continuas, [6, p. 155], forman un conjunto acotado en E'_σ, de donde, teniendo en cuenta que E es tonelado y que la red $\{x'_n : n \in M\}$ converge puntualmente a la aplicación

$$x' : x \longrightarrow \langle u(x), y' \rangle$$

resulta, aplicando el teorema de Banach-Steinhauss, que esta última forma lineal es continua, de aquí que $y' \in D_v$, lo que nos indica que A es cerrado en F^*_σ y, por lo tanto, compacto.

Por otra parte, si consideramos u como aplicación de E en F, su aplicación traspuesta v_1 tiene su dominio D_{v_1} denso en F'_σ. Si $z' \in D_{v_1}$, la forma lineal sobre E

$$x \longrightarrow \langle u(x), z' \rangle$$

es continua, y como z' pertenece también a F^* se tiene que $z' \in D_v$, [6, p. 155], luego $D_v \cap F' \supset D_{v_1}$, de donde se deduce que $D_v \cap F'$ es denso en F'_σ.

Resumiendo, D_v es un subespacio de F^*_σ en el que cada parte cerrada y acotada es compacta, verificándose, además, que $D_v \cap F'$ es denso en F'_σ, pero como F es un espacio Γ_r se tiene que $D_v \supset F'$.

Finalmente, si $t' \in F'$, se tiene que $t' \in D_v$, por lo que la forma lineal sobre E

$$x \longrightarrow \langle u(x), t' \rangle$$

es continua, de donde se deduce que $D_{v_1} = F'$, lo que nos indica que u es continua de E en F con las topologías respectivas $\sigma(E, E')$ y $\sigma(F, F')$, pero como E es tonelado su topología es la de Mackey, de aquí que u sea continua de E en F, *c. q. d.*

Teorema 2.

Si el espacio de F no es un espacio Γ_r existe un espacio tonelado E y una aplicación u lineal y biyectiva de E sobre F, cuya gráfica es cerrada, de manera que u no es continua.

Demostración:

Si F no es un espacio Γ_r existe en F^*_σ un subespacio G en el que toda parte cerrada y acotada es compacta, siendo $G \cap F'$ denso en F'_σ y distinto de F'.

Sea $\mathfrak{G}$ la familia de todas las partes acotadas de G, y $\mathcal{T}'$ la topología sobre F que tiene como sistema fundamental de entornos los conjuntos polares de los elementos de $\mathfrak{G}$. Puesto que $G \cap F$ es denso en F'_σ y este último espacio es denso en F^*_σ se tiene que G es denso en F^*_σ, por lo que $F[\mathcal{T}']$ es un espacio cuyo dual L contiene a G. Veamos que $L = G$. En efecto, si $w \in L$, existe una parte $A \in G$, tal que

$$|\langle w, x \rangle| \leq 1, \qquad \forall x \in A^0,$$

siendo A^0 el conjunto polar de A. Luego $w \in A^{00}$, siendo este último conjunto el polar de A^0 en L, y como A^{00} es la envoltura absolutamente convexa cerrada de A, se tiene que $A^{00} \subset G$, por lo que $w \in G$, es decir, $G = L$.

Si T es un tonel de $F[\mathcal{T}']$, su polar en L es un conjunto acotado de G, por lo que pertenece a $\mathfrak{G}$, de aquí que $F[\mathcal{T}']$ sea tonelado.

Llamando E a $F[\mathcal{T}']$ y u a la aplicación idéntica de $F[\mathcal{T}']$ en F, veamos que la gráfica de u es cerrada en $E \times F$. En efecto, si D_v es el dominio de la aplicación v, traspuesta de la u, y $x' \in G \cap F'$, la forma lineal sobre E

$$x \longrightarrow \langle x', u(x) \rangle = \langle x', x \rangle$$

es continua, por lo que $D_v \supset G \cap F'$, resultando que D_v es denso en F'_σ. Finalmente, u no es continua, ya que el dual de E es G, que no contiene al dual de F, F', *c. q. d.*

NOTA 2.

Sea E un espacio tonelado y F un espacio B_r-completo. Si u es una aplicación lineal de E en F, cuya gráfica es cerrada, es sabido que u es continua, [6, p. 166], por lo que podemos afirmar, teniendo en cuenta el Teorema 2, que todo espacio B_r-completo es un espacio Γ_r. Hay espacios Γ_r, que no son B_r-completos, [7].

TEOREMA 3.

Sea F un subespacio cerrado del espacio E. Si E es un espacio Γ, entonces $\frac{E}{F}$ es un espacio Γ.

Demostración:

Sea u la aplicación canónica de E sobre $\frac{E}{F}$. Si $\mathcal{T}$ es la topología localmente convexa más fina sobre E, se tiene, evidentemente, que $\frac{E[\mathcal{T}]}{F}$ es el espacio vectorial $\frac{E}{F}$ con la topología localmente convexa más fina, por lo que el dual topológico de $\frac{E[\mathcal{T}]}{F}$ es $\left(\frac{E}{F}\right)^*$. La aplicación u considerada de E en $\frac{E}{F}$ tiene como traspuesta v, y considerada de $E[\mathcal{T}]$ en $\frac{E[\mathcal{T}]}{F}$ su traspuesta es v_1. Se tiene que v es un morfismo inyectivo estricto de $\left(\frac{E}{F}\right)'_\sigma$ en E'_σ, y v_1 es un morfismo inyectivo estricto de $\left(\frac{E}{F}\right)^*_\sigma$ en E^*_σ, siendo, además, v la restricción de v_1 a $\left(\frac{E}{F}\right)'_\sigma$.

Sea G un subespacio de $\left(\frac{E}{F}\right)^*_\sigma$ en el que toda parte cerrada y acotada sea compacta, y veamos que $G \cap \left(\frac{E}{F}\right)'_\sigma$ es cerrado en $\left(\frac{E}{F}\right)'_\sigma$, con lo que tendremos demostrado el teorema. Si A es un conjunto cerrado y acotado de $v_1(G)$ se tiene que $v_1^{-1}(A)$ es cerrado y acotado en G y, por lo tanto, es compacto, de aquí que A sea compacto, y puesto que E es un espacio Γ, $v_1(G) \cap E'$ es cerrado en E_σ', de donde se deduce que $v^{-1}[v_1(G) \cap E']$ es cerrado en $\left(\frac{E}{F}\right)'_\sigma$, pero como

$$v^{-1}[v_1(G) \cap E'] = v_1^{-1}[v_1(G) \cap E'] = G \cap v_1^{-1}(E') = G \cap \left(\frac{E}{F}\right)'$$

se tiene que este último conjunto es cerrado en $\left(\frac{E}{F}\right)'_\sigma$, c. q. d.

TEOREMA 4. *(Teorema general de la aplicación abierta).*

Sea E un espacio Γ y F un espacio tonelado. Si u es una aplicación lineal del subespacio L de E sobre F, cuya gráfica es cerrada en $E \times F$, entonces u es abierta.

Demostración:

Es inmediato que $u^{-1}(0)$ es un subespacio de L, cerrado en E. Sea φ la aplicación canónica de E sobre $\frac{E}{u^{-1}(0)}$. Sea w la aplicación de $\varphi(L)$ sobre F, definida de la siguiente forma: si $\bar{x}$ es un elemento cualquiera de $\varphi(L)$ hallamos un $x \in L$ tal que $\varphi(x) = \bar{x}$ y ponemos $w(\bar{x}) = u(x)$. Es inmediato comprobar que w es biyectiva y que la gráfica de φ en $\left(\frac{E}{u^{-1}(0)}\right) \times F$ es cerrada.

La aplicación w^{-1}, considerada de F en $\frac{E}{u^{-1}(0)}$ tiene su gráfica cerrada en $F \times \left(\frac{E}{u^{-1}(0)}\right)$, pero como F es tonelado y $\frac{E}{u^{-1}(0)}$ es, aplicando el Teorema 3, un espacio Γ, se tiene que w^{-1} es continua, por lo que w es abierta. La aplicación u es abierta por verificarse que $u = w \circ \varphi$, c. q. d.

TEOREMA 5.

Si el espacio E no es un espacio Γ existe un subespacio cerrado F de E, tal que $\frac{E}{F}$ no es un espacio Γ_r.

Demostración:

Si E no es un espacio Γ, sea L un subespacio de E^*_σ en el que toda parte cerrada y acotada sea compacta y $L \cap E'$ no sea cerrado en E'_σ. Si F es el conjunto polar en E de $L \cap E'$, veamos que $\frac{E}{F}$ no es un espacio Γ_r. Si u es la aplicación canónica de E sobre $\frac{E}{F}$ sea v la aplicación traspuesta de u. Sea $\mathcal{T}$ la topología localmente convexa más fina sobre E y v_1 la traspuesta de u, considerada de $E[\mathcal{T}]$ sobre $\frac{E[\mathcal{T}]}{F}$. La aplicación v es un morfismo estricto inyectivo de $\left(\frac{E}{F}\right)'_\sigma$ en E'_σ, y la v_1 es un morfismo estricto inyectivo de $\left(\frac{E}{F}\right)^*_\sigma$ en E^*_σ, siendo v la restricción de v_1 a $\left(\frac{E}{F}\right)'_\sigma$. Además, si $\overline{L \cap E'}^*$ y

$\overline{L \cap E'}$ son las clausuras de $L \cap E'$ en E^*_σ y E'_σ, respectivamente, se tiene que

$$v_1 \left[\left(\frac{E}{F}\right)^*\right] = \overline{L \cap E'}^* \quad \text{y} \quad v\left[\left(\frac{E}{F}\right)'\right] = v_1\left[\left(\frac{E}{F}\right)'\right] = \overline{L \cap E'}.$$

Sea $G = v_1{}^{-1}\,[L \cap \overline{L \cap E'}^*]$. Toda parte cerrada y acotada de $L \cap \overline{L \cap E'}^*$ es cerrada en L, por lo que será compacta, de aquí que toda parte cerrada y acotada de G es compacta. Veamos, ahora, que $G \cap \left(\frac{E}{F}\right)'$ es denso en $\left(\frac{E}{F}\right)'_\sigma$ y no contiene a $\left(\frac{E}{F}\right)'$, con lo que quedará probado que $\frac{E}{F}$ no es un espacio Γ_r. En efecto,

$$v_1\left[G \cap \left(\frac{E}{F}\right)'\right] = v_1(G) \cap v_1\left[\left(\frac{E}{F}\right)'\right] =$$
$$= L \cap \overline{L \cap E'}^* \cap \overline{L \cap E'} = L \cap \overline{L \cap E'} = L \cap E'$$

y como este último conjunto no es cerrado en E'_σ, se tiene que $L \cap E'$ es denso en $\overline{L \cap E'}$ y distinto de este último conjunto, de aquí que $G \cap \left(\frac{E}{F}\right)'$ sea denso en $\left(\frac{E}{F}\right)'_\sigma$ y no contenga a $\left(\frac{E}{F}\right)'$, c. q. d.

TEOREMA 6.

Si el espacio E no es un espacio Γ existe un espacio tonelado F y una aplicación lineal u de E sobre F, cuya gráfica es cerrada, de manera que u no es abierta.

Demostración:

Aplicando el Teorema 5, podemos encontrar un subespacio M de E, tal que $\frac{E}{M}$ no sea un espacio Γ_r. Aplicando el Teorema 2 hallamos una topología $\mathcal{T}'$ sobre $\frac{E}{M}$, de manera que $\frac{E}{M}[\mathcal{T}']$ sea tonelado y la aplicación idéntica v de $\frac{E}{M}[\mathcal{T}']$ en $\frac{E}{M}$ no sea continua y tenga su gráfica cerrada. Llamando F a $\frac{E}{M}[\mathcal{T}']$ y φ a la aplicación canónica de E sobre $\frac{E}{M}$ es inmediato que $u = v^{-1} \circ \varphi$ tiene su gráfica cerrada en $E \times F$ y no es abierta, c. q. d.

TEOREMA 7.

Sea F un espacio de codimensión finita del espacio E. Si F es un espacio Γ, entonces E es un espacio Γ.

Demostración:

Evidentemente, basta hacer la demostración para el caso en que F es de codimensión uno, por lo que así lo vamos a suponer.

Sea $\mathcal{T}$ la topología localmente convexa más fina sobre E. La topología inducida por $\mathcal{T}$ en F es también la topología localmente convexa más fina sobre F, por lo que los duales topológicos de $E[\mathcal{T}]$ y $F[\mathcal{T}]$ son E^* y F^*. Sea u la inyección canónica de $F[\mathcal{T}]$ en $E[\mathcal{T}]$, y v la aplicación traspuesta de la u. Como $F[\mathcal{T}]$ es cerrado en $E[\mathcal{T}]$, v es un morfismo estricto de E^*_σ sobre F^*_σ.

Si $x_0 \in E$ y $x_0 \notin F$, sea H el conjunto polar en E^* de $\{x_0\}$. H es un hiperplano cerrado de E^*_σ. Si L es el conjunto polar en E^* de F, L es un subespacio de dimensión uno de E^*_σ, complemento topológico de H, siendo, además, L el núcleo de la aplicación v, por lo que, si w es la restricción de v a H, se tiene que w es un isomorfismo de H en E^*_σ.

Sea G un subespacio cualquiera de E^*_σ, en el que toda parte cerrada y acotada es compacta, y veamos que $G \cap E'$ es cerrado en E'_σ, con lo que quedará demostrado el teorema.

Si A es una parte cerrada y acotada de $w(G \cap H)$, $w^{-1}(A)$ es cerrado y acotado en $G \cap H$, pero como H es cerrado en E^*_σ se tiene que $w^{-1}(A)$ es cerrado y acotado en G y, por lo tanto, es compacto, de aquí que A sea compacto. Pero como F es un espacio Γ se tiene que $w(G \cap H) \cap F'$ es cerrado en F'_σ. Entonces $w^{-1}(w(G \cap H) \cap F') = G \cap H \cap w^{-1}(F')$ es cerrado en $w^{-1}(F')$. La restricción de v a E'_σ tiene su imagen en F'_σ, por lo que $E' \cap H \subset w^{-1}(F')$, de donde se deduce que es cerrado el conjunto

$$(G \cap H) \cap (E' \cap H) = G \cap H \cap E'$$

en $E'_\sigma \cap H$. Dos casos pueden presentarse:

1.º) Que $G \cap H \cap E' = G \cap E'$. En este caso $G \cap E' \subset H \cap E'$, y puesto que $G \cap E'$ es cerrado en $E'_\sigma \cap H$, también es cerrado en E'_σ, por ser $H \cap E'$ cerrado en E'_σ.

2.º) Que $G \cap H \cap E' \neq G \cap E'$. Tomamos un x_0' de $G \cap E'$ tal que $x_0' \notin H$. Entonces $H \cap E'$ es un hiperplano cerrado de E'_σ tal que la envoltura lineal de $(H \cap E') \cup \{x_0'\}$ es E'. Dado un x' cualquiera de E' se puede poner de la forma

$$x' = \lambda x_0' + f(x'), \quad \lambda \in K, \quad f(x') \in H \cap E'.$$

La aplicación f de E'_σ en $H \cap E'_0$ es lineal y continua y su núcleo está contenido en G. Puesto que $G \cap H \cap E'$ es cerrado en $H \cap E'_\sigma$ se tiene que

$$f^{-1}(G \cap H \cap E') = f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H \cap E') = G \cap E'$$

es cerrado en E'_σ. Queda pues, demostrado el teorema.

Teorema 8.

Sea F un subespacio de codimensión finita del espacio E. Si F es un espacio Γ_r, entonces E es un espacio Γ_r.

Demostración:

Supongamos igual que en el Teorema 7, que F es de codimensión uno. La demostración es la misma que la del teorema anterior, tomando $G \cap E'$ denso en E'_σ. Solamente hemos de probar que $w(G \cap H) \cap F'$ es denso en F'_σ. En efecto, puesto que E' es denso en E^*_σ y H es un hiperplano cerrado de E^*_σ se tiene que $E' \cap H$ es denso en H y, por lo tanto, $w(E' \cap H)$ es denso en $w(H) = F^*_\sigma$. Es inmediato que $w(E' \cap H) \subset F'$, por lo que $w(E' \cap H)$ es denso en F'_σ.

Por hipótesis, $G \cap E'$ es denso en E'_σ, por lo que $G \cap E' \cap H$ es denso en $E'_\sigma \cap H$ y, por lo tanto, $w(G \cap E' \cap H)$ es denso en $w(E' \cap H)$, y también en F'_σ. Pero como

$$w(G \cap E' \cap H) = w(G \cap H) \cap w(E' \cap H) \subset w(G \cap H) \cap F',$$

se tiene que este último conjunto es denso en F'_σ, c. q. d.

Para algunas demostraciones que veremos después vamos a necesitar los siguientes resultados:

a) *Si F es un espacio de codimensión finita de un espacio tonelado, entonces F es tonelado.*

b) *Si F es un subespacio de codimensión infinita numerable de un espacio tonelado, entonces F es tonelado.*

c) *Si $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente de subespacios del espacio tonelado E, tales que $E = \bigcup_{1=n}^{\infty} E_n$ entonces E es el límite inductivo estricto de dicha sucesión.*

El resultado a) ha sido dado por J. DIEUDONNÉ en [2]. Los resultados b) y c) han sido obtenidos por nosotros en [8].

TEOREMA 9.

Sea F un subespacio de codimensión infinita numerable del espacio E. Si F es un espacio Γ, entonces E es un espacio Γ.

Demostración:

Supongamos que E no sea un espacio Γ. Por el Teorema 6, existe un espacio tonelado G y una aplicación lineal u de E sobre G, cuya gráfica es cerrada, de manera que u no es abierta.

Sea $A = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ un conjunto de E tal que la envoltura lineal de $F \cup A$ coincida con E, y sea F_n la envoltura lineal de $F \cup \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $n = 1, 2, ...$ Para cada entero positivo n, es inmediato que $u(F_n)$ es de codimensión a lo sumo numerable en G, y, aplicando los resultados a) y b) se deduce que $u(F_n)$ es un espacio tonelado. Por otra parte, F es de codimensión finita en F_n, por lo que, teniendo en cuenta el Teorema 7, F_n es un espacio Γ. Si u_n es la restricción de u a F_n, su gráfica será cerrada en $F_n \times u(F_n)$ y, teniendo en cuenta el Teorema 4, u_1 será abierta.

En E sea $\sqcup$ un entorno del origen, absolutamente convexo. Entonces $u(\sqcup)$ es un conjunto absolutamente convexo y absorbente en G. Para cada entero positivo n, se tiene que

$$u(\sqcup) \cap u(F_n) \supset u(\sqcup \cap F_n) = u_n(\sqcup \cap F_n),$$

por lo que $u(\sqcup) \cap u(F_n)$ es un entorno del origen en $u(F_n)$. Finalmente, por el resultado c), G es el límite inductivo de la sucesión $\{u(F_n)\}_{n=1}^{\infty}$, de donde se deduce que $u(\sqcup)$ es un entorno del origen en G, de aquí que u sea abierta. Hemos llegado, pues, a una contradicción, por lo que E es un espacio Γ, c. q. d.

TEOREMA 10.

Sea F un subespacio de codimensión infinita numerable del espacio E. Si F es un espacio Γ_r, entonces E es un espacio Γ_r.

Demostración:

Supongamos que E no sea un espacio Γ_r. Entonces, por el Teorema 2, existe un espacio tonelado G y una aplicación lineal y biyectiva v de G en E, cuya gráfica es cerrada, de manera que v no es continua. Entonces $u = v^{-1}$ será una aplicación lineal no abierta de E sobre G, cuya gráfica es cerrada. El resto de la demostración es la prueba del teorema anterior.

TEOREMA 11.

Si E es un espacio Γ y F es un subespacio cerrado de E, entonces F es un espacio Γ.

Demostración:

Sea $\mathcal{T}$ la topología localmente convexa más fina sobre E. Entonces la topología de $F[\mathcal{T}]$ es la topología localmente convexa más fina. Si u es la inyección canónica de $F[\mathcal{T}]$ en $E[\mathcal{T}]$ y v es la aplicación traspuesta de la u, se tiene, por ser $F[\mathcal{T}]$ cerrado en $E[\mathcal{T}]$, que v es un morfismo estricto de F^*_σ en E^*_σ.

Sea G un subespacio de F^*_σ en el que toda parte cerrada y acotada sea compacta, y veamos que $G \cap F'$ es cerrado en F'_σ, con lo que tendremos demostrado el teorema.

Sea A una parte cerrada y acotada del subespacio de E^*_σ, $v^{-1}(G)$. Si $\sqcup$ es el conjunto polar de A en $E[\mathcal{T}]$ se tiene que $\sqcup$ es un entorno del origen en $E[\mathcal{T}]$ y $u^{-1}(\sqcup)$ es un entorno del origen en $F[\mathcal{T}]$. Se tiene que

$$\sqcup^{\circ} = v^{-1}([u^{-1}(\sqcup)]^{\circ}),$$

en donde $\sqcup^0$ y $[u^{-1}(\sqcup)]^0$ son los conjuntos polares de $\sqcup$ y $u^{-1}(\sqcup)$ en E^* y F^*, respectivamente. $\sqcup^0$ es la envoltura absolutamente convexa cerrada de A, pero como la envoltura absolutamente convexa cerrada de $v(A)$ en G es cerrada en F^*_σ se tiene que dicho conjunto es igual a $(u^{-1}(\sqcup))^0$, de aquí que $\sqcup^0 = v^{-1}([u^{-1}(\sqcup)]^0)$ esté contenido en $v^{-1}(G)$, por lo que A será cerrada en E^*_σ y, por lo tanto, compacta. Pero como E es un espacio Γ se tiene que $v^{-1}(G) \cap E'$ es cerrado en E'_σ.

Sea v_1 la restricción de v a E'. Puesto que F es cerrado en E, v_1 es un morfismo estricto de E'_σ sobre F'_σ. El núcleo de v_1 es el conjunto polar de F en E', pero como $v^{-1}(G)$ contiene al núcleo de v, se tiene que

$$v_1{}^{-1}(0) \subset v^{-1}(G) \cap E',$$

y puesto que este último conjunto es cerrado en E'_σ, resulta que

$$v_1(v^{-1}(G) \cap E'), \qquad (1),$$

es cerrado en F'_σ. Veamos, ahora, que el conjunto (1) es igual a $G \cap F'$, con lo que quedará demostrado el teorema. En efecto,

$$v_1(v^{-1}(G) \cap E') = v(v^{-1}(G) \cap E') \subset G \cap F',$$

pero si $z' \in G \cap F'$, existe un $x' \in v^{-1}(G)$ y un $y' \in F'$, tales que $v(x') = v(y') = z'$, es decir que $x' - y'$ está en el núcleo de v y, por lo tanto, $y' - x' \in v^{-1}(G)$, y de aquí $y' \in x' + v^{-1}(G) = v^{-1}(G)$, de donde se deduce que

$$y' \in v^{-1}(G) \cap F',$$

y por lo tanto,

$$v_1(v^{-1}(G) \cap E') = G \cap F' \qquad \text{c. q. d.}$$

TEOREMA 12.

Si E es un espacio Γ_r y F es un subespacio cerrado de E, entonces F es un espacio Γ_r.

Demostración:

Es la misma que la del teorema anterior, tomando $G \cap F'$ denso en F'_σ, con lo que resulta que $v^{-1}(G) \cap E'$ es denso en E'_σ.

TEOREMA 13.

Sea L un subespacio tonelado del espacio E y sea F un espacio Γ_r. *Si u es una aplicación lineal de L en F, cuya gráfica es cerrada en* $E \times F$, *entonces L es cerrado en E.*

Demostración:

Supongamos que L no es cerrado. Si $\overline{L}$ es la clausura de L en E, sea x_0 un elemento de $\overline{L}$ que no esté en L. Si M es el subespacio engendrado por $\{x_0\}$, sea G la suma topológica directa de F y M. Evidentemente a F se le puede considerar como un subespacio de G, de codimensión uno, por lo que, aplicando el Teorema 8, G será un espacio Γ_r. Si P es el subespacio de E engendrado por $L \cup \{x_0\}$, extendemos u a una aplicación lineal v de P en G, poniendo $v(x_0) = x_0 \in G$. Veamos que la gráfica de v es cerrada en $P \times G$. Si $\{x_n : n \in D\}$ es una red cualquiera en P que converge a $x \in P$, de manera que la red $\{v(x_n) : n \in D\}$ converge a y, hemos de comprobar que $y = v(x)$. Ponemos:

$$x_n = \alpha_n x_0 + z_n, \qquad \alpha_n \in K, \qquad z_n \in L, \qquad n \in D,$$

de donde se deduce que

$$v(x_n) = \alpha_n x_0 + v(z_n) = \alpha_n x_0 + u(z_n)$$

pero como M es el complemento topológico de F en G y $\lim_{n \in D} v(x_n) = y$, existe un número $\alpha \in K$ tal que $\lim_{n \in D} \alpha_n = \alpha$. Entonces se tiene que

$$\lim_{n \in D} z_n = \lim_{n \in D} (x_n - \alpha_n x_0) = x - \alpha x_0$$

$$\lim_{n \in D} u(z_n) = \lim_{n \in D} (v(x_n) - \alpha_n x_0) = y - \alpha x_0,$$

pero como la gráfica de u es cerrada en $E \times F$, resulta que

$$x - \alpha x_0 \in L, \qquad u(x - \alpha x_0) = y - \alpha x_0$$

y, por lo tanto, $v(x - \alpha x_0) = v(x) - \alpha x_0 = y - \alpha x_0$, luego $v(x) = y$.

Hemos visto, pues, que la gráfica de v es cerrada en $P \times G$, y puesto que P es, evidentemente, un espacio tonelado, y G es un espacio Γ_r, aplicamos el Teorema 1, de donde se deduce que v es continua. Además F es cerrado en G, por lo que $v^{-1}(F) = L$ es cerrado en P, lo cual es un absurdo, ya que $P \subset \bar{L}$, c. q. d.

TEOREMA 14.

Sea L un subespacio tonelado del espacio E y sea F un espacio Γ_r, Si u es una aplicación lineal y continua de L en F, entonces existe una extensión continua v de u, de $\bar{L}$, clausura de L en E, en F.

Demostración:

Sea $\hat{F}$ la completación de F. Extendemos u en una aplicación continua w de $\bar{L}$ en $\hat{F}$. Sea v la restricción de w a $w^{-1}(F)$. Evidentemente la gráfica de v es cerrada en $\bar{L} \times F$, y puesto que $L \subset w^{-1}(F)$ se tiene que este último espacio es tonelado, de donde, aplicando el teorema anterior, resulta que $w^{-1}(F)$ es cerrado en $\bar{L}$ y, por lo tanto, $w^{-1}(F) = \bar{L}$, c. q. d.

Es sabido que si u es una aplicación lineal continua del espacio E en el espacio completo F, existe una extensión continua v de u, definida en $\hat{E}$, completado de E, y con valores en F. El siguiente resultado pone de manifiesto que si E es tonelado y F es un espacio Γ_r, no es necesario exigir que F sea completo.

COROLARIO 1.14

Sea u una aplicación lineal continua del espacio tonelado E en el espacio F. Si F es un espacio Γ_r existe una extensión continua v de u, definida en $\hat{E}$, completado de E, y con valores en F.

TEOREMA 15. *(Teorema de localización)*

Sea E un subespacio del espacio de Baire G, de manera que la codimensión de E es finita e igual a p. Sea F la envoltura localmente convexa de la sucesión $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ de espacios Γ_r, tales que $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = F$.

Si u es una aplicación lineal de E en F, cuya gráfica es cerrada, existe un subespacio cerrado M de E, de codimensión no mayor que p, y un entero positivo n_0, de manera que $u(M) \subset F_{n_0}$.

Demostración:

Sea $\{x_1, x_2, ..., x_p\}$ un conjunto de elementos de G, tal que la envoltura lineal de $E \cup \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ coincide con G. Sea G_n la envoltura lineal de $u^{-1}(F_n) \cup \{x_1, x_2, ..., x_p\}$. Puesto que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} u^{-1}(F_n)$, se tiene que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, por lo que existe un entero positivo n_0 tal que G_{n_0} es de segunda categoría en G y, por lo tanto, teniendo en cuenta el resultado a), $u^{-1}(F_{n_0})$ es tonelado. Evidenteemnte la restricción de u a $u^{-1}(F_{n_0})$ tiene su gráfica cerrada en $E \times E_{n_0}$, por lo que, aplicando el Teorema 13, $u^{-1}(F_{n_0})$ es cerrado en E. Sea H_{n_0} la clausura en G de $u^{-1}(F_{n_0})$. Sea S_{n_0} la envoltura lineal de $H_{n_0} \cup \{x_1, x_2, ..., x_p\}$. Evidentemente S_{n_0} es cerrado en G, y puesto que $S_{n_0} \supset G_{n_0}$, se tiene que S_{n_0} es de segunda categoría en G, de aquí que $S_{n_0} = G$. Además $H_{n_0} \cap E = u^{-1}(F_{n_0}) = M$, y, por lo tanto, M es cerrado en E, de codimensión finita no mayor que p, y tal que $u(M) \subset F_{n_0}$, c. q. d.

Corolario 1.15

Si en el enunciado del Teorema 15, se tiene que $F_n \subset F_{n+1}$, entonces existe un entero positivo n_1, de manera que $u(E) \subset F_{n_1}$.

Demostración:

En el Teorema 15, sea $y_1, y_2, ..., y_q$ una cobase de M. Sea $n_1 = \text{máx}\,\{n_0, m_1, m_2, ..., m_q\}$, en donde m_j es tal que $u(y_j) \in F_{m_j}$, $j = 1, 2, ..., q$. Evidentemente $u(E) \subset F_{n_1}$, c. q. d.

Definicion 3

Decimos que E es un espacio infra-Baire si existe un espacio G de Baire, tal que E es un subespacio de G de codimensión finita.

Es inmediato que todo subespacio de codimensión infinita numerable de un espacio de Baire es un espacio infra-Baire.

Teorema 16.

Sean E la envoltura localmente convexa de espacios infra-Baire y F la envoltura localmente convexa de la sucesión $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ de espacios Γ_r, de manera que $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Si u es una aplicación lineal de E en F, cuya gráfica es cerrada, entonces u es continua.

Demostración:

Si E es la envoltura localmente convexa de la familia de espacios infra-Baire $\{E_i : i \in I\}$ y u_i es la restricción de u a E_i, $i \in I$, basta probar que u_i es continua. Evidentemente la gráfica de u_i es cerrada en $E_i \times F$, por lo que, teniendo en cuenta el Teorema 15, existe un subespacio M_i de E_i, cerrado y de codimensión finita, y un entero positivo $n(i)$, tal que $u_i(M_i) \subset F_{n(i)}$. La gráfica de v_i, restricción de u_i a M_i, es cerrada en $M_i \times F_{n(i)}$, y puesto que M_i es tonelado y $F_{n(i)}$ es un espacio Γ_r, se tiene que v_i es continua y, por lo tanto, u_i es continua, c. q. d.

Vamos a necesitar los dos siguientes resultados que hemos dado en [9]:

d) *Sea E la envoltura localmente convexa de la familia de espacios tonelados $\{E_i : i \in I\}$. Sea L un subespacio de E tal que $L \cap E_i$ es de codimensión a lo sumo infinita numerable en E_i, $i \in I$. Entonces L es la envoltura localmente convexa de la familia $\{L \cap E_i : i \in I\}$, en donde la topología de $L \cap E_i$ es la inducida por E_i. Como consecuencia L es un espacio tonelado.*

e) *Supongamos que se cumplen las condiciones del enunciado d). Si G es un subespacio de E, complemento algebraico de L, y $L \cap E_i$ es cerrado en E_i, $i \in I$, entonces G es complemento topológico de L, y la topología de G es la topología localmente convexa más fina.*

Teorema 17.

Sea E la envoltura localmente convexa de la familia de espacios tonelados $\{E_i : i \in I\}$, y sea F un espacio Γ_r. Sean L y G dos subespacios de E, tales que L es complemento algebraico de L, y $L \cap E_i$ es de codimensión a lo sumo infinita numerable en E_i, $i \in I$. Si u es una *aplicación lineal de L en F, cuya gráfica es cerrada en $E \times F$, entonces u es continua, E es la suma topológica de L y G, y la topología de G es la topología localmente convexa más fina.*

Demostración:

Teniendo en cuenta el resultado d), L es tonelado, de donde se deduce que u es continua. Aplicando el Teorema 13, L es cerrado y, por lo tanto, aplicando el resultado e) G es el complemento topológico de L y la topología de G es la topología localmente convexa más fina, c. q. d.

TEOREMA 18.

Sea E la envoltura localmente convexa de la familia de espacios infra-Baire $\{E_i : i \in I\}$, y F la envoltura localmente convexa de la sucesión $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ de espacios Γ_r, tales que $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = F$. Sean L y G dos subespacios de E, tales que L es complemento algebraico de G, y $L \cap E_i$ es de codimensión a lo sumo infinita numerable en E_i, $i \in I$. Si u es una aplicación lineal de L en F, cuya gráfica es cerrada en $E \times F$, entonces u es continua, E es la suma topológica de L y G, y la topología de G es la topología localmente convexa más fina.

Demostración:

Si u_i es la restricción de u a $E_i \cap L$ se tiene, evidentemente, que la gráfica de u_i es cerrada en $E_i \times F$. Por el Teorema 15 existe un subespacio cerrado M_i de $E_i \cap L$, de codimensión finita, y un entero positivo $n(i)$ de manera que $M_i(M_i) \subset F_{n(i)}$. Por el Teorema 13, M_i será cerrado en E_i y, por lo tanto $E_i \cap L$ es cerrado en E_i. Basta aplicar ahora, los resultados d) y e) y el Teorema 16, para tener la conclusión del teorema, c. q. d.

TEOREMA 19.

Sea L un subespacio del espacio E. Sea u una aplicación lineal de L en el espacio F, de manera que la gráfica de u es cerrada en $E \times F$. Si E es un espacio Γ y $u(L)$ es tonelado, entonces $u(L)$ es cerrado en F.

Demostración:

Vamos a hacer una demostración análoga a la del Teorema 13. Supongamos que $u(L)$ no es cerrado en F. Entonces existe un x_0 en $\overline{u(L)}$, clausura de $u(L)$ en F, tal que $x_0 \notin u(L)$. Sea M el espacio engendrado por $\{x_0\}$ y sea G la suma topológica directa de E y M. Extendemos u en una aplicación lineal v definida en $L \oplus M$, poniendo $v(x_0) = x_0$, y veamos que la gráfica de v es cerrada en $G \times F$. Sea $\{x_n : n \in D\}$ una red de elementos de G que converge a x, de manera que la red $\{v(x_n) : n \in D\}$ está definida y converge a y. Hay que comprobar que v está definida en x, y que $v(x) = y$. Podemos poner:

$$x_n = \alpha_n x_0 + z_n, \qquad \alpha_n \in K, \qquad z_n \in L$$

de donde se deduce que

$$v(x_n) = \alpha_n v(x_0) + v(z_n) = \alpha_n x_0 + u(z_n), \qquad (1).$$

Como E es la suma topológica de E y M se tiene que

$$\lim_{n \in D} x_n = x = \lim_{n \in D} \alpha_n x_0 + \lim_{n \in D} z_n = \alpha x_0 + \lim_{n \in D} z_n,$$

siendo α un elemento de K, y, por lo tanto,

$$\lim_{n \in D} z_n = x - \alpha x_0.$$

Teniendo en cuenta (1) resulta que

$$\lim_{n \in D} u(z_n) = \lim_{n \in D} v(x_n) - \lim_{n \in D} \alpha_n x_0 = y - \alpha x_0,$$

y puesto que la gráfica de u es cerrada en $E \times F$, se tiene que u debe estar definida en $x - \alpha x_0$ y verificar

$$u(x - \alpha x_0) = y - \alpha x_0,$$

de donde se deduce que $x - \alpha x_0 \in L$, y, por lo tanto, $x \in L \oplus M$, por lo que v está definida en x. Además, $y - \alpha x_0 = u(x - \alpha x_0) = v(x - \alpha x_0) = v(x) - \alpha x_0$, y de aquí resulta que $y = v(x)$. es decir que la gráfica de v es cerrada en $G \times F$.

Por el Teorema 7, G es un espacio Γ, y puesto que, evidentemente, el espacio $u(L) + M$ es tonelado, se tiene que v es abierta.

El núcleo de v está en L y este último espacio es cerrado en $L \oplus M$, de donde se deduce que $v(L) = u(L)$ es cerrado en $u(L) + M$, en contra de la hipótesis de que $x_0 \in \overline{u(L)}$, c. q. d.

TEOREMA 20.

Sea E la envoltura localmente convexa de la sucesión $\{E_n\}_{1=u}^{\infty}$ de espacios Γ, tales que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Sea F un subespacio del espacio de Baire G, de manera que la codimensión de F es finita e igual a p. Si u es una aplicación lineal del subespacio L de E sobre F, cuya gráfica es cerrada en $E \times F$, existe un entero positivo n_0 de manera que $u(L \cap E_{n_0})$ es un subespacio cerrado de F, de codimensión no mayor que p.

Demostración:

Sea $\{x_1, x_2, ..., x_p\}$ un conjunto de elementos de G, tal que la envoltura lineal de $F \cup \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ coincide con G. Sea G_n la envoltura lineal de $u(L \cap E_n) \cup \{x_1, x_2, ..., x_p\}$. Puesto que $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} u(L \cap E_n)$, se tiene que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, por lo que existe un entero positivo n_0 tal que G_{n_0} es de segunda categoría en G y, por lo tanto, teniendo en cuenta el resultado a), $u(L \cap E_{n_0})$ es tonelado. La gráfica de la restricción de u a $L \cap E_{n_0}$ es cerrada en $E_{n_0} \times F$, por lo que, aplicando el Teorema 19, $u(L \cap E_{n_0})$ es cerrado en F. Sea H_{n_0} la clausura en G de $u(L \cap E_{n_0})$. Sea S_{n_0} la envoltura lineal de $H_{n_0} \cup \{x_1, x_2, ..., x_p\}$. Se tiene que S_{n_0} es cerrado en G y, puesto que $S_{n_0} \supset G_{n_0}$, resulta que S_{n_0} es de segunda categoría en G, de aquí que $S_{n_0} = G$. Además $H_{n_0} \cap F = u(L \cap E_{n_0})$ y, por lo tanto $u(L \cap E_{n_0})$ es cerrado en F y de codimensión no mayor que p, c. q. d.

COROLARIO 1,20

Si en el enunciado del Teorema 20 se tiene que $E_n \supset E_{n+1}$, entonces existe un entero positivo n_1, tal que $u(L \cap E_{n_1}) = F$.

Demostración:

En el Teorema 20, sea $y_1, y_2, ..., y_q$ una cobase de $u(L \cap E_{n_0})$. Sea $n_1 = \text{máx}\ \{n_0, m_1, m_2, ..., m_q\}$ en donde m_j es tal que $y_j \in u(L \cap E_{m_j})$, $j = 1, 2, ..., q$. Se tiene entonces, $u(L \cap E_{n_1}) = F$, c. q. d.

TEOREMA 21.

Sea E la envoltura localmente convexa de la sucesión $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ *de espacios* Γ, *tales que* $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$. *Sea F la envoltura localmente convexa de la familia* $\{E_i\} : i \in I$ *de espacios infra-Baire. Si u es una aplicación lineal del subespacio L de E sobre F, cuya gráfica es cerrada es* $E \times F$, *entonces u es abierta.*

Demostración:

Dado un i cualquiera de I, sea u_i la restricción de u a $u^{-1}(F_i)$. La gráfica de u_i es cerrada en $E \times E_i$, por lo que, aplicando el Teorema 20, existirá un entero positivo n_0, tal que $u_i(u^{-1}(F_i) \cap E_{n_0})$ es cerrado y de codimensión finita en F_i. La gráfica de v_i, restricción de u_i a $u^{-1}(F_i) \cap E_{n_0})$ es cerrada en $E_{n_0} \times u_i(u^{-1}(F_i) \cap E_{n_0})$, y puesto que $u_i(u^{-1}(F_i) \cap E_{n_0})$ es tonelado y E_{n_0} es un espacio Γ se tiene, aplicando el Teorema 4, que v_i es abierta de $u^{-1}(F_i) \cap E_{n_0}$ en $u^{-1}(F_i) \cap E_{n_0}$, y, por lo tanto, u_i es abierta de $u^{-1}(F_i)$ en F_i. Como F es la envoltura localmente convexa de la familia de espacios $\{F_i : i \in I\}$ es inmediato que u es abierta, c. q. d.

G. KÖTHE ha demostrado en [4] el siguiente teorema:

f) *Sea E un espacio B-completo y sea F un espacio tonelado. Sea u una aplicación lineal del subespacio L de E en F, de manera que* $u(L)$ *es de codimensión finita en F. Si la gráfica de u es cerrada en* $E \times F$, *entonces u es abierta y* $u(L)$ *es cerrado en F.*

Nuestro Teorema 22 es más general que el resultado anterior.

TEOREMA 22.

Sea E un espacio Γ *y F la envoltura localmente convexa de la familia de espacios tonelados* $\{F_i : i \in I\}$. *Sea u una aplicación lineal del subespacio L de E en F, de manera* $u(L) \cap F_i$ *es de codimensión a lo sumo infinita numerable en* F_i, $i \in I$. *Si la gráfica de u es cerrada en* $E \times F$, *y G es un subespacio de F, complemento algebraico de* $u(L)$, *entonces u es abierta, G es complemento topológico de* $u(L)$, *y la topología de G es la topología localmente convexa más fina.*

Demostración:

Por el resultado d), $u(L)$ es tonelado, por lo que, aplicando el Teorema 4, u es abierta. Teniendo en cuenta el Teorema 19, $u(L)$ es cerrado en F, de donde se deduce, observando el resultado e) que G es el complemento topológico de $u(L)$, y que la topología de G es la topología localmente convexa más fina, c. q. d.

TEOREMA 23.

Sea G la envoltura localmente convexa de la sucesión $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ de espacios Γ, tales que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$. Sea F la envoltura localmente convexa de la familia de espacios infra-Baire $\{F_i : i \in I\}$. Sea u una aplicación lineal del subespacio L de E en F, de manera que $u(L) \cap F_i$ es de codimensión a lo sumo infinita numerable en F_i, $i \in I$. Si la gráfica de u es cerrada en $E \times F$ y G es un subespacio de F, complemento algebraico de $u(L)$, entonces u es abierta, G es complemento topológico de $u(L)$, y la topología de G es la topología localmente convexa más fina.

Demostración:

Si u_i es la restricción de u a $u^{-1}(F_i)$ se tiene que la gráfica de u_i es cerrada en $E \times E_i$. Por el Teorema 20 existe un entero positivo n_0, tal que $u_i(u^{-1}(F_i) \cap E_{n_0})$ es cerrado y de codimensión finita en F_i y, por lo tanto, $F_i \cap u(L)$ es cerrado en F_i. Basta aplicar, ahora, los resultados d) y e) y el Teorema 22, para tener la conclusión del teorema, c. q. d.

BIBLIOGRAFIA

[1] ADASCH, N.: *Tonnelierte Räume und zwei Satze von Banach.* Math. Ann. *186*, 209-214 (1970).

[2] DIEUDONNÉ, J.: *Sur les propriétés de permanence de certains espaces vectoriels topologiques.* Ann. Soc. Pol. Math. *25*, 1952, pp. 50-55.

[3] HORVÁTH, J.: *Topological Vector Spaces and Distributions.* V. I. Massachussets, 1966

[4] KÖTHE, C.: *Die Bibräume abgeschlossener Operatoren.* J. reine angew. Math. *232*, 1968, pp. 110-111.

[5] ROBERTSON-ROBERTSON, A. AND W.: *On the closed graph theorem.* Proc. Glasgow Math. Assoc. *3*, 1956, pp. 9-12.

[6] SCHAEFER, H. H.: *Topological Vector Spaces.* New York, 1966.

[7] VALDIVIA, M.: *El teorema general de la gráfica cerrada en los espacios vectoriales topológicos localmente convexos.* Rev. Real Acad. Ciencias. T. LXII, Madrid, 1968, pp. 545-551.

[8] VALDIVIA, M.: *Absolutely convex sets in barrelled spaces.* Ann. Inst. Fourier. *21* (1971)

[9] VALDIVIA, M.: *On final topologies.* J. reine angew. Math. (Pendiente de publicación).

[10] KÓMURA, Y.: *On linear topological spaces.* Kumamoto J. Science, Series A, *5*, Nr. 3, pp. 148-157 (1962).