L'UNIVERSO DI DE SITTER-CASTELNUOVO E LA MAGNETOIDRODINAMICA IDEALE

per

GIUSEPPE ARCIDIACONO

(a Roma)

1 – INTRODUZIONE

In questi ultimi anni é stata sviluppata da vari autori la magnetoidrodinamica relativistica, ottenuta accoppiando alle equazioni elettromagnetiche quelle della idrodinamica relativistica, entrambe invarianti per il gruppo di POINCARÉ a 10 parametri [1].

Particolarmente importante é poi il caso in cui il fluido ha una conducibilità elettrica infinita, perché tale ipotesi, oltre a portare ad una notevole semplificazione matematica della teoria, ha un ampio significato fisico, e costituisce il modello per un buon numero di applicazioni.

Nella magnetoidrodinamica relativistica «ideale» che così si ottiene, accade che il campo elettromagnetico si riduce al campo magnetico, per ogni osservatore proprio (cioé solidale al fluido nel punto considerato). Avviene allora che i tensori elettromagnetici H_{ik} (induzione elettrica-campo magnetico) e B_{ik} (campo elettrico-induzione magnetica), oltre ad essere proporzionali, risultano *semplici*, cioé si possono esprimere come il prodotto esterno della velocità relativistica u_i e di un secondo vettore h_i che rappresenta il campo magnetico [2].

Nel 1956 ho fatto vedere che si può ottenere una più adeguata impostazione teorica della magnetoidrodinamica, se utilizziamo la «relatività proiettiva», e cioé se passiamo dal cronotopo di MINKOWSKI (a curvatura nulla) a quello di DE SITTER a curvatura costante, o meglio alla sua rappresentazione geodetica piana (cronotopo di CASTELNUOVO). Il campo elettromagnetico F_{ik} e quello idrodinamico C_i vengono allora riuniti in un unico tensore proiettivo H_{AB}

(A, $B = 1, 2, \dots 5$), che possiamo chiamare il *tensore magnetoidrodinamico*. In conseguenza, la teoria dei fluidi perfetti incompressibili e la teoria del campo elettromagnetico senza induzione, possono essere riunite in una sola teoria, invariante per il gruppo proiettivo di FANTAPPIÉ [3].

Nel 1968 ho completato questo risultato estendendolo al caso dei fluidi perfetti con indice e del campo elettromagnetico con induzione [4]. In questo lavoro mi propongo di dimostrare che la «magnetoidrodinamica ideale», sviluppata con i metodi della relatività proiettiva [5], assume un aspetto assai semplice ed elegante.

Viene così confermata per altra via l'esigenza, espressa da vari fisici, di perfezionare la relatività ristretta, senza abbandonare la sua impostazione gruppale, cosa che può farsi utilizzando il cronotopo di DE SITTER a curvatura costante [6]. Si ottiene quindi una nuova relatività che meglio risponde ai problemi sollevati dalla moderna cosmologia e dalla fisica delle particelle elementari.

2 – FLUIDI ELETTRIZZATI CON CONDUCIBILITA ELETTRICA NULLA

Lo studio di un fluido perfetto elettrizzato, con conducibilità elettrica nulla ($\sigma = 0$), in presenza di un campo elettromagnetico, si fa osservando che la corrente si riduce in questo caso solo a quella di convezione

$$c j_k = \varrho u_k \qquad (k = 1..4) \tag{2,1}$$

Le equazioni del campo elettromagnetico senza induzione sono le seguenti

$$\text{Rot } F_{ik} = 0 \quad ; \quad \text{Div } F_{ik} = - \varrho u_k / c \tag{2,2}$$

A partire da F_{ik} si può costruire il tensore energetico

$$T'_{ik} = F_{is} \, F_{sk} + \frac{1}{4} \, F_{rs} \, F_{rs} \, \delta_{ik} \tag{2,3}$$

ed allora la forza ponderomotrice di LORENTZ é data da

$$f_i = \text{Div } T'_{ik} = F_{ik} j_k = \frac{\varrho}{c} \, u_k \, F_{ik} \tag{2,4}$$

Se poi si tiene presente che il tensore energetico del fluido perfetto é il seguente

(2,5) $$T''_{ik} = \mu' u_i u_k + p\,\delta_{ik} \quad \text{con} \quad \mu' = \mu + p/c^2$$

possiamo costruire il tensore energetico dello schema fluido perfetto-campo elettromagnetico o *tensore energetico totale*

(2.6) $$T_{ik} = T''_{ik} - T'_{ik}$$

Prendendo la Div dei due membri, otteniamo *l'equazione dinamica*

(2,7) $$\partial_k T_{ik} = u_i\, \partial_k\, (\mu' u_k) + \mu' u_k \partial_k u_i + \partial_i p - \frac{\varrho}{c} F_{ik}\, u_k = 0$$

Moltiplicando i due membri per u_i e sommando, l'ultimo termine si annulla, e si ottiene la stessa *equazione di continuità*, valida per i fluidi perfetti

(2,8) $$\boxed{c^2 \partial_k\, (\mu' u_k) = u_i \partial_i\, p}$$

Tenendo conto di questa equazione, la (7) si può scrivere così

(2,9) $$\boxed{\mu' \frac{du_i}{d\tau} + \frac{u_i}{c^2}\frac{dp}{d\tau} + \partial_i p = \frac{\varrho}{c} F_{ik}\, u_k}$$

e ci dà l'equazione dinamica del fluido perfetto elettrizzato [7].

Dalla (8) eseguendo la derivazione e semplificando, segue che

(2,10) $$(\mu c^2 + p)\, \partial_k\, u_k = u_k\, \partial_k(\mu c^2)$$

Nel caso di un fluido perfetto incompressibile, l'equazione di stato é la $p = \mu c^2$, ed allora ne segue che

(2.11) $$\frac{\partial_k\, (\mu\, c^2)}{\mu\, c^2 + p} = \frac{\partial_k p}{\mu'\, c^2} = \frac{\partial_k f}{f}$$

dove f é l'indice del fluido. Dalla (8) si deduce allora che

(2.12) $$\partial_k\, u_k = u_k\, \partial_k\, \log f$$

Si osservi che la (10), in virtù della (11) si può scrivere così $f\, \partial_k\, u_k + u_k\, \partial_k f = 0$ cioé Div $(fu_k) = 0$, ed introducendo il vettore corrente idrodinamica $C_k = fu_k$, avremo

(2,13) $$\text{Div}\ C_k = 0$$

la quale esprime la incompressibilità del fluido.

D'altra parte, l'equazione di conservazione della elettricità $\partial_k(\varrho u_k) = 0$, si può scrivere così $\varrho \partial_k u_k + u_k \partial_k \varrho = 0$, e quindi

$$\partial_k u_k = u_k \partial_k \log \varrho \tag{2,14}$$

Sottraendo membro a membro con la (12) si ricava che

$$u_k \partial_k \log (\varrho/f) = 0 \tag{2,15}$$

e quindi si avrà

$$\boxed{\varrho/f = \text{cost} = k} \tag{2,16}$$

cioé il rapporto k si mantiene costante lungo le linee di corrente. Un fluido si dice elettrizzato in maniera omogenea se il rapporto k é costante in tutto lo spazio. Seguendo il LICHNEROWICZ, un fluido perfetto elettrizzato può essere descritto dal seguente vettore «corrente idrodinamica»

$$C'_i = C_i - k A_i \tag{2,17}$$

dove A_i é il potenziale elettromagnetico. Prendendo il *Rot* dei due membri, si ottiene la seguente espressione del «vortice»

$$\Omega'_{ik} = \Omega_{ik} - k F_{ik} \tag{2.18}$$

cioé al vortice idrodinamico occorre aggiungere un contributo dato dal campo elettromagnetico.

3 – LE EQUAZIONI DI HELMHOLTZ SUI VORTICI

E' noto che nella idrodinamica classica vale il teorema di HELMHOLTZ, che ci dà la legge di formazione dei vortici, e che nel caso dei fluidi barotropici é espresso dalle equazioni

$$d\vec{\omega}/dt = (\vec{\omega} \times \vec{\nabla})\vec{v} \tag{3,1}$$

cioé, in forma tensoriale

$$v_\alpha \partial_\alpha \omega_\beta = \omega_\beta \partial_\beta v_\alpha \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3) \tag{3,2}$$

Ne segue che se inizialmente $\vec{\omega} = 0$, esso rimarrà nullo, cioé in un fluido perfetto un vortice, una volta formato non può essere distrutto, perché la sua intensità é invariabile, o lo é quella totale dei vortici in cui si spezza (primo teorema di HELMHOLTZ).

Per estendere tale teorema alla idrodinamica relativistica, osserviamo che l'equazione dinamica si può scrivere così [8]

$$f_i = C_k\,\Omega_{ik} \quad \text{con} \quad \partial_s\,\Omega_{ik} + \partial_i\,\Omega_{ks} + \partial_k\Omega_{si} = 0 \tag{3,3}$$

In assenza di forze esterne si avrà $C_k\,\Omega_{ik} = 0$ ed allora ne segue che

$$\partial_s\,(C_k\,\Omega_{ik}) - \partial_i\,(C_k\,\Omega_{sk}) = 0$$

sviluppando le derivate e semplificando avremo

$$\Omega_{ik}\,\partial_s\,C_k + C_k\,\partial_s\,\Omega_{ik} - \Omega_{sk}\,\partial_i\,C_k - C_k\,\partial_i\,\Omega_{sk} = 0, \quad \text{cioé}$$

$$\Omega_{ik}\,\partial_s\,C_k - \Omega_{sk}\,\partial_i\,C_k + C_k\,(\partial_s\,\Omega_{ik} - \partial_i\,\Omega_{sk}) = 0$$

e tenendo conto della seconda delle (3) otteniamo le equazioni di HELMHOLTZ relativistiche

$$\boxed{C_k\,\partial_k\,\Omega_{si} = \Omega_{ik}\,\partial_s\,C_k - \Omega_{sk}\,\partial_i\,C_k} \tag{3,4}$$

ottenute per altra via dal LICHNEROWICZ [1].

Tale risultato può essere esteso al caso dei fluidi perfetti elettrizzati, se osserviamo che, in assenza di forze esterne, l'equazione del moto é data da

$$J_k\;F_{ik} - C_k\;\Omega_{ik} = 0 \tag{3,5}$$

Ora si ha $J_i = k\,C_i$ e quindi la (5) può essere scritta nel seguente modo

$$C_k\,(\Omega_{ik} - kF_{ik}) = 0 \quad \text{cioé} \quad C_k\,\Omega'_{ik} = 0 \tag{3,6}$$

Ripetendo allora lo stesso ragionamento precedente e supponendo k costante, avremo

$$\boxed{C_k\,\partial_k\,\Omega'_{si} = \Omega'_{ik}\,\partial_s\,C_k - \Omega'_{sk}\,\partial_i\,C_k} \tag{3,7}$$

che estende il teorema di HELMHOLTZ al caso dei fluidi elettrizzati in modo omogeneo [1].

4 — STUDIO DEI FLUIDI CON CONDUCIBILITA' ELETTRICA INFINITA

Come abbiamo detto, la «magnetoidrodinamica relativistica ideale» é lo studio delle proprietà di un fluido perfetto, nel quale non vi siano dissipazioni di alcun tipo, e cioé con conducibilità elettrica infinita.

Nella materia, il campo elettromagnetico con induzione é definito dai due tensori H_{ik} e B_{ik}, e le equazioni di MAXWELL sono le seguenti

$$\text{Div } H_{ik} = -j_k \quad ; \quad \text{Rot } B_{ik} = 0 \tag{4,1}$$

Si possono introdurre allora i due vettori [2]:

$$\boxed{c\, e_i = u_k\, B_{ik} \quad ; \quad cd_i = u_k\, H_{ik}} \tag{4,2}$$

dove c é la velocità della luce, i quali ci danno il *campo elettrico* e_i e la *induzione elettrica* d_i, rispetto alla direzione (temporale) della velocità u_i del fluido, nel punto considerato. Avremo poi gli altri due vettori

$$\boxed{c\, h_i = u_k\, H^*_{ik} \quad ; \quad c\, b_i = u_k\, B^*_{ik}} \tag{4,3}$$

definiti a partire dai duali dei precedenti tensori. Essi ci danno il *campo magnetico* h_i e la *induzione magnetica* b_i rispetto alla direzione u_i della velocità del fluido.

Ne segue subito che questi vettori sono ortogonali alla velocità

$$u_i\, e_i = u_i\, d_i = u_i\, h_i = u_i\, b_i = 0 \tag{4,4}$$

e se supponiamo il fluido isotropo ed omogeneo, si avrà

$$d_i = \varepsilon_0\, e_i \quad ; \quad b_i = \mu_0\, h_i \tag{4,5}$$

con ε_0 e μ_0 costanti.

I due tensori elettromagnetici possono essere facilmente espressi in funzione dei quattro vettori (2), (3) precedentemente definiti [9]. Infatti, la prima delle (3) si può scrivere così

$$2\, c\, h_i = \varepsilon_{iklm}\, H_{lm}\, u_k$$

dove ε_{iklm} é il simbolo di RICCI. Moltiplicando i due membri per $\varepsilon_{ik'l'm'}$, ed introducendo il simbolo δ di kronecker, avremo

$$2\,c\,\varepsilon_{ik'l'm'} = H_{lm}\,u_k\,\delta^{k'l'm'}_{klm}$$

Se allora ricordiamo che δ é nullo se gli indici in alto non coincidono con quelli in basso, e vale ± 1 se tali indici coincidono, a seconda che la permutazione (klm) é pari o dispari rispetto alla $(k'\ l'\ m')$, la precedente si può scrivere così

$$c\varepsilon_{iklm}\,h_i = H_{lm}\,u_k + H_{mk}\,u_l + H_{ke}\,u_m$$

Moltiplicando i due membri per u_k e sommando, avremo subito

$$\boxed{c\,H_{lm} = u_l\,d_m - u_m\,d_l + \varepsilon_{iklm}\,h_i\,u_k} \tag{4,6}$$

In modo analogo si dimostra che

$$\boxed{c\ B_{lm} = u_l\,e_m - u_m\,e_l + \varepsilon_{iklm}\,b_i\,u_k} \tag{4,7}$$

Si hanno pure le due formule [1]

$$\left\{\begin{array}{l} c\ H^*_{lm} = u_l\,h_m - u_m\,h_l + \varepsilon_{iklm}\,d_i\,u_k \\ c\ B^*_{lm} = u_l\,b_m - u_m\,b_l + \varepsilon_{iklm}\,e_i\,u_k \end{array}\right. \tag{4,8}$$

le quali esprimono i tensori elettromagnetici ed i loro duali, in funzione dei quattro vettori $(e_i,\ d_i,\ h_i,\ b_i)$.

Fatta questa premessa, osserviamo che la corrente elettrica é composta dalla somma di due termini, corrispondenti rispettivamente alla corrente di *convezione* ed a quella di *conduzione*

$$J_k = \varrho\,u_k/c + \sigma\,e_k \tag{4,9}$$

dove σ é la conducibilità del fluido. Se tale conducibilità é infinita, poiché la corrente elettrica J_k é essenzialmente finita, ne segue che il prodotto σe_k deve mantenersi finito. In tale caso dovrà aversi necessariamente $e_k = 0$, e quindi, in base alle (5), anche $d_k = 0$. Questo significa che nel riferimento proprio (cioé solidale al fluido nel punto considerato), il campo si riduce solo a quello magnetico, ed allora le formule precedenti si semplificano notevolmente

$$\left\{\begin{array}{l} c\ H_{ik} = \varepsilon_{iklm}\,h_l\,u_m \quad ; \quad c\ B_{ik} = \varepsilon_{iklm}\,b_l\,u_m \\ c\ H^*_{ik} = u_i\,h_k - u_k\,h_i \quad ; \quad c\ B^*_{ik} = u_i\,b_k - u_k\,b_i \end{array}\right. \tag{4,10}$$

cioé i tensori elettromagnetici sono semplici, e quindi esprimibili come prodotti esterni di due vettori.

5 — LE EQUAZIONI DELLA MAGNETOIDRODINAMICA RELATIVISTICA IDEALE

Nella magnetoidrodinamica relativistica ideale, i due tensori elettromagnetici, in base alle (4,5) risultano proporzionali

$$B_{ik} = \mu_0 \, H_{ik} \tag{5,1}$$

ed allora il tensore energetico del campo elettromagnetico sarà

$$T'_{ik} = \mu_0 \left(H_{is} \, H_{sk} + \frac{1}{4} H_{rs} \, H_{rs} \, \delta_{ik}\right) \tag{5,2}$$

Tenendo conto delle (4,10) e con calcoli che non riportiamo (vedi [1] e [9]), si trova che

$$\boxed{T''_{ik} = \mu_0 \, h_i \, h_k - \mu_0 \, h^2 \left(\frac{1}{c^2} u_i \, u_k + \frac{1}{2} \delta_{ik}\right)} \tag{5,3}$$

dove si é posto $h^2 = h_s h_s$. Se ne deduce che il tensore energetico totale (2,6) della magnetoidrodinamica ideale é dato da

$$\boxed{T_{ik} = M \, u_i \, u_k - \mu_0 \, h_i \, h_k + P \, \delta_{ik}} \tag{5,4}$$

dove abbiamo posto, per brevità

$$M = \mu + \frac{p + \mu_0 \, h^2}{c^2} \quad ; \quad P = p + \frac{1}{2} \mu_0 \, h^2 \tag{5,5}$$

Si osservi che nel caso dei fluidi perfetti incompressibili si ha $p = \mu \, c^2$, ed allora

$$2P = 2p + \mu_0 \, h^2 = Mc^2 \tag{5,6}$$

Dalla (4), moltiplicando per u_k e sommando, segue che

$$u_k \, T_{ik} = (P - Mc^2) \, u_i = - \left(\mu \, c^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \, h^2\right) \tag{5,7}$$

Prendendo la Div dei due membri della (4), otteniamo l'equazione del moto

$$\boxed{M u_i\, \partial_i\, u_k + u_k\, \partial_i\, (M u_i) + \partial_k\, P = \mu_0\, (h_i\, \partial_i\, h_k + h_k\, \partial_i\, h_i)} \tag{5,8}$$

Infine, se osserviamo che la forza di LORENTZ

$$f_i = j_k\; B_{ik} = j_k\; \varepsilon_{iklm}\; b_l\, u_m \tag{5,9}$$

moltiplicata per u_i é identicamente nulla, ne segue che l'equazione di continuità (2,8) é quella stessa dei fluidi perfetti.

La seconda equazione di MAXWELL equivale alla Div $B^*_{ik} = 0$, e quindi, in base alle (4,10) diventa

$$\partial_i\, (h_i\; u_k - h_k\; u_i) = 0 \tag{5,10}$$

Da essa segue una interessante conseguenza, se ricordiamo che $h_i\, u_i = 0$ e che $u_i\, u_i = -c^2$: eseguendo la derivazione si ha

$$h_i\, \partial_i\, u_k + u_k\, \partial_i\, h_i - h_k\, \partial_i\, u_i - u_i\, \partial_i\, h_k = 0$$

Moltiplichiamo i due membri per u_k e sommiamo

$$- c^2 \partial_i h_i = u_i\; u_k\; \partial_i\; h_k$$

e se ricordiamo che $u_i\, \partial_i = d/d\tau$, avremo in definitiva

$$c^2\; \partial_i\, h_i = h_i\, a_i \tag{5,11}$$

dove a_i é il vettore accelerazione. Ne segue che il campo magnetico h_i é solenoidale, solo se é ortogonale alla accelerazione.

Otteniamo così il seguente sistema di equazioni della magneto-idrodinamica relativistica ideale [9]:

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_i\, (h_i\, u_k - h_k\, u_i) = 0 \quad ; \quad c^2\, \partial_k\, (\mu'\, u_k) = u_i\, \partial_i\, p \\ M\, a_k + u_k\, \partial_i\, (M u_i) + \partial_k\, P = \mu_0\, \partial_i\, (h_i\, h_k) \\ u_i\, u_i = -c^2 \quad ; \quad u_i\, h_i = 0 \quad ; \quad \mu = \mu\, (p) \end{array}\right. \tag{5,12}$$

Poiché dalla prima equazione segue che $\partial_i\, \partial_k\, (h_i\, u_k - h_k\, u_i) = 0$, essa equivale a tre equazioni indipendenti, e lo stesso si dica per la terza equazione, perché da essa segue l'equazione di continuità. Abbiamo quindi un sistema di 10 equazioni indipendenti nelle 10 funzioni incognite $(h_i,\; u_i,\; \mu,\; p)$, ed il sistema risulta determinato.

Uno studio delle equazioni (12) porta alla conclusione che esistono tre tipi di onde, e cioé due *onde idrodinamiche* (lente e veloci), con velocità V_1 e V_2, e l'*onda di* ALFVÈN con velocità

$$(5,13) \qquad V^2{}_A = \frac{\mu_0 \, h^2{}_0}{M} = \frac{\mu^2{}_0 \, h^2{}_0}{\mu + (p + \mu_0 \, h^2)/c^2}$$

dove h_0 é la componente del campo magnetico nella direzione di propagazione dell'onda [2]. Si dimostra poi che

$$(5,14) \qquad V_1 \leq V_A \leq V_2 \leq c$$

In particolare, se il fluido é incompressibile, si dimostra che si ha

$$(5,15) \qquad V_1 = V_A \, ; \quad V_2 = c$$

cioé l'onda di ALFVÈN é pure un'onda idrodinamica [1].

Si osservi infine che al limite classico la (13) si riduce alla formula di ALFVÈN

$$(5,16) \qquad V^2{}_A = \mu_0 \, h_0{}^2/\mu$$

valida nella magnetoidrodinamica classica [10].

6 – IL CRONOTOPO DI DE SITTER-CASTELNUOVO

Come abbiamo visto in precedenti lavori [5], la relatività proiettiva, basata sul gruppo di FANTAPPIÈ, può essere sviluppata adoperando la rappresentazione geodetica piana A_4 del cronotopo V_4 di DE SITTER, a curvatura costante $+ 1/r^2$. Il cronotopo A_4 di CASTELNUOVO é rappresentato dai punti esterni alla quadrica assoluto, di equazione

$$(6,1) \qquad A^2 = 1 + \alpha^2 - \gamma^2 = 0$$

con $\vec{\alpha} = \vec{x}/r$, $\gamma = ct/r = t/t_0$. Introduciamo le coordinate proiettive $\bar{x}_A (A = 1, 2, \ldots, 5)$ legate a quelle non proiettive x_i $(i = 1, 2, \ldots 4)$ dalle relazioni

$$(6,2) \qquad x_i = r\bar{x}_i/\bar{x}_5$$

e le normalizziamo con la condizione di WEIERSTRASS

$$(6,3) \qquad \boxed{\bar{x}_A \, \bar{x}_A = r^2}$$

Si può allora introdurre una velocità proiettiva $\bar{u}_A = d\bar{x}_A/d\tau$, ed una accelerazione proiettiva $\bar{a}_A = d\bar{u}_A/d\tau$, dove τ é il tempo proprio, legate dalle relazioni

$$(6,4) \qquad \boxed{\bar{u}_A \bar{u}_A = -c^2 \quad ; \quad \bar{x}_A \bar{u}_A = 0 \quad ; \quad \bar{x}_A \bar{a}_A = c^2}$$

mentre dalla (3) si deduce che

$$(6,5) \qquad \bar{x}_5 = r/A \qquad \text{con} \qquad A^2 = 1 + \alpha^2 - \gamma^2$$

Se poi indichiamo con $\bar{\partial}_A = \partial/\partial\bar{x}_A$ la derivata parziale rispetto alla coordinata omogenea $\bar{x}_A$, e teniamo presente che $\varphi\,(x_i) = \varphi\,(\bar{x}_i/\bar{x}_5) = \psi\,(\bar{x}_B)$, é facile verificare che si ha

$$(6,6) \qquad \bar{\partial}_i\, \psi\,(\bar{x}_B) = A\; \partial_i\, \varphi\,(x_k)$$

Per esprimere la $\bar{\partial}_5$ in coordinate non omogenee, ricordiamo che la funzione $\psi(\bar{x}_A)$ é omogenea di grado zero nelle $\bar{x}_A$, ed allora dal teorema di EULERO sulle funzioni omogenee

$$(6,7) \qquad \bar{x}_A\; \bar{\partial}_A\; \psi\,(\bar{x}_s) = 0$$

ricordando la (6) segue che

$$(6,8) \qquad \bar{\partial}_5\; \psi\,(\bar{x}_B) = -\,A\; x_s\; \partial_s\, \varphi\,(x_i)$$

Per calcolare il LAPLACIANO

$$(6,9) \qquad \bar{\Delta}\varphi = \bar{\partial}_A\; \bar{\partial}_A\, \varphi = (\bar{\partial}_1^2 + \bar{\partial}_2^2 + \bar{\partial}_3^2 + \bar{\partial}_4^2 + \bar{\partial}_5^2)\,\varphi = 0$$

in coordinate non omogenee, osserviamo che si ha

$$(6,10) \qquad \bar{\partial}_s^2\, \psi\,(x_B) = A^2\; \partial_s^2\, \varphi + (x_i)$$

mentre si può verificare che

$$(6,11) \qquad r^2\; \bar{\partial}_5^2\, \psi\,(\bar{x}_B) = A^2\,(x_r\, x_s\; \partial_r\; \partial_s + 2\, x_r\; \partial_r)\, \varphi\,(x_i)$$

sostituendo tali valori nella (9), avremo in definitiva l'equazione

$$(6,12) \qquad \boxed{r^2\, \nabla^2 \varphi = A^2\,(r^2\; \partial_i^2 + x_r\, x_s\; \partial_r\; \partial_s + 2x_s\; \partial_s)\, \varphi = 0}$$

Tale espressione completa quella ottenuta in un precedente lavoro, nel quale avevamo posto $\bar{x}_5 = 1$, mentre adesso si é tenuto conto della condizione (6,3) di normalizzazione.

Se poi ci riferiamo al caso bidimensionale (x, t), la (12) ci dà il DALAMBERTIANO proiettivo

$$\boxed{\square^* \varphi = (1 + \alpha^2) \varphi_{xx} + 2\alpha\gamma\varphi_{xt} - (1 - \gamma^2)\, \varphi_{tt}/c^2 + 2\alpha\varphi_x + 2\gamma\varphi_t = 0} \tag{6,13}$$

il quale é una equazione differenziale alle derivate parziali del tipo misto di TRICOMI. Tale equazione é quindi *iperbolica* nei punti esterni all'assoluto (spazio fisico), *parabolica* nei punti dell'assoluto, ed *ellittica* negli altri punti. In conseguenza, le due caratteristiche uscenti da un punto P non sono altro che le due tangenti all'assoluto condotte da quel punto [4].

7 — IL CAMPO MAGNETOIDRODINAMICO

Nella relatività proiettiva, le equazioni del campo magnetoidrodinamico sono le seguenti [3]

$$\mathrm{Rot}\ H_{AB} = J_{ABC} \quad ; \quad \mathrm{Div}\ H_{AB} = 0 \qquad (A,\ B = 1,2 \ldots 5) \tag{7,1}$$

Se supponiamo che il tensore A_{AB} sia omogeneo di grado 0 nelle $\bar{x}_A$, e ricordiamo i risultati del n.º 6, tali equazioni si possono scrivere così, in coordinate non omogenee:

$$\left\{\begin{array}{l} A\ \mathrm{Rot}\ H_{ik} = J_{ike} \\ A\,(\mathrm{Rot}\, C_i - \dfrac{x_s\, \partial_s}{r} H_{ik}) = \Omega_{ik} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} A\ (\mathrm{Div}\, H_{ik} + \dfrac{x_s\, \partial_s}{r} C_k) = 0 \\ A\ \mathrm{Div}\ C_i = 0 \end{array}\right. \tag{7,2}$$

con $A^2 = 1 + \alpha^2 - \gamma^2$. Tali equazioni sono quindi definite nei punti esterni all'assoluto di CAYLEY-KLEIN, e cioé nei punti dello spazio fisico.

Introdotta la forza ponderomotrice

$$2\, f_A = H_{BC}\, J_{ABC} \tag{7,3}$$

essa si può esprimere come Div di un tensore energetico

$$T_{AB} = H_{AS}\, H_{SB} + \frac{1}{4} H_{RS}\, H_{RS}\, \delta_{AB} \tag{7,4}$$

e tale tensore generalizza quello dello schema fluido perfetto-campo elettromagnetico.

A partire dal tensore H_{AB} si possono costruire un vettore $\bar{h}_A$ ed un tensore $\bar{e}_{AB}$, così definiti

$$\boxed{c\,\bar{h}_A = \bar{u}_S\,H_{AS} \quad ; \quad c\,\bar{e}_{AB} = \bar{u}_S\,H^*_{ABS}} \tag{7,5}$$

In un sistema di riferimento proprio (cioé solidale al fluido nel punto considerato), si ha $\alpha = \beta = \gamma = 0$, ed allora $\bar{u}_\alpha = 0$ ($\alpha = 1, 2, 3$), $\bar{u}_4 = ic$; $\bar{u}_5 = 0$. Ne segue che

$$\bar{h}_A = (H_\alpha, 0, C_0) \quad ; \quad \bar{e}_{AB} = (E_a, C_a = 0) \tag{7,6}$$

e quindi $\bar{h}_A$ generalizza il *vettore magnetico*, mentre $\bar{e}_{AB}$ generalizza il *vettore elettrico*, introdotti nella magnetoidrodinamica relativistica (n.° 4).

In modo analogo possiamo introdurre il *vettore idrodinamico* $\bar{c}_A$ ed il *tensore elettromagnetico* $\bar{f}_{AB}$, nel seguente modo

$$\boxed{r\,\bar{c}_A = \bar{x}_S\,H_{AS} \quad ; \quad r\,\bar{f}_{AB} = \bar{x}_S\,H^*_{ABS}} \tag{7,7}$$

perché nel riferimento proprio (in cui $\bar{x}_\alpha = 0$, $\bar{x}_4 = 0$, $\bar{x}_5 = r$) si ha

$$\bar{c}_A = (C_\alpha, C_0, 0) \quad ; \quad \bar{f}_{AB} = (E_\alpha, H_\alpha). \tag{7,8}$$

Dalle (5) e (7) segue subito che

$$\bar{h}_A\,\bar{u}_A = \bar{e}_{AB}\,\bar{u}_A = \bar{e}_{AB}\,\bar{u}_B = 0 \;;\; \bar{c}_A\,\bar{x}_A = \bar{f}_{AB}\,\bar{x}_A = \bar{f}_{AB}\,\bar{x}_B = 0 \tag{7,9}$$

Si possono poi introdurre il *vettore elettrico*

$$rc\,\bar{e}_A = \bar{u}_B\,\bar{x}_C\,H^*_{ABC} = -\,c\,\bar{e}_{AC}\,\bar{x}_C = r\,\bar{f}_{AB}\,\bar{u}_B \tag{7,10}$$

e lo scalare q, che si può interpretare come «indice» del fluido

$$\boxed{rc^2 q = \bar{x}_A\,\bar{u}_B\,H_{AB} = -\,rc_B\,\bar{u}_B = ch_A\,\bar{x}_A} \tag{7,11}$$

perché in un riferimento proprio essi si riducono rispettivamente al campo elettrico E_0 ed all'indice f del fluido.

In modo analogo, il tensore $\overline{J}_{ABC}$ si può scomporre nel vettore corrente $\overline{J}_A$ e nel tensore vortice $\overline{\Omega}_{AB}$, così definiti

$$\boxed{r\,\overline{J}_A = \overline{x}_S\,\overset{*}{J}_{AS} \quad ; \quad r\,\overline{\Omega}_{AB} = \overline{x}_S\,J_{ABS}} \tag{7,12}$$

oppure nelle due quantità

$$r\,J_A^{(1)} = \overline{u}_S\,\overset{*}{J}_{AS} \quad ; \quad r\,\Omega_{AB}^{(1)} = \overline{u}_S\,J_{ABS} \tag{7,13}$$

il cui significato si trova facilmente, se ci poniamo nel sistema proprio.

8 – SCOMPOSIZIONE DEL TENSORE MAGNETOIDRODINAMICO

Il tensore magnetoidrodinamico H_{AB} si può esprimere in funzione del vettore $\overline{h}_A$ e del tensore $\overline{e}_{AB}$, ovvero in funzione di $\overline{c}_A$ e di $\overline{f}_{AB}$. A questo scopo osserviamo che la seconda delle (7,4) si può scrivere così

$$2\,c\,\overline{e}_{AB} = \varepsilon_{ABCDE}\,\overline{u}_C\,H_{DE}$$

Moltiplichiamo i due membri per $\varepsilon_{AB'C'D'E'}$ e sommiamo; con un ragionamento del tutto simile a quello seguito al n.º 4, avremo

$$\overline{u}_C\,H_{DE} + \overline{u}_D\,H_{EC} + \overline{u}_E\,H_{CD} = c\,\varepsilon_{ABCDE}\,\overline{e}_{AB} \tag{8,1}$$

Se allora moltiplichiamo i due membri per $\overline{u}_C$, ricordiamo che $\overline{u}_A\,\overline{u}_A = -c^2$ e teniamo presenti le (7,4) otteniamo la formula

$$\boxed{c\,H_{AB} = \overline{u}_A\,\overline{h}_B - \overline{u}_B\,\overline{h}_A + \varepsilon_{ABCDE}\,\overline{u}_C\,\overline{e}_{DE}} \tag{8,2}$$

In modo perfettamente analogo si trova poi che

$$\boxed{r\,H_{AB} = \overline{c}_A\,\overline{x}_B - \overline{c}_B\,\overline{x}_A + \varepsilon_{ABCDE}\,\overline{x}_C\,\overline{f}_{DE}} \tag{8,3}$$

Da queste due formule si trae una interessante conseguenza, se si moltiplica la prima per $\overline{x}_B$ e la seconda per $\overline{u}_B$

$$\boxed{\overline{c}_A = \varphi\,\overline{u}_A + \overline{q}_A \quad ; \quad r\,\overline{h}_A = c\,\varphi\,\overline{x}_A + \overline{y}_A} \tag{8,4}$$

dove q é l'indice (7,11) del fluido, e si é posto

$$(8,5) \qquad rc\,\overline{q}_A = \varepsilon_{ABCDE}\,\overline{x}_B\,\overline{u}_C\,\overline{e}_{DE} \quad ; \quad c\,\overline{y}_A = \varepsilon_{ABCDE}\,\overline{u}_B\,\overline{x}_C\,\overline{f}_{DE}$$

Inoltre i due vettori $\overline{q}_A$ ed $\overline{y}_A$ sono rispettivamente ortogonali ad $\overline{u}_A$ ed $\overline{x}_A$, cioé si ha

$$(8,6) \qquad \overline{q}_A\,\overline{u}_A = 0 \quad ; \quad \overline{y}_A\,\overline{x}_A = 0$$

Possiamo quindi affermare che nel caso generale, il vettore corrente idrodinamica $\overline{c}_A$ non é parallelo alla velocità proiettiva $\overline{u}_A$, ma é scomponibile in una parte parallela ad $\overline{u}_A$ ed in una seconda parte ad essa ortogonale. Si osservi che una cosa simile accade nella idrodinamica relativistica dei fluidi conduttori del calore, dove il vettore corrente idrodinamica si può scomporre così [10].

$$(8,7) \qquad C_i = f\,u_i + q_i \quad \text{con} \quad u_i\,q_i = 0$$

e tale formula é simile alla prima delle (4).

Possiamo allora considerare quattro casi-limite della magnetoidrodinamica proiettiva:

1.° La *magnetoidrodinamica ideale proiettiva* che si ha quando $\overline{e}_{AB} = 0$, cioé quando il campo si riduce a quello $\overline{h}_A$ per un osservatore proprio. In tale caso si ha

$$(8,8) \qquad c\,H_{AB} = \overline{u}_A\,\overline{h}_B - \overline{u}_B\,\overline{h}_A \quad , \quad \text{mentre} \quad \overline{c}_A = q\,\overline{u}_A$$

2.° La *elettrodinamica proiettiva*, nella quale $\overline{h}_A = 0$, ed allora

$$(8,9) \qquad c\,H_{AB} = \varepsilon_{ABCDE}\,\overline{u}_C\,\overline{e}_{DE}, \quad \text{mentre} \quad \overline{c}_A = \overline{q}_A$$

3.° La *idrodinamica proiettiva*, nella quale il campo, visto da un osservatore proprio, si riduce a quello idrodinamico $\overline{c}_A$. Tale caso si verifica per $\overline{f}_{AB} = 0$, ed allora

$$(8,10) \qquad r\,H_{AB} = \overline{c}_A\,\overline{x}_B - \overline{c}_B\,\overline{x}_A \quad \text{con} \quad r\,\overline{h}_A = c\,q\,\overline{x}_A$$

4.° *L'elettromagnetismo proiettivo*, quando si ha $\overline{c}_A = 0$, cioé il campo si riduce, per un osservatore proprio, a quello elettromagnetico:

$$(8,11) \qquad r\,H_{AB} = \varepsilon_{ABCDE}\,\overline{x}_C\,\overline{f}_{DE} \quad \text{con} \quad r\,\overline{h}_A = \overline{y}_A$$

In questa memoria ci limiteremo allo studio del primo caso, riservandoci di esaminare gli altri casi in un successivo lavoro.

9 — LA MAGNETOIDRODINAMICA PROIETTIVA IDEALE

La magnetoidrodinamica ideale (proiettiva), si ottiene quando il campo H_{AB} si riduce, per l'osservatore proprio, al campo magnetico generalizzato $\overline{h}_A$, cioé quando si ha $\overline{e}_{AB} = 0$.

Questo si verifica quando la conducibilità elettrica é infinita, perché in base alla legge di Ohm generalizzata

$$J_A = \sigma \bar{\bar{e}}_A \quad \text{ovvero} \quad J^*_{AB} = \sigma \bar{\bar{e}}_{AB} \tag{9,1}$$

ne segue che per $\sigma \to \infty$, poiché J^*_{AB} deve mantenersi finita, si dovrà avere $\overline{e}_{AB} = 0$. Si osservi che la legge di Ohm (1), si può scrivere così, in forma duale

$$c\, J_{ABC} = \sigma (\bar{\bar{u}}_A H_{BC} + \bar{\bar{u}}_B H_{CA} + \bar{\bar{u}}_C H_{AB}) \tag{9,2}$$

e si decompone nelle

$$\begin{cases} c\, J_{ikl} = \sigma (\bar{\bar{u}}_i H_{kl} + \bar{\bar{u}}_k H_{li} + \bar{\bar{u}}_l H_{ik}) \\ c\, \Omega_{ik} = \sigma (\bar{\bar{u}}_i C_k - \bar{\bar{u}}_k C_i + \bar{\bar{u}}_5 H_{ik}) \end{cases} \tag{9,3}$$

Passando al limite $r \to \infty$, si ha $\bar{\bar{u}}_i = \bar{u}_i$; $\bar{\bar{u}}_5 = 0$, $C_i = f u_i$ ed allora la prima si riduce alla legge di Ohm (scritta in forma duale) e la seconda ci dà $\Omega_{ik} = 0$.

Fatta questa premessa, per estendere alla relatività proiettiva la magnetoidrodinamica ideale svolta al n.° 5, ci poniamo dapprima nel caso più semplice in cui $\mu_0 = 1$ [11] e ci limitiamo ai fluidi perfetti incompressibili.

Si ha allora

$$\boxed{c\, H_{AB} = \bar{\bar{u}}_A \bar{h}_B - \bar{\bar{u}}_B \bar{h}_A} \tag{9,4}$$

mentre il campo idrodinamico si riduce a

$$\bar{c}_A = \varphi\, \bar{u}_A \quad , \quad \text{con} \quad \bar{c}_A\, \bar{x}_A = 0 \tag{9,5}$$

Per ottenere allora l'espressione del tensore energetico totale (7,4), osserviamo che in base alla (4) si ha

$$c^2 H_{AS} H_{SB} = c^2 \bar{h}_A \bar{h}_B - \bar{h}^2 \bar{u}_A \bar{u}_B \text{ e quindi } H_{RS} H_{RS} = -2\, h^2$$

dove si é posto $\bar{h}^2 = \bar{h}_s \bar{h}_s$. Il tensore energetico totale é quindi dato dalla semplice espressione

$$(9{,}6) \qquad \boxed{T_{AB} = \bar{h}_A \bar{h}_B - \bar{h}^2\left(\frac{1}{c^2}\,\bar{u}_A \bar{u}_B + \frac{1}{2}\,\delta_{AB}\right)}$$

che generalizza la (5,3) della magnetoidrodinamica relativistica. Per scrivere le componenti di tale tensore, al limite relativistico, osserviamo che si ha

$$(9{,}7) \qquad c\,\bar{h}_i = u_s H_{is} + \bar{u}_5\, C_i \quad ; \quad c\,\bar{h}_5 = \bar{u}_s\, C_s$$

e quindi, passando al limite ($r \to \infty$) si avrà $\bar{u}_s = u_s$; $\bar{u}_5 = 0$; $C_s = fu_s$, dove f é l'indice del fluido. In conseguenza

$$(9{,}8) \qquad \bar{h}_i = h_i \quad ; \quad c\,\bar{h}_5 = -c^2 f$$

Avremo quindi

$$(9{,}9) \qquad \bar{h}^2 = h^2 + c^2 f^2 = h^2 + \mu c^2 + p = Mc^2$$

se si tiene presente che $f^2 = \mu' = \mu + p/c^2$. Poiché nei fluidi perfetti incompressibili si ha $2P = Mc^2$ (vedi n.° 5), avremo, al limite

$$(9{,}10) \qquad T_{ik} = h_i\, h_k - M\, u_i u_k - P\delta_{ik}$$

il quale, a meno del segno, coincide con la (5,4) della magnetoidrodinamica relativistica (per $\mu_0 = 1$). Le altre componenti si riducono alle

$$(9{,}11) \qquad T_{i5} = -cfh_i \quad ; \quad 2\,T_{55} = c^2 f^2 - h^2$$

Tornando alla magnetoidrodinamica proiettiva, se poniamo

$$(9{,}12) \qquad \bar{h}^2 = \bar{M}\, c^2 = 2\,\bar{P}$$

il tensore energetico totale (6) si può scrivere così

$$(9{,}13) \qquad \boxed{T_{AB} = \bar{h}_A \bar{h}_B - \bar{M}\,\bar{u}_A \bar{u}_B - \bar{P}\,\delta_{AB}}$$

e da esso, moltiplicando i due membri per $\bar{u}_A$, segue che

$$(9{,}14) \qquad \bar{u}_A T_{AB} = (\bar{M}c^2 - \bar{P})\bar{u}_A = \bar{P}\,\bar{u}_A$$

Prendendo la Div della (10) si ottiene l'equazione dinamica

$$(9,15)\qquad \overline{M}\,\bar{u}_A\,\bar{\partial}_A\,\bar{u}_B + \bar{u}_B\,\bar{\partial}_A\,(\overline{M}\,\bar{u}_A) + \bar{\partial}_B \bar{P} = \bar{\partial}_A\,(\bar{h}_A\,\bar{h}_B)$$

la quale, ricordando che $\bar{u}_A\,\bar{\partial}_A = d/d\tau$ ed introducendo l'accelerazione proiettiva $\bar{a}_A$, si riduce alla

$$(9,16)\qquad \boxed{\overline{M}\,\bar{a}_B + \bar{u}_B\,\bar{\partial}_A\,(\overline{M}\,\bar{u}_A) + \bar{\partial}_B\,\bar{P} = \bar{h}_A\,\bar{\partial}_A\,\bar{h}_B + \bar{h}_B\,\bar{\partial}_A\,\bar{h}_A}$$

Per ottenere l'equazione di continuità, moltiplichiamo la (16) per $\bar{u}_B$, e ricordando le (7,8) avremo

$$(9,17)\qquad -\,c^2\,\bar{\partial}_A\,(\bar{h}^2\,\bar{u}_A) + d\bar{P}/d\tau = \bar{u}_B\,\bar{h}_A\,\bar{\partial}_A\,\bar{h}_B$$

In base alla (12) l'equazione dinamica si può scrivere così

$$(9,18)\qquad \bar{h}^2\,\bar{u}_A\,\bar{\partial}_A\,\bar{u}_B + \bar{u}_B\,\bar{\partial}_A\,(\bar{h}^2\,\bar{u}_A) + \frac{c^2}{2}\,\bar{\partial}_B\,\bar{h}^2 = c^2\,\bar{\partial}_A\,(\bar{h}_A\,\bar{h}_B)$$

mentre l'equazione di continuità assume la forma

$$(9,19)\qquad \boxed{\bar{\partial}_A\,(\bar{h}^2\,\bar{u}_A) - \frac{1}{2}\,\bar{u}_A\,\bar{\partial}_A\,\bar{h}^2 = \bar{h}_A\,\bar{u}_B\,\bar{\partial}_A\,\bar{h}_B}$$

La seconda equazione (7,1) del campo magnetoidrodinamico

$$(9,20)\qquad \bar{\partial}_A\,(\bar{u}_A\,\bar{h}_B - \bar{u}_B\,\bar{h}_A) = 0$$

al limite relativistico si decompone nelle

$$(9,21)\qquad \partial_i\,(u_i\,h_k - u_k\,h_i) = 0 \quad ; \quad \partial_i\,(f\,u_i) = \partial_i\,C_i = 0$$

la seconda delle quali esprime la incompressibilità del fluido. Eseguendo la derivazione, la (20) si scrive così

$$\bar{u}_A\,\bar{\partial}_A\,\bar{h}_B + \bar{h}_B\,\bar{\partial}_A\,\bar{u}_A - \bar{u}_B\,\bar{\partial}_A\,\bar{h}_A - \bar{h}_A\,\bar{\partial}_A\,\bar{u}_B = 0$$

Moltiplicando per $\bar{h}_B$ e sommando, segue che

$$\bar{h}_B\,\bar{u}_A\,\bar{\partial}_A\,\bar{h}_B + \bar{h}^2\,\bar{\partial}_A\,\bar{u}_A - \bar{h}_A\,\bar{h}_B\,\bar{\partial}_A\,\bar{u}_B = 0$$

e semplificando:

$$(9,22)\qquad \frac{1}{2}\,\bar{u}_A\,\bar{\partial}_A\,\bar{h}^2 + \bar{h}^2\,\bar{\partial}_A\,\bar{u}_A = \bar{h}_A\,\bar{u}_B\,\bar{\partial}_A\,\bar{h}_B$$

essa viene quindi a coincidere con l'equazione (19) di continuità, dedotta dalla equazione dinamica.

Si osservi infine che dalla equazione del campo $\partial_A H_{AB} = 0$, moltiplicando per $\bar{u}_B$ e sommando, segue subito che $\bar{\partial}_A \bar{h}_A = H_{AB} \bar{\partial}_A \bar{u}_A$, cioé

$$(9,23) \qquad \bar{\partial}_A \bar{h}_A = \bar{u}_A \bar{h}_B \bar{\partial}_A \bar{u}_B = \bar{h}_A \bar{a}_A$$

da cui segue che il campo $\bar{h}_A$ é solenoidale solo se é ortogonale alla accelerazione proiettiva, come nel caso (5,11) relativistico.

10 – LE EQUAZIONI DELLA MAGNETOIDRODINAMICA IDEALE PROIETTIVA

Otteniamo così il seguente sistema di equazioni della magneto idrodinamica proiettiva dei fluidi perfetti incompressibili, con $\mu_0 = 1$ e con conducibilità infinita

$$(10,1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\partial}_A (\bar{u}_A \bar{h}_B - \bar{u}_B \bar{h}_A) = 0; \quad \bar{h}_A \bar{u}_A = 0 \\ \bar{h}^2 \bar{u}_B \bar{\partial}_B \bar{u}_A + \bar{u}_B \bar{\partial}_A (\bar{h}^2 \bar{u}_A) + \dfrac{c^2}{2} \bar{\partial}_B \bar{h}^2 = c^2 \bar{\partial}_A (\bar{h}_A \bar{h}_B) \\ \dfrac{1}{2} \bar{u}_A \bar{\partial}_A \bar{h}^2 + \bar{h}^2 \bar{\partial}_A \bar{u}_A = \bar{h}_A \bar{u}_B \bar{\partial}_A \bar{h}_B \\ \bar{u}_A \bar{u}_A = -c^2 \quad ; \quad p = \mu c^2 \end{array} \right.$$

che é un sistema di 12 equazioni indipendenti nelle 12 incognite $(\bar{u}_A, \bar{h}_A, \mu, p)$.

Le considerazioni fatte possono essere subito estese al caso più generale in cui il fluido sia comprimibile, e $\mu_0 \neq 1$. Occorre allora introdurre i due tensori H_{AB} e B_{AB}, e le equazioni del campo magnetoidrodinamico risultano le seguenti [4]:

$$(10,2) \qquad \boxed{\mathrm{Rot}\, H_{AB} = J_{ABC} \quad ; \quad \mathrm{Div}\, B_{AB} = I_B}$$

Se definiamo la forza ponderomotrice nel seguente modo

$$(10,3) \qquad 2\, f_A = B_{BC}\, J_{ABC} - 2\, H_{AB}\, I_B$$

si può introdurre un tensore energetico che generalizza quello di MAXWELL-MINKOWSKI

$$M_{AB} = H_{AS}\, B_{SB} + \frac{1}{4}\, B_{RS}\, H_{RS}\, \delta_{AB} \tag{10,4}$$

ed allora l'equazione dinamica si scrive così

$$\boxed{f_A = \partial_S\, M_{AS} + \frac{1}{4}\, (B_{RS}\, \partial_A\, H_{RS} - H_{RS}\, \partial_A\, B_{RS})} \tag{10,5}$$

Se poi introduciamo il vettore $\bar{b}_A$ ed il tensore $\bar{d}_{AB}$ così definiti

$$c\, \bar{b}_A = \bar{u}_S\, B_{AS} \quad ; \quad c\, \bar{d}_{AB} = \bar{u}_S\, B^*_{ABS} \tag{10,6}$$

e ci riferiamo al caso della conducibilità elettrica infinita, dalla $\bar{e}_{AB} = 0$, segue che $\bar{d}_{AB} = 0$, ed allora si avrà

$$H_{AB} = \bar{u}_A\, \bar{h}_B - \bar{u}_B\, \bar{h}_A \quad ; \quad B_{AB} = \bar{u}_A\, \bar{b}_B - \bar{u}_B\, \bar{b}_A \tag{10,7}$$

Però adesso i vettori $\bar{h}_A$ e $\bar{b}_A$ non sono più proporzionali (anche nel caso in cui μ_0 é costante), e quindi non lo sono più neanche H_{AB} e B_{AB}.

In questo caso, sostituendo le (7) nella (4), otteniamo il seguente tensore energetico

$$\boxed{M_{AB} = \bar{h}_A\, \bar{b}_B - \bar{h}_S\, \bar{b}_S \left(\frac{1}{c^2}\, \bar{u}_A\, \bar{u}_B + \frac{1}{2}\, \delta_{AB} \right)} \tag{10,8}$$

mentre si ha, con facili calcoli e ricordando le (6,4) e le (7,8)

$$\frac{1}{4}\, (B_{RS}\, \partial_A\, H_{RS} - H_{RS}\, \partial_A\, B_{RS}) = \frac{1}{2}\, (\bar{h}_S\, \bar{\partial}_A\, \bar{b}_S - \bar{b}_S\, \bar{\partial}_A\, \bar{h}_S) \tag{10,9}$$

Per dimostrare che al limite relativistico ricadiamo nella teoria svolta al n.º 5, osserviamo che per $r \to \infty$ si ha

$$\bar{h}_i = h_i \quad ; \quad \bar{b}_i = \mu_0\, h_i \quad ; \quad \bar{h}_5 = -\, cf \quad ; \quad \bar{b}_5 = -\, cg \tag{10,10}$$

dove f e g sono i due indici del fluido. Il termine (10,9) si riduce allora al seguente

$$(10,11) \qquad \frac{1}{2}\,(h_5\,\partial_i\,b_5 - b_5\,\partial_i\,h_5) = \frac{c^2}{2}\,(f\,\partial_i\,g - g\,\partial_i\,f)$$

Se ricordiamo che [8] $fg = \mu' = \mu + p/c^2$ e che dalla condizione di SYNGE segue che $c^2\,\mu'\,\partial_i\,f/f = \partial_i\,p$, avremo

$$= \frac{c^2}{2}\,(\partial_i\,\mu' - 2\,g\,\partial_i\,f) = \frac{c^2}{2}\left(\partial_i\,\mu' - 2\,\mu'\,\frac{\partial_i f}{f}\right) = \frac{c^2}{2}\,\partial_i\left(\mu' - 2\,\frac{p}{c^2}\right)$$

e quindi il termine (11) vale

$$(10,12) \qquad \frac{1}{2}\,\partial_i\,(\mu\,c^2 - p)$$

Quindi al limite relativistico, la forza ponderomotrice si può porre ancora sotto forma di divergenza del seguente tensore energetico

$$T_{ik} = \mu_0\,h_i\,h_k - (\mu_0\,h^2 + \mu\,c^2 + p)\left(\frac{1}{c^2}\,u_i\,u_k + \frac{1}{2}\,\delta_{ik}\right) + \frac{1}{2}\,(\mu c^2 - p)\,\delta_{ik} =$$

$$= \mu_0\,h_i\,h_k - \left(\mu + \frac{p + \mu_0\,h^2}{c^2}\right) u_i\,u_k - \left(p + \frac{1}{2}\,\mu_0\,h^2\right)\delta_{ik}$$

cioé, in definitiva

$$(10,13) \qquad T_{ik} = \mu_0\,h_i\,h_k - M\,u_i\,u_k - P\,\delta_{ik}$$

che viene a coincidere a meno del segno, con la (5,4).

Per finire, osserviamo che si può stabilire una notevole analogia tra la magnetoidrodinamica ideale proiettiva e la «idrodinamica proiettiva», nella quale si ha

$$(10,14) \qquad r\,H_{AB} = \bar{c}_A\,\bar{x}_B - \bar{c}_B\,\bar{x}_A$$

mentre il campo magnetico generalizzato, assume la forma

$$(10,15) \qquad r\,\bar{h}_A = c\,\varphi\,\bar{x}_A \quad \text{con} \quad \bar{h}_A\,\bar{u}_A = 0$$

Sostituendo tale espressione (14) nella (7,4) otteniamo il seguente tensore energetico

$$(10,16) \qquad -\,T_{AB} = \bar{c}_A\,\bar{c}_B + \bar{c}_S\,\bar{c}_S\left(\frac{1}{r^2}\,\bar{x}_A\,\bar{x}_B - \frac{1}{2}\,\delta_{AB}\right)$$

Se osserviamo che si ha

$$r\,\bar{c}_i = \bar{x}_s\,H_{is} + \bar{x}_5\,C_i \quad ; \quad r\,\bar{c}_5 = \bar{x}_s\,C_s \tag{10,17}$$

e passiamo al limite $r \to \infty$, si ha $c_i = C_i$; $c_5 = 0$, il tensore (16) si riduce a quello della idrodinamica relativistica.

Prof. GIUSEPPE ARCIDIACONO
Via Acquedotto del Peschiera, 96
00135 - Roma

BIBLIOGRAFIA

(1) A. LICHNEROWICZ. — *Relativistic hydrodynamics and magnetohydrodynamics*, Benjamin, New York, 1967.

(2) Y. BRUHAT, *Fluides relativistes de conductibilité infinie*, Astronautica Acta, *6*, 354 (1960).

(3) G. ARCIDIACONO, *Le equazioni di* Maxwell *generalizzate*, Rend. Lincei, XVIII, fasc. 5 (1955); *La elettrodinamica e la idrodinamica...*, Rend. Lincei, XX, fasc. 5 (1956).

(4) G. ARCIDIACONO, *Magnetoidrodinamica e cosmologia*, Coll. Math., XIX, 177 (1968).

(5) La relatività proiettiva é sviluppata nel volume G. ARCIDIACONO, *La teoria della relatività*, Libreria Veschi (Viale Università, 7) Roma, 1970.

(6) Tra i lavori più recenti, ricordiamo G. BORNER, H. P. DURR, *Classical and quantum fields in* De Sitter *space*, Nuovo Cimento, *64*-A, 669 (1969); *Non linear spinor theory in* De Sitter *space*, N.C. *66*-A, 185 (1970); E. DE VRIES, *Foldy-Wouthuysen transformations*, Lorentz *transformations and* De Sitter *group*, Physica, *43*, 45 (1969); W. J. HOLMAN, *Tensor operators in Sp_4 and SO_5*, N.C. *66*-A, 619 (1970).

(7) A. LICHNEROWICZ, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnetisme*, cap. VI, Masson, Paris, 1955.

(8) O. COSTA DE BEAUREGARD, *La théorie de la relativité restreinte*, pag. 144, Masson, Paris, 1949.

(9) A. M. PRATELLI, *Casi estremi della dinamica relativistica di fluidi elettricamenti conduttori*, Missili, *43*,5 (1961); *Discontinuità ed ipersuperfici caratteristiche in magnetofluidodinamica relativistica*, Ann. Mat. *69*, 41 (1965).

(10) L. P. LANDAU, E. M. LIFCHITZ, *Fluid mechanics*, Pergamon Press, London 1959; vedi pure G. PICHON, *Etude relativiste de fluides visqueux et chargés*, Ann. Inst. Poincaré, *2*,21 (1965); C. MARLE, *Sur l'établissement des équations de l'hydrodynamique des fluides relativistes dissipatifs*, Ann. Poinc. *10*, 127 (1969); G. BOILLAT, *Relativistic thermodynamics Fluids*, Lettere al N. C. III, 521 (1970); PHAM-MAU-QUAN, *Sur les équations des fluides chargés inductifs en rélativité générale*, Rend. Mat. Roma VI, *2* 197 (1969).

(11) L. LANDAU, E. LIFCHITZ, *Electrodynamique des milieux continus*, Moscou 1969, cap. VIII.