DIREKTE SUMMEN UND PRODUKTE GEWISSER LOKALKONVEXER VEKTORVERBÄNDE

por

DIETER KEIM

Herrn Prof. G. Köthe zum 65. Geburtstag gewidmet

Für einen geordneten Vektorraum untersuchen I. NAMIOKA [4] und H. SCHÄFER ([5] oder [6]) eine lokalkonvexe Topologie 7^0, die durch die Ordnungsstruktur des Raumes bestimmt ist. Wir beschränken uns hier auf Vektorverbände und prüfen Permanenzeigenschaften dieser Ordnungstopologie 7^0 (H. SCHÄFER) bei der Bildung lokalkonvexer Hüllen und topologischer Produkte.

Die lokalkonvexe direkte Summe $\bigoplus\limits_{\gamma} E_\gamma\,(7_\gamma{}^0)$ von Verbänden E_γ, die die Ordnungstopologie $7_\gamma{}^0$ tragen, trägt selbst die Ordnungstopologie des Verbandes $\bigoplus\limits_{\gamma} E_\gamma$.

Die Frage, ob ein Produkt von d Vektorverbänden E_γ $(7_\gamma{}^0)$ die Ordnungstopologie von $\prod E_\gamma$ als Topologie besitzt, läßt sich genau dann bejahen, wenn d eine nicht meßbare Kardinalzahl ist. Diese Aussage ist eine Erweiterung eines Satzes von G. W. MACKEY [3]. Dabei ist es ein offenes Problem, ob es überhaupt meßbare Kardinalzahlen gibt. Wegen des Zusammenhangs mit der Meßbarkeit von d ist unsere Frage gleichwertig mit der Frage, ob ein Produkt von d bornologischen linearen Räumen wieder bornologisch ist (vgl. G. KÖTHE [2], 28.8.).

Jedes abzählbare Produkt $\prod\limits_1^\infty E_n$ $(7_n{}^0)$ trägt die Ordnungstopologie von $\prod\limits_1^\infty E_n$.

Einen Vektorverband E bezeichnen wir als (R)-Raum (Rieszscher Raum). Ein Teilraum F von E heißt (R)-Teilraum, falls mit x und y auch sup (x, y) in F liegt. Ein normaler Teilraum heißt Ideal. Dabei heißt eine Teilmenge M in E normal (solid in [6]), falls $M = \varnothing$ oder falls mit x auch das Ordnungsintervall $[-|x|, |x|]$ in M liegt.

Der lokalkonvexe Raum $E\,(7)$ heißt lokalkonvexer (R)-Raum, falls $\mathfrak{T}$ eine Nullumgebungsbasis aus normalen Mengen besitzt. Eine solche lokalkonvexe (R)-Topologie $\mathfrak{T}$ wird von einem System von (R)-Halbnormen erzeugt, wobei eine Halbnorm q auf E (R)-Halbnorm heißt, falls mit $|x| \leq |y|$ auch $q(x) \leq q(y)$ gilt. Die Menge aller (R)- Halbnormen auf E erzeugt die Ordnungstopologie $\mathfrak{T}^0$ von E. $\mathfrak{T}^0$ ist die feinste (R)-Topologie auf E.

E^b bezeichnet den (R)-Raum aller ordnungsbeschränkten Funktionale auf E. Ist E regulär, bildet also (E, E^b) ein Dualsystem, so ist $\mathfrak{T}^0$ Hausdorffsch und $\mathfrak{T}^0 = \mathfrak{T}_k(E^b)$. $E(\mathfrak{T}^0)$ ist ein bornologischer Raum.

Sind E und die E_γ (R)-Räume, und ist I ein Ideal in E, so sollen die Räume E/I, $\prod\limits_\gamma E_\gamma$ und $\bigoplus\limits_\gamma E_\gamma$ immer mit der kanonischen Ordnung versehen sein. Sie sind dann wieder (R)-Räume.
Wir benötigen einen einfachen Hilfssatz.

(1) E und F seien (R)-Räume, $A\colon E \to F$ ein Verbandshomomorphismus von E auf F. Dann gilt $A([-x, x]) = [-Ax, Ax]$ in F für jedes positive x aus E.

Hieraus folgt, daß das Bild einer normalen Teilmenge von E normal in F ist. Für bestimmte lokalkonvexe Hüllen $E(\mathfrak{T})$ läßt sich nun zeigen, daß $\mathfrak{T}$ die Ordnungstopologie von E ist.

(2) Die $E_\gamma(\mathfrak{T}_\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, seien lokalkonvexe (R)-Räume. Die Abbildungen $A_\gamma\colon E_\gamma \to E$ seien Verbandshomomorphismen von E_γ in den (R)-Raum E, so daß gilt:
(i) Jedes $A_\gamma(E_\gamma)$ ist ein Ideal in E.
(ii) Die $A_\gamma(E_\gamma)$ spannen E auf.
Dann ist die lokalkonvexe Hülle $E(\mathfrak{T})$ von $(E_\gamma(\mathfrak{T}_\gamma), A_\gamma)$ ein lokalkonvexer (R)-Raum.
Gilt insbesondere $\mathfrak{T}_\gamma = \mathfrak{T}_\gamma^0$ für alle $\gamma \in \Gamma$, so ist $\mathfrak{T}$ die Ordnungstopologie von E.

Beweis. Für alle γ sei $\mathfrak{U}_\gamma$ eine Nullumgebungsbasis in $E_\gamma(\mathfrak{T}_\gamma)$ aus normalen Mengen. Aus jedem $\mathfrak{U}_\gamma$ wählen wir eine Nullumgebung U_γ. Dann ist wegen (1) die Menge $A_\gamma(U_\gamma)$ normal in $A_\gamma(E_\gamma)$, also wegen (i) in E. Damit ist $\bigcup\limits_\gamma A_\gamma(U_\gamma)$ und somit die absolutkonvexe Hülle $\Gamma(\bigcup\limits_\gamma A_\gamma(U_\gamma))$ normal in E. Die Mengen $\Gamma(\bigcup\limits_\gamma A_\gamma(U_\gamma))$ bilden bei verschiedener Wahl der $U_\gamma \in \mathfrak{U}_\gamma$ eine Nullumgebungsbasis für $E(\mathfrak{T})$, $E(\mathfrak{T})$ ist also ein lokalkonvexer (R)-Raum.

Nach dem eben Gezeigten gilt $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{T}^0$ für die Ordnungstopologie $\mathfrak{T}^0$ von E. Haben wir $\mathfrak{T}_\gamma = \mathfrak{T}_\gamma^0$, so sind die positiven Abbildungen A_γ auch für $\mathfrak{T}^0$ stetig. Damit ist $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}^0$.

Als Korollar erhalten wir

(3) Die lokalkonvexe direkte Summe $\bigoplus\limits_\gamma E_\gamma\,(\mathfrak{T}_\gamma^0)$ beliebig vieler (R)-Räume $E_\gamma\,(\mathfrak{T}_\gamma^0)$ trägt die Ordnungstopologie des (R)-Raumes $\bigoplus\limits_\gamma E_\gamma$.

Ist I ein abgeschlossenes Ideal in $E\,(\mathfrak{T}^0)$, dann ist die Quotiententopologie des (R)-Raumes E/I dessen Ordnungstopologie.

(4) Der (R)-Raum $(\bigoplus\limits_\gamma E_\gamma)^b$ ist verbandsisomorph zu $\prod\limits_\gamma\,(E_\gamma)^b$.

Beweis. $(\bigoplus\limits_\gamma E_\gamma\,(\mathfrak{T}_\gamma^0))'$ ist algebraisch isomorph zu $\prod\limits_\gamma E_\gamma\,(\mathfrak{T}_\gamma^0)' = \prod\limits_\gamma\,(E_\gamma)^b$ unter der Zuordnung $\varphi \to (\varphi_\gamma) \in \prod\limits_\gamma\,(E_\gamma)^b$, wenn φ_γ die Einschränkung von $\varphi \in (\bigoplus\limits_\gamma E_\gamma\,(\mathfrak{T}_\gamma^0))'$ auf E_γ bezeichnet. Wegen (3) haben wir aber $(\bigoplus\limits_\gamma E_\gamma\,(\mathfrak{T}_\gamma^0))' = (\bigoplus\limits_\gamma E_\gamma)^b$. Es gelte nun die Beziehung $\sup\,(\varphi^1, \varphi^2) = \varphi$ in $(\bigoplus\limits_\gamma E_\gamma)^b$. Dann ist für jedes $x_\gamma \in E_\gamma$, $x_\gamma \geq 0$, $\sup\,(\varphi_\gamma^1\,(x_\gamma), \varphi_\gamma^2\,(x_\gamma)) = \sup\,(\varphi^1\,(x_\gamma), \varphi^2\,(x_\gamma)) = \varphi\,(x_\gamma) = \varphi_\gamma\,(x_\gamma)$, also $\varphi_\gamma = \sup\,(\varphi_\gamma^1, \varphi_\gamma^2)$. Dies gilt für alle γ, und somit ist auch $\sup\,((\varphi_\gamma^1), (\varphi_\gamma^2)) = (\varphi_\gamma)$ in $\prod\limits_\gamma\,(E_\gamma)^b$.

Wir wollen nun untersuchen, wann ein Produkt $\prod\limits_\gamma E_\gamma\,(\mathfrak{T}_\gamma^0)$ von d (R)-Räumen $E_\gamma\,(\mathfrak{T}_\gamma^0)$, $\gamma \in \Gamma$ mit card $\Gamma = d$, die Ordnungstopologie von $\prod\limits_\gamma E_\gamma$ trägt. Da ein mit seiner Ordnungstopologie versehener regulärer (R)-Raum bornologisch ist, ist es nicht überraschend, daß sich bei der Behandlung dieser Frage ähnliche Schwierigkeiten ergeben wie bei der Frage, ob Produkte bornologischer Räume wieder bornologisch sind (vgl. G. KÖTHE [2], 28.8.).

Mit ω_d bezeichnen wir das d-fache Produkt von $\mathbf{R}$ mit sich selbst, mit φ_d die entsprechende direkte Summe.

(5) Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:
 (i) Es gibt d reguläre (R)-Räume E_γ, so daß die Produkttopologie von $\prod\limits_\gamma E_\gamma\,(\mathfrak{T}_\gamma^0)$ mit der Ordnungstopologie des (R)-Raumes $\prod\limits_\gamma E_\gamma$ übereinstimmt.
 (ii) Der Raum ω_d ist bornologisch.
 (iii) Die Produkttopologie von ω_d ist die Ordnungstopologie.
 (iv) Jedes Produkt $\prod\limits_\gamma E_\gamma\,(\mathfrak{T}_\gamma^0)$ von d Hausdorffschen (R)-Räumen $E_\gamma\,(\mathfrak{T}_\gamma^0)$ trägt als Topologie die Ordnungstopologie von $\prod\limits_\gamma E_\gamma$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): $E_\gamma\ (\mathfrak{T}_\gamma^0)$ ist ein bornologischer Raum für jedes γ, und wegen (i) gilt dies auch für das Produkt $\prod_\gamma E_\gamma\ (\mathfrak{T}_\gamma^0)$. Nach G. KÖTHE [2], 28.8. (3) ist dann auch ω_d bornologisch.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): ω_d ist ein vollständiger lokalkonvexer (R)-Raum, der nach (ii) bornologisch ist. Dann trägt ω_d die Ordnungstopologie (vgl. etwa H. SCHÄFER [6], V. 5.5).

(iv) $\Rightarrow$ (i) ist klar. Vor dem Beweis von (iii) $\Rightarrow$ (iv) zeigen wir den folgenden Hilfssatz (vgl. G. KÖTHE [2], 28.8.(1)).

(6) Trägt ein Produkt $\prod_\gamma E_\gamma\ (\mathfrak{T}_\gamma^0)$ nicht die Ordnungstopologie von $\prod_\gamma E_\gamma$, so existiert eine nicht triviale (R)-Halbnorm auf $\prod_\gamma E_\gamma$, die auf $\bigoplus_\gamma E_\gamma$ verschwindet.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß es zu jeder (R)-Halbnorm p auf $\prod_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ eine endliche Teilmenge Γ_0 der Indexmenge Γ gibt, so daß gilt $\bigoplus_{\gamma\in\Gamma/\Gamma_0} E_\gamma \subseteq N(p)$, wenn $N(p)$ der Kern von p in $\prod_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ ist (ein Raum $\bigoplus_{\gamma\in\Gamma/\Gamma_0} E_\gamma$ soll immer in natürlicher Weise als Teilraum von $\prod_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ aufgefaßt werden). Nehmen wir an, dies ist falsch. Dann existiert ein Element $x_1 = (x_\gamma^1) \in \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ mit $p(x_1) = 1$. Sei Γ_1 die endliche Menge der $\gamma \in \Gamma$, für die $x_\gamma^1 \neq 0$. Es gibt ein $x_2 = (x_\gamma^2) \in \bigoplus_{\gamma\in\Gamma/\Gamma_1} E_\gamma$ mit $p(x_2) = 2$. Γ_2 sei die Menge der Indizes aus Γ, für die sowohl $x_\gamma^1 \neq 0$ als auch $x_\gamma^2 \neq 0$. So fortfahrend erhalten wir eine Folge (x_n), wobei $x_n \in \bigoplus_{\gamma\in\Gamma/\Gamma_{n-1}} E_\gamma$ und $p(x_n) = n$. Dabei ist $\Gamma_{n-1} = (\bigcup_1^{n-2} \Gamma_k) \cup \{\gamma \in \Gamma\colon x_\gamma^{n-1} \neq 0\}$, $n \geq 3$. Die Menge (x_n) ist ordnungsbeschränkt in E, während die (R)-Halbnorm p nicht beschränkt auf ihr ist. Das ist ein Widerspruch.

$\prod_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma\ (\mathfrak{T}_\gamma^0)$ ist ein lokalkonvexer (R)-Raum. Ist nun seine Topologie nicht die Ordnungstopologie von $\prod_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$, so existiert eine (R)-Halbnorm q auf dem Produkt, die nicht stetig ist. Zu q gibt es eine endliche Menge $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ mit $\bigoplus_{\gamma\in\Gamma/\Gamma_0} E_\gamma \subseteq N(q)$. Sei q_1 die Einschränkung von q auf $\bigoplus_{\gamma\in\Gamma_0} E_\gamma$, q_2 die von q auf $\prod_{\gamma\in\Gamma/\Gamma_0} E_\gamma$. Die (R)-Halbnorm q_1 ist auf $\bigoplus_{\gamma\in\Gamma_0} E_\gamma\ (\mathfrak{T}_\gamma^0)$ stetig, denn dieser Raum trägt nach (3) die Ordnungstopologie. Wir können q_1 und q_2 als (R)-Halbnormen auf $\prod_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma_0} E_\gamma \oplus \prod_{\gamma\in\Gamma/\Gamma_0} E_\gamma$ auffassen. Es gilt dann $\bigoplus_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma \subseteq N(q_2)$ sowie $q_2 \neq 0$. Denn wäre $q_2 = 0$, so hätten wir $q(x) \leq q_1(x)$ für alle $x \in \prod_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ und q wäre mit q_1 stetig. Die Halbnorm q_2 hat also die verlangten Eigenschaften.

Beweis von (5), (iii) $\Rightarrow$ (iv). Es gebe ein Produkt $\prod_\gamma E_\gamma\,(\mathfrak{T}_\gamma^0)$, das nicht die Ordnungstopologie trägt. Dann existiert nach dem vorigen Hilfssatz eine (R)-Halbonorm $q \neq 0$ auf $\prod_\gamma E_\gamma$ mit $\bigoplus_\gamma E_\gamma \subseteq N(q)$. Sei $x = (x_\gamma) \in \prod_\gamma E_\gamma$ mit $q\,(x) \neq 0$. Wir können x positiv wählen. Bezeichnet $[x_\gamma]$ den von x_γ erzeugten linearen Raum, so ist der (R)-Teilraum $\prod_\gamma [x_\gamma]$ von $\prod_\gamma E_\gamma$ verbandsisomorph zu einem $\omega_{d'}$ mit $d' \leq d$. Da $\prod_\gamma E_\gamma\,(\mathfrak{T}_\gamma^0)$ Hausdorffsch ist, ist $\prod_\gamma [x_\gamma]$ in der induzierten Topologie auch topologisch isomorph zu $\omega_{d'}$. Wir identifizieren $\prod_\gamma [x_\gamma]$ mit $\omega_{d'}$. Aus (iii) folgt wegen (3), daß auch $\omega_{d'}$ die Ordnungstopologie trägt. Die Einschränkung $\bar{q}$ von q auf $\omega_{d'}$ ist eine (R)-Halbnorm, also stetig. Da $\varphi_{d'}$ dicht in $\omega_{d'}$ ist und $\varphi_{d'} \subseteq N\,(\bar{q})$ gilt, haben wir $\bar{q} = 0$. Das widerspricht der Wahl von $x = (x_\gamma)$.

Es ist nicht bekannt, ob ω_d für jede Kardinalzahl d bornologisch ist. Wegen (5) und G. KÖTHE [2], 28.8.(3) ist unsere Frage nach der Art der Produkte $\prod_\gamma E_\gamma\,(\mathfrak{T}_\gamma^0)$ für (R)-Räume E_γ gleichwertig mit der Frage, ob Produkte bornologischer linearer Räume $F_\gamma\,(\mathfrak{T}_\gamma)$ wieder bornologisch sind. Auch besteht ein enger Zusammenhang mit mengentheoretischen Problemen. So gilt (5), (iv) nach dem Satz von MACKEY-ULAM (G. KÖTHE [2], 28.8.(6)) jedenfalls dann, wenn d kleiner als die kleinste stark unerreichbare Kardinalzahl ist. Es gilt (5), (iv) genau dann, wenn d eine nicht meßbare Kardinalzahl ist (G. W. MACKEY [3]).

Da $\omega_{\aleph_0}$ bornologisch ist, haben wir

(7) Die Produkttopologie von $\prod_1^\infty E_n\,(\mathfrak{T}_n^0)$ stimmt mit der Ordnungstopologie des (R)-Raumes $\prod_1^\infty E_n$ überein.

(8) Der Dualraum $(\prod_\gamma E_\gamma\,(\mathfrak{T}_\gamma^0))'$ ist verbandsisomorph zu $\bigoplus_\gamma (E_\gamma)^b$. Der (R)-Raum $\bigoplus_\gamma (E_\gamma)^b$ ist somit ein Band in $(\prod_\gamma E_\gamma)^b$.

Beweis. Es gilt $(E_\gamma\,(\mathfrak{T}_\gamma^0))' = (E_\gamma)^b$. Dann ist für $\varphi \in (\prod_\gamma E_\gamma\,(\mathfrak{T}_\gamma^0))'$ die Zuordnung $\varphi \to (\varphi_\gamma) \in \bigoplus_\gamma (E_\gamma)^b$, wobei φ_γ die Einschränkung von φ auf E_γ ist, ein algebraischer Isomorphismus zwischen $(\prod_\gamma E_\gamma\,(\mathfrak{T}_\gamma^0))'$ und $\bigoplus_\gamma (E_\gamma)^b$. Daß diese Zuordnung auch ein Verbandsisomorphismus ist, überlegt man ähnlich wie in (4). In diesem Sinn können wir $(\prod E_\gamma(\mathcal{T}_\gamma^0))'$ und $\underset{\gamma}{\oplus}(E_\gamma)^b$ identifizieren. Die Räume $E_\gamma(\mathcal{T}_\gamma^0)$ sind ordnungstonneliert (Y. C. WONG [7]). Nach N. ADASCH [1], 1.(4) ist auch $\underset{\gamma}{\prod} E_\gamma(\mathcal{T}_\gamma^0)$ ordnungstonneliert. Wegen Y.-C. WONG [7], 3.1 ist damit $(\underset{\gamma}{\prod} E_\gamma(\mathcal{T}_\gamma^0))' = \underset{\gamma}{\oplus}(E_\gamma)^b$ ein Band in $(\underset{\gamma}{\prod} E_\gamma)^b$.

(9) Äquivalent zueinander und zu den Bedingungen (i) bis (iv) in (5) sind:

(i) Für d reguläre (R)-Räume E_γ gilt immer $(\underset{\gamma}{\prod} E_\gamma)^b = \underset{\gamma}{\oplus}(E_\gamma)^b$.

(ii) Es gilt $(\omega_d)^b = \varphi_d$.

(iii) Es gibt d reguläre (R)-Räume E_γ, so daß $(\underset{\gamma}{\prod} E_\gamma)^b = \underset{\gamma}{\oplus}(E_\gamma)^b$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) ist klar. (iii) $\Rightarrow$ (5), (i): Die Produkttopologie $\mathcal{T}$ von $\underset{\gamma}{\prod} E_\gamma(\mathcal{T}_\gamma^0)$ ist die Mackey-Topologie des Dualsystems $(\underset{\gamma}{\prod} E_\gamma, \underset{\gamma}{\oplus}(E_\gamma)^b)$. Wegen (iii) ist $\mathcal{T}$ dann die Ordnungstopologie von $\underset{\gamma}{\prod} E_\gamma$. (5), (iv) $\Rightarrow$ (i): Wegen (8) und (5), (iv) gilt $\underset{\gamma}{\oplus}(E_\gamma)^b = (\underset{\gamma}{\prod} E_\gamma(\mathcal{T}_\gamma^0))'$ $= (\underset{\gamma}{\prod} E_\gamma)^b$.

Für den abzählbaren Fall folgt wegen (7):

(10) Es gilt $(\prod_1^\infty E_n)^b = \bigoplus_1^\infty (E_n)^b$.

LITERATUR

[1] N. Adasch: *Topologische Produkte gewisser topologischer Vektorräume.* Erscheint in Math. Ann..

[2] G. Köthe: *Topologische lineare Räume I.* Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1966.

[3] G. W. Mackey: *Equivalence of a problem in measure theory to a problem in the theory of vector lattices.* Bull. Amer. Math. Soc. 50, 719-722 (1944).

[4] I. Namioka: *Partially ordered linear topological spaces.* Mem. Amer. math. Soc. 24 (1957).

[5] H. Schäfer: *Halbgeordnete lokalkonvexe Vektorräume.* Math. Ann. 135, 115-141 (1958).

[6] H. Schäfer: *Topological vector spaces.* New York: Macmillan 1966.

[7] Y.-C. Wong: *Order-infrabarrelled Riesz spaces.* Math. Ann. 183, 17-32 (1969).

Dieter Keim
Math. Seminar der
J.W. Goethe-Universität
6 FrankfurtM. 1 — Germany